

УДК 539.3

© 1997 г. В.В. СИЛЬВЕСТРОВ, А.В. ШУМИЛОВ

ЗАДАЧА СОЕДИНЕНИЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ПАКЕТ ВДОЛЬ КРИВЫХ

Рассматривается задача соединения друг с другом вдоль разомкнутых кривых конечного числа тонких бесконечных упругих пластин, образующих пакет. Пластины находятся в обобщенном плоском напряженном состоянии, порожденном заданными на бесконечности каждой из пластин усилиями, действующими в плоскостях пластин. Пластины между собой не касаются или касаются без трения и передача усилий с одной пластины в другую происходит только через линии соединения.

С помощью интегральных представлений [1] комплексных потенциалов построена и исследована система сингулярных интегральных уравнений задачи. Показано, что в каждой из пластин распределение напряжений вблизи концов линий соединения такое же, как вблизи тонких жестких остроугольных включений в одной отдельной пластине, хотя интенсивность напряжений в разных пластинах зависит от разных коэффициентов, которые все, кроме двух, линейно независимы между собой. Приведен случай, когда задача для системы пластин в целом распадается на конечное число самостоятельных задач для каждой из пластин по отдельности.

В случае, когда пластины соединены в пакет вдоль коллинеарных отрезков, рассматриваемая задача методом краевой задачи Римана решена явно в работах [2, 3]. Пакеты пластин, соединенных между собой в отдельных точках, рассмотрены в работах [4–7]. Изгиб пакета пластин, соединенных между собой вдоль коллинеарных отрезков, изучен в работе [8].

1. Постановка задачи. Пусть тонкие упругие однородные изотропные бесконечные пластины E_1, E_2, \dots, E_n , занимающие всю комплексную плоскость $z = x + iy$, наложены одна на другую и жестко соединены друг с другом без натяга и промежуточных прослоек вдоль разомкнутых не пересекающихся между собой кривых Ляпунова L_1, L_2, \dots, L_m . Пластина E_k ($1 \leq k \leq n$) имеет толщину h_k и характеризуется упругими постоянными $\mu_k, \nu_k = (3 - \nu_k)/(1 + \nu_k)$, где μ_k – модуль сдвига, ν_k – коэффициент Пуассона. Пластины между собой не касаются или касаются без трения и взаимодействуют друг с другом только через линии соединения. В точке ∞ пластины E_k в расчете на единицу толщины пластины действуют расположенные в плоскости пластины заданные напряжения $(\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty)_k$, вращение ω_k^∞ и сила $P_k = X_k + iY_k$, причем $h_1P_1 + h_2P_2 + \dots + h_nP_n = 0$. Пространственными эффектами концентрации напряжений на линиях соединения пластин и вблизи них будем пренебрегать.

Найдем напряженное состояние описанного выше пакета пластин, характеризуемое конечным упругим потенциалом в каждой конечной части пакета.

В данном случае в каждой из пластин E_k ($1 \leq k \leq n$) реализуется напряженное состояние, мало отличающееся от обобщенного плоского, определяемое по формулам

Колосова – Мухелишвили [9] через две функции $\Phi_k(z), \Psi_k(z)$, которые возьмем в виде [1]:

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{Q_k(t)}{t-z} dt + \gamma_k, \quad Q_k(t) = g'_k(t) - \frac{2i}{1+\kappa_k} q_k(t) \quad (1.1)$$

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{Q_k(t) - 2i\overline{q_k(t)}}{t-z} \overline{dt} - \frac{iQ_k(t)}{(t-z)^2} dt \right] + \gamma'_k$$

$$\gamma_k = \frac{1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)_k + \frac{2i\mu_k}{1+\kappa_k} \omega_k^\infty, \quad \gamma'_k = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)_k + i(\tau_{xy}^\infty)_k$$

где $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$, выражение $i(1+\kappa_k)g'_k(t)/(2\mu_k)$ равно скачку производной от вектора смещения $(u+iv)_k$ в пластине E_k при переходе через линию L , а $2q_k(t)$ есть скачок вектора $(N+iT)_k$ нормальной и касательной напряжений в пластине E_k при переходе через линию L в расчете на единицу толщины пластины.

На особой линии должны выполняться краевые условия

$$(u+iv)_k^+ = (u+iv)_k^- \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

$$(u+iv)_n^+ = (u+iv)_k^+ \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (1.3)$$

$$\sum_{k=1}^n h_k (N+iT)_k^+ = \sum_{k=1}^n h_k (N+iT)_k^- \quad (1.4)$$

2. Интегральные уравнения задачи. Так как согласно (1.2) все $g'_k(t) \equiv 0$, то

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa_k)} \int_L \frac{q_k(t)}{t-z} dt + \gamma_k \quad (2.1)$$

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{\pi i(1+\kappa_k)} \int_L \left[\frac{\kappa_k \overline{q_k(t)}}{t-z} \overline{dt} - \frac{i q_k(t)}{(t-z)^2} dt \right] + \gamma'_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

где q_1, q_2, \dots, q_{n-1} — неизвестные функции класса $H^*(L)$, удовлетворяющие условиям

$$\int_L q_k(t) dt = \frac{i}{2} P_k \quad (k=1, 2, \dots, n-1) \quad (2.2)$$

а функция $q_n(t)$ согласно (1.4) находится из равенства

$$\sum_{k=1}^n h_k q_k(t) = 0 \quad (t \in L) \quad (2.3)$$

Удовлетворяя условиям (1.3), после элементарных преобразований для нахождения функций q_1, q_2, \dots, q_{n-1} получим систему сингулярных интегральных уравнений, имеющую в матричной форме вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[A \left(\frac{2}{\tau-t} + M_1(\tau, t) \right) q(\tau) d\tau + B M_2(\tau, t) \overline{q(\tau)} d\tau \right] = f(t) \quad (t \in L) \quad (2.4)$$

$$A = \| \| A_{kj} \| \|, \quad B = \| \| B_{kj} \| \|, \quad q(\tau) = \text{col}\{q_1, q_2, \dots, q_{n-1}\}, \quad f(t) = \text{col}\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$$

$$A_{kj} = \frac{h_j}{h_n} + \frac{\kappa_k \mu_n (1 + \kappa_n)}{\kappa_n \mu_k (1 + \kappa_k)} \delta_{kj}, \quad B_{kj} = \frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{h_j}{h_n} + \frac{\mu_n (1 + \kappa_n)}{\mu_k (1 + \kappa_k)} \delta_{kj} \right)$$

$$f_k(t) = \frac{1 + \kappa_n}{\kappa_n} \left[\kappa_n \gamma_n - \bar{\gamma}_n - \bar{\gamma}'_n \frac{d\bar{t}}{dt} - \frac{\mu_n}{\mu_k} (\kappa_k \gamma_k - \bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}'_k \frac{d\bar{t}}{dt}) \right] \quad (k, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$M_1(\tau, t) = \frac{d}{dt} \ln \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}, \quad M_2(\tau, t) = -\frac{d}{dt} \frac{\tau - t}{\bar{\tau} - \bar{t}}$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Так как $\det A \neq 0$, что проверяется непосредственно, то эту систему можно записать в виде

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[\left(\frac{2}{\tau - t} + M_1(\tau, t) \right) q(\tau) d\tau + A^{-1} B M_2(\tau, t) \overline{q(\tau)} d\bar{\tau} \right] = A^{-1} f(t) \quad (t \in L) \quad (2.5)$$

К системе (2.5) надо присоединить условия (2.2), имеющие в матричной форме вид

$$\int_L q(t) dt = \frac{i}{2} P, \quad P = \text{col}\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}\} \quad (2.6)$$

а в случае $m > 1$ еще условия однозначности смещений вдоль замкнутых контуров, составленных из расположенных в пластинах E_k ($1 \leq k \leq n-1$) и E_n гладких дуг с концами на кривых L_j и L_{j+1} ($1 \leq j \leq m-1$), вдоль которых пластины соединены между собой. Возьмем произвольно точки $t_j \in L_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и зафиксируем их в качестве концов указанных дуг. Тогда на основе формул Колосова – Мухелишвили и представлений (2.1) после перестановки повторных интегралов и вычисления одного из них получим условия, имеющие в матричной форме вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[2 \ln \left| \frac{\tau - t_j}{\tau - t_{j+1}} \right| q(\tau) d\tau + A^{-1} B \left(\frac{\tau - t_j}{\bar{\tau} - \bar{t}_j} - \frac{\tau - t_{j+1}}{\bar{\tau} - \bar{t}_{j+1}} \right) \overline{q(\tau)} d\bar{\tau} \right] = A^{-1} s \quad (j = 1, 2, \dots, m-1) \quad (2.7)$$

$$s = \text{col}\{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}\}$$

$$s_k = \frac{1 + \kappa_n}{\kappa_n} \left[\left(\kappa_n \gamma_n - \bar{\gamma}_n - \frac{\mu_n}{\mu_k} (\kappa_k \gamma_k - \bar{\gamma}_k) \right) (t_{j+1} - t_j) - \left(\bar{\gamma}'_n - \frac{\mu_n}{\mu_k} \bar{\gamma}'_k \right) (\bar{t}_{j+1} - \bar{t}_j) \right]$$

Вывод 1. Сформулированная выше задача равносильна системе сингулярных интегральных уравнений (2.5) с дополнительными условиями (2.6), (2.7).

В случае $n = 2$, т.е. пакета из двух пластин, система уравнений (2.5) и векторные условия (2.6), (2.7) вырождаются в скалярное уравнение и условия, получаемые из (2.5)–(2.7) заменой $q(\tau)$, A , B , $f(t)$ и s на $q_1(\tau)$, A_{11} , B_{11} , $f_1(t)$ и s_1 соответственно.

3. Исследование системы уравнений и коэффициенты интенсивности напряжений.

Будем искать решение $q(t)$ системы (2.5) в классе $H^*(L)$ векторов, все компоненты которых на концах линии L могут обращаться в бесконечность порядка меньше 1. Из общей теории систем сингулярных интегральных уравнений [10] следует, что эта система в классе $H^*(L)$ всегда разрешима, ее общее решение содержит $m(n-1)$ произвольных комплексных постоянных и все компоненты $q_k(t)$ вектора-решения $q(t)$ имеет вблизи любого из концов $t = c$ линии L вид

$$q_k(t) = (t - c)^{-1/2} q_*(t), \quad q_*(t) \in H(L) \quad (3.1)$$

Неизвестные постоянные, входящие в общее решение системы, находятся из условий (2.6), (2.7), представляющих систему $m(n-1)$ линейных алгебраических уравнений относительно этих постоянных, однозначная разрешимость которой доказывается

аналогично классическому случаю [9]. Из представлений (2.1), (3.1) следует

Вывод 2. Вблизи концов линии L комплексные потенциалы $\Phi_k(z)$, $\Psi_k(z)$ имеют такой же вид, как в случае второй основной задачи теории упругости для плоскости с разрезами и распределение напряжений будет таким же, как вблизи вершин тонких жестких остроугольных включений в одной отдельной пластине [11]. Интенсивность напряжений вблизи вершины $z = c$ линии L в пластине E_j определяется коэффициентами $(k_1, k_2)_j$, которые находятся из равенства

$$(k_1 - ik_2)_j = \pm \frac{2ik_j}{1 + \kappa_j} \lim_{t \rightarrow c} \sqrt{2\pi|t - c|} q_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

где знак плюс берется для начальных точек линии L , а минус — для конечных. Коэффициенты $(k_1, k_2)_j$, соответствующие пластинам E_j , $j = 1, 2, \dots, n - 1$, между собой линейно независимы, а коэффициенты $(k_1, k_2)_n$, соответствующие пластине E_n , согласно (2.3) находятся через первые из равенства

$$\sum_{j=1}^n h_j (1 + \kappa_j) (k_1 - ik_2)_j / \kappa_j = 0 \quad (3.3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача в смысле асимптотического поведения комплексных потенциалов и распределения напряжений вблизи концов линии соединения пластин эквивалентна второй основной задаче теории упругости для одной отдельной пластины с разрезами, хотя качественно ее решение зависит от решения системы (2.5)–(2.7).

4. Пакет пластин с одинаковым коэффициентом Пуассона. Пусть все $\kappa_k = \kappa$, т.е. материал всех пластин имеет один и тот же коэффициент Пуассона. Тогда матрица $B = \kappa^{-1} A$ и система (2.5)–(2.7) распадается на $(n-1)$ следующих самостоятельных уравнений и условий для нахождения по отдельности функций $q_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$):

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[\left(\frac{2}{\tau - t} + M_1(\tau, t) \right) q_k(\tau) d\tau + \frac{1}{\kappa} M_2(\tau, t) \overline{q_k(\tau)} d\bar{\tau} \right] = \alpha_k(t) \quad (t \in L) \quad (4.1)$$

$$\int_L q_k(t) dt = \frac{iP_k}{2} \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \left[2 \ln \left| \frac{\tau - t_j}{\tau - t_{j+1}} \right| q_k(\tau) d\tau + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\tau - t_j}{\bar{\tau} - \bar{t}_j} - \frac{\tau - t_{j+1}}{\bar{\tau} - \bar{t}_{j+1}} \right) \overline{q_k(\tau)} d\bar{\tau} \right] = \beta_k \quad (j = 1, 2, \dots, m - 1) \quad (4.3)$$

$$\alpha_k(t) = \sum_{j=1}^{n-1} C_{kj} f_j(t), \quad \beta_k = \sum_{j=1}^{n-1} C_{kj} s_j, \quad \|C_{kj}\| = C = A^{-1}$$

Интегральное уравнение (4.1) совпадает с интегральным уравнением [1] второй основной задачи теории упругости для одной отдельной пластины E_k с разрезами по линии L при условии, что толщина пластины равна 1, на берегах разрезов заданы нулевые смещения, а в точке ∞ заданы напряжения $(\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*)_k$ и вращение ω_k^* определяемые через исходные по формулам

$$(\sigma)_k^* = \sum_{j=1}^{n-1} C_{kj} \left[\frac{\mu_n}{\mu_j} (\sigma)_j^\infty - (\sigma)_n^\infty \right], \quad \omega_k^* = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu_n}{\mu_j} C_{kj} (\omega)_j^\infty - \omega_n^\infty, \quad \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \quad (4.4)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n - 1)$$

где C_{kj} – элементы k -ой строки матрицы $C = A^{-1}$. То же самое можно сказать и относительно условий (4.2), (4.3). Тем самым имеем

Вывод 3. В случае пластин с одинаковым коэффициентом Пуассона рассматриваемая задача для пакета пластин в целом распадается на $(n - 1)$ самостоятельных задач для пластин E_1, E_2, \dots, E_{n-1} по отдельности, в которых реализуется напряженное состояние, определяемое комплексными потенциалами (2.1), где плотности $q_k(t)$ интегралов находятся из уравнения (4.1) и условий (4.2), (4.3).

В данном случае напряженное состояние в пластине E_k ($1 \leq k \leq n - 1$) складывается из следующих двух напряженных состояний:

1) постоянного во всей пластине напряженного состояния $\sigma = (\sigma)_k^\infty - (\sigma)_k^*$, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$, $\omega = \omega_k^\infty - \omega_k^*$, где $(\sigma)_k^*$, ω_k^* находятся по формулам (4.4).

2) напряженного состояния в одной отдельной пластине единичной толщины с тонкими жесткими остроугольным включениями вдоль линии L , на сторонах которых смещения равны нулю, а на ∞ действуют напряжения $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})_k^*$, вращение ω_k^* и сила P_k .

При этом коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) вблизи концов линии L в пластине E_k ($1 \leq k \leq n - 1$) совпадают с соответствующими второму напряженному состоянию КИН вблизи вершин тонких жестких остроугольных включений в одной отдельной пластине, а КИН в пластине E_n находятся согласно (3.3) из равенства

$$\sum_{j=1}^n h_j (k_1 - ik_2)_j = 0$$

Таким образом, в случае пластин с одинаковым коэффициентом Пуассона для нахождения КИН вблизи концов линии соединения пластин достаточно через исходные напряжения и вращения по формулам (4.4) найти новые напряжения и вращения и взять из имеющейся литературы соответствующие этим новым напряжениям и вращениям значения КИН вблизи вершин жестких остроугольных включений в одной отдельной пластине. Однако, если хотя бы одна из пластин имеет другой коэффициент Пуассона, чем остальные, то для нахождения КИН предварительно надо решить систему (2.5)–(2.7) и найти их по формулам (3.2).

Напряжения и вращение в пластине E_n согласно (2.1), (2.3) находятся через напряжения и вращение в пластинах E_1, E_2, \dots, E_{n-1} по формулам

$$(\sigma)_n = (\sigma)_n^\infty - h_n^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} h_k (\sigma - \sigma^\infty)_k, \quad \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$$

$$\omega_n = \omega_n^\infty - (h_n \mu_n)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} h_k \mu_k (\omega_k - \omega_k^\infty)$$

В частности, если все пластины одинаковы, т.е. все $\kappa_k = \kappa$, $\mu_k = \mu$, $h_k = h$, то матрица $A^{-1} = C = \|\delta_{kj} - 1/n\|$ и формулы (4.4) имеют вид

$$(\sigma)_k^* = (\sigma)_k^\infty - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\sigma)_j^\infty, \quad \omega_k^* = \omega_k^\infty - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_j^\infty \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Замечание. Если к точкам линии L соединения пластин приложены внешние усилия $(N + iT)_{\text{ext}} = 2q_0(t)$, расположенные в плоскостях пластин, то в правой части равенства (2.3) надо брать $q_0(t)$ и к функциям $f_k(t)$ и постоянным s_k в формулах (2.4) и (2.7) надо добавить еще слагаемые

$$\frac{1}{\pi i h_n} \int_L \left[\left(\frac{2}{\tau - t} + M_1(\tau, t) \right) q_0(\tau) d\tau + \frac{1}{\kappa_n} M_2(\tau, t) \overline{q_0(\tau)} d\tau \right]$$

$$\frac{1}{\pi i h_n} \int_L \left[2 \ln \left| \frac{\tau - t_j}{\tau - t_{j+1}} \right| q_0(\tau) d\tau + \frac{1}{\kappa_n} \left(\frac{\tau - t_j}{\bar{\tau} - \bar{t}_j} - \frac{\tau - t_{j+1}}{\bar{\tau} - \bar{t}_{j+1}} \right) \overline{q_k(\tau)} d\tau \right]$$

соответственно, после чего все результаты и выводы п.п. 2, 3 останутся в силе.

С помощью представлений (1.1) аналогично можно построить и исследовать систему сингулярных интегральных уравнений рассматриваемой задачи и в случае, когда все или некоторые кривые L_j – замкнутые, а также и для других типов многолистных поверхностей с криволинейными разрезами, в частности, для поверхностей, рассмотренных в работах [12–16]. Исследования в этом направлении продолжаются. Планируется также использование результатов данной работы для исследования многолистного композита, конструированного из разных пластин, описанным в п. 1 способом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 94-01-00207).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
2. Сильвестров В.В. Упругое взаимодействие двух тонких бесконечных пластин, соединенных вдоль отрезков прямой. Прикладная механика. 1991. Т. 27. № 9. С. 67–71.
3. Сильвестров В.В., Чекмарев Г.Е. Пакет тонких упругих пластин, соединенных вдоль коллинеарных отрезков. Исследования по краевым задачам и их приложениям. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 1992. С. 38–42.
4. Рыбаков Л.С., Лукашина Н.В. Плоская контактная задача о дискретном взаимодействии пластин. Деп. в ВИНТИ 24.10.80, № 4918–80 Деп. М., 1980. 14 с.
5. Рыбаков Л.С., Лукашина Н.В. Растяжение двух неограниченных пластин, соединенных между собой двумя параллельными периодическими рядами заклепок. Деп. в ВИНТИ 21.07.81, № 3645–81 Деп. М. 1981. 14 с.
6. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
7. Рыбаков Л.С., Лукашина Н.В. Равномерное растяжение симметричного пакета из трех пластин, скрепленных несколькими периодическими рядами заклепок. Деп. в ВИНТИ 16.05.88, № 3704–В88. М., 1988. 13 с.
8. Чекмарев Г.Е. Упругий изгиб пакета тонких пластин, соединенных вдоль коллинеарных отрезков. Деп. в ВИНТИ 26.05.92, № 1753–В92. Чебоксары, 1992. 10 с.
9. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
10. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
11. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стацук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
12. Сильвестров В.В., Чекмарев Г.Е. Напряженно-деформированное состояние одной многолистной конструкции. Краевые задачи и их приложения. Чебоксары: Изд-во Чувашск. ун-та, 1989. С. 109–114.
13. Сильвестров В.В. Основные задачи теории упругости на многолистной римановой поверхности. Изв. вузов. Математика. 1990. № 2. С. 89–92.
14. Сильвестров В.В. Об упругом напряженном и деформированном состоянии вблизи пространственной трещины на двулистной поверхности. ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 123–131.
15. Сильвестров В.В. Напряженно-деформированное состояние многолистной поверхности с разрезами. ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 493–499.
16. Сильвестров В.В. Напряженно-деформированное состояние многолистных пластинчатых конструкций. Изв. АН. МТТ СССР. 1992. № 2. С. 124–135.

Чебоксары

Поступила в редакцию
10.И.1995