МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997

УДК 539.3

© 1997 г. С.А. АМБАРЦУМЯН

ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ НЕСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

При рассмотрении задач изгиба тонких тел типа оболочек и пластин, изготовленных из поликристаллических материалов, высоких полимеров или из зерновых материалов, возникают проблемы учета моментных напряжений (моменты на единицу площади).

Трехмерный подход к решению этой проблемы приводит к весьма громоздким и необозримым результатам. Здесь делается попытка сведения этой трехмерной задачи к двумерной задаче изгиба пластинки: это реализуется путем симбиоза теории несимметричной упругости [1–6] с исходными положениями уточненной теории оболочек и пластин [7, 8]. Такое сочетание теорий представляется естественным, так как уточненная теория оболочек и пластин уже содержит некоторые элементы теории несимметричной упругости, в частности повороты и искривления нормальных элементов.

1. Приведем исходные уравнения и соотношения теории несимметричной упругости, которые будут использованы ниже [2, 6].

Уравнения движения

$$\sigma_{ji,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \tag{1.1}$$

$$\in_{ijk} \sigma_{ji} + \mu_{ji,j} + Y_i = J\ddot{\omega}_i \tag{1.2}$$

где σ_{ji} и μ_{ji} – тензоры силовых и моментных напряжений, X_i и Y_i – составляющие массовых сил и массовых моментов, u_i и ω_i – составляющие перемещения и поворота, ρ – плотность, J – динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении), $\in_{ijk}$ – тензор Леви – Чивиты ($\in_{123} = \in_{231} = \in_{312} = 1$, $\in_{213} = \in_{132} = \in_{321} = -1$, $\in_{iik} = 0$). Полагая, что $\mathbf{p}_i(\mathbf{n})$ и $m_i(\mathbf{n})$ являются составляющими сил и моментов, действующих на внешней поверхности с вектором нормали $\mathbf{n}$, получим следующие условия на поверхности

$$p_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ji} n_j, \qquad m_i(\mathbf{n}) = \mu_{ji} n_j \tag{1.3}$$

Если на поверхности A заданы перемещения и повороты, то граничные условия примут вид [2, 6]:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\,(x_i), \quad \boldsymbol{\omega} = g(x_i) \quad x \in A \tag{1.4}$$

Свободная энергия представляется следующим образом:

$$F = \frac{\mu+\alpha}{2}\gamma_{ji}\gamma_{ji} + \frac{\mu-\alpha}{2}\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{\lambda}{2}\gamma_{kk}\gamma_{nn} + \frac{\gamma+\varepsilon}{2}\varkappa_{ji}\varkappa_{ji} +$$

$$+ \frac{\gamma-\varepsilon}{2}\varkappa_{ji}\varkappa_{ij} + \frac{\beta}{2}\varkappa_{kk}\varkappa_{nn} \tag{1.5}$$

Отсюда для напряжений найдем следующие определяющие уравнения:

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij} \tag{1.6}$$

$$\mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\varkappa_{ij} + \beta\varkappa_{kk}\delta_{ij} \tag{1.7}$$

Здесь μ и λ – постоянные Ламе, α, γ, ε, β – четыре новые упругие постоянные изотропной среды, а для несимметричного тензора деформаций γ_{ji} и тензора изгиба – кручения $\varkappa_{ij}$ имеем

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \in_{kji}\omega_k, \quad \varkappa_{ji} = \omega_{ij} \tag{1.8}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$, $i = k$, $\delta_{ik} = 0$, $k \neq i$).

Отметим, что в общей теории несимметричной упругости вектор малого поворота $\mathbf{w}$ кинематически не зависит от вектора перемещения $\mathbf{u}$.

Некоторые авторы, например [4, 5], считают справедливым кинематическую гипотезу $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}$ (псевдоконтинуум Косера), а также, что кривизны $\varkappa_{ji}$ пропорциональны соответствующим моментным напряжениям. В этом случае число новых упругих постоянных уменьшается в 2 раза [5]. Для этих постоянных вводятся достаточно удобные обозначения:

$$(\gamma+\varepsilon) = 4\mu l^2, \quad (\gamma-\varepsilon) = 4\mu\eta l^2, \quad \eta = \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon} \tag{1.9}$$

где l – характерный размер материала, η – безразмерная величина типа коэффициента Пуассона.

Укажем, что для положительной определенности упругого потенциала наряду с известными неравенствами $\mu \geqslant 0$, $0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5$ необходимо также, чтобы характерный размер $l = [(\gamma+\varepsilon)/4\mu]^{1/2}$ был бы вещественным, а величина η должна быть в пределах $-1 < \eta < 1$ [5].

2. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h в декартовой системе координат x_i. Срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью $x_3 = 0$, т.е. $-h/2 \leqslant x_3 \leqslant h/2$. Пластинка загружена лишь поверхностными силами с интенсивностью Z^+ и Z^-, так что условия на поверхности имеют вид $\sigma_{33} = Z^+$ при $x_3 = h/2$, $\sigma_{33} = -Z^-$ при $x_3 = -h/2$:

$$\sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h/2$$

$$\mu_{33} = 0, \quad \mu_{31} = 0, \quad \mu_{32} = 0 \quad \text{при} \quad x_3 = \pm h/2 \tag{2.1}$$

В основу приведения трехмерной задачи теории несимметричной упругости k двумерной теории пластин, положены следующие гипотезы:

а) нормальные к срединной плоскости пластинки перемещения U_3 не зависят от координаты x_3;

б) касательные напряжения σ_{31} и σ_{32} по толщине пластинки меняются по заданному закону;

в) компоненты поворота ω_i имеют структуру соответствующих поворотов, определенных по уточненной теории пластин;

г) напряжение σ_{33} играет второстепенную роль и может быть пренебрежен в соответствующих уравнениях состояния;

д) напряжения σ_{33}, μ_{31} и μ_{32} могут быть определены из уравнений равновесия.

Эти гипотезы, за исключением *в*) и частично *д*), совпадают с соответствующими предположениями уточненной теории пластин [7, 8].

Согласно принятым гипотезам, имеем

$$\gamma_{33} = \partial u_3 / \partial x_3 \approx 0, \quad u_3 = w(x_1, x_2) \tag{2.2}$$

где $w(x_1, x_2)$ – искомая функция – нормальное перемещение срединной плоскости

$$\sigma_{31} = f(x_3)\varphi_1(x_1,\ x_2), \quad \sigma_{32} = f(x_3)\varphi_2(x_1,\ x_2) \tag{2.3}$$

где $\varphi_i(x_1, x_2)$ – искомые функции, представляющие поперечные сдвигающиеся напряжения, $f(x_3) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}n^2 - x_3^2)$ – закон распределения касательных напряжений по толщине пластинки, обеспечивающей удовлетворение условий (2.1):

$$\omega_1 = \frac{\partial w}{\partial x_2} - f\psi_1(x_1,\ x_2), \quad \omega_2 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} + f\psi_2(x_1,\ x_2) \tag{2.4}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + I_0(x_3)\psi_3(x_1,\ x_2)$$

$$I_0(x_3) = \int\limits_0^{x_3} f\,dx_3 = \frac{x_3}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{x_3^2}{3}\right) \tag{2.5}$$

где $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$ – искомые тангенциальные перемещения срединной плоскости, $\psi_i(x_1, x_2)$ – искомые функции, характеризующие повороты.

Согласно гипотезе *в*), а также (1.6), (1.8), (2.2) – (2.4), имеем

$$f\varphi_1 = (\mu + \alpha)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} - d\psi_2\right) + (\mu - \alpha)f\psi_2$$

$$f\varphi_2 = (\mu + \alpha)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} - d\psi_1\right) + (\mu - \alpha)f\psi_1$$

откуда для тангенциальных перемещений какой-либо точки пластинки получим

$$\begin{aligned} u_1 &= u - x_3\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{I_0}{\mu + \alpha}\varphi_1 + I_0\frac{2\alpha}{\mu + \alpha}\psi_2 \\ u_2 &= v - x_3\frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{I_0}{\mu + \alpha}\varphi_2 + I_0\frac{2\alpha}{\mu + \alpha}\psi_1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Формулы (2.6) показывают, что тангенциальные перемещения u_i в общем случае зависят от x_3 нелинейно и содержат также члены, зависящие от поворота.

Из системы уравнений (1.6), корректно пренебрегая σ_{33}, с помощью (1.8), (2.2), (2.4), (2.6), для расчетных нормальных напряжений получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= B\frac{\partial u}{\partial x_1} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial x_2} - x_3\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \\ &+ \frac{I_0}{\mu + \alpha}\left[B\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + B_{12}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + 2\alpha\left(B\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + B_{12}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right)\right] \\ \sigma_{22} &= B\frac{\partial v}{\partial x_2} + B_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1} - x_3\left(B\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) + \\ &+ \frac{I_0}{\mu + \alpha}\left[B\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + B_{12}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + 2\alpha\left(B\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + B_{12}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right)\right] \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$B = E/(1 - \nu^2), \quad B_{12} = \nu E/(1 - \nu^2)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Для силовых касательных напряжений наряду с (2.3) получим

$$\sigma_{12}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-2x_3\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-2I_0\alpha\psi_3+$$

$$+I_0\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+2\alpha\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\right]$$

$$\sigma_{21}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)-2x_3\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+2I_0\alpha\psi_3+ \tag{2.8}$$

$$+I_0\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+2\alpha\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)\right]$$

$$\sigma_{13}=f\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2\right)$$

$$\sigma_{23}=f\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_2+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right) \tag{2.9}$$

Рассматривая формулы (2.3), (2.8), (2.9), замечаем, что $\sigma_{ij}\neq\sigma_{ji}$.

Напряжение σ_{33} определим из третьего уравнения равновесия (1.1):

$$\partial\sigma_{33}/\partial x_3+\partial\sigma_{13}/\partial x_1+\partial\sigma_{23}/\partial x_2=0 \tag{2.10}$$

Из (2.9), подставляя значения σ_{i3} в (2.10), интегрируя полученное уравнение с учетом условий на плоскостях $x_3=\pm h/2$ (2.1), для нормального напряжения σ_{33} получим

$$\sigma_{33}=-I_0\left[\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)\right]+\frac{z^+-z^-}{2} \tag{2.11}$$

а также одно из уравнений равновесия

$$\frac{h^3}{12}\left[\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right)+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)\right]=-Z \tag{2.12}$$

$$Z=Z^++Z^- \tag{2.13}$$

Из (1.7) согласно (1.8), (2.4) для моментных напряжений получим

$$\mu_{11}=2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}-f\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\beta\left(\psi_3+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\right]$$

$$\mu_{22}=-2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}+f\left[(2\gamma+\beta)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}+\beta\left(\psi_3-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right)\right] \tag{2.14}$$

$$\mu_{12}=-(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+f\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right]$$

$$\mu_{21}=(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-f\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}-(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right] \tag{2.15}$$

$$\mu_{13}=\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\left(\frac{\delta^2 v}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)+I_0(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+x_3(\gamma-\varepsilon)\psi_1 \tag{2.16}$$

$$\mu_{23}=\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\left(\frac{\delta^2 v}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+I_0(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}-x_3(\gamma-\varepsilon)\psi_2$$

$$\mu_{33}=f\left[(2\gamma+\beta)\psi_3-\beta\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\right] \tag{2.17}$$

Моментное напряжение μ_{33} удовлетворяет условиям на поверхности (2.1).

При необходимости напряжения μ_{31} и μ_{32} могут быть определены из первых двух уравнений равновесия (1.2) с учетом условий (2.1) на плоскостях $x_3=\pm h/2$:

$$\sigma_{23}-\sigma_{32}+\frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_3}=0 \tag{2.18}$$

$$\sigma_{31}-\sigma_{13}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}=0$$

Подставляя в (2.18) значения напряжений из (2.3), (2.9), (2.14) и (2.15), интегрируя полученные уравнения по x_3 и удовлетворяя условиям (2.1), получим

$$\mu_{31}=I_0\left[\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_2-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1+(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}+\right.$$
$$\left.+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}-\beta\frac{\partial\psi_3}{x_1}\right]-x_3(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\partial x_2}\right) \tag{2.19}$$

$$\sigma_{32}=I_0\left[\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2+(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}-\right.$$
$$\left.-(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}\right]+x_3(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)$$

а также следующие уравнения равновесия:

$$\frac{h^3}{12}\left[\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_2-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1+(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}+\right.$$
$$\left.+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}-\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}\right]-h(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2\partial x_2}\right)=0$$

$$\frac{h^3}{12}\left[\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2+(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}+\right. \tag{2.20}$$
$$\left.+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}\right]-h(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)=0$$

Напряжения μ_{3i} равны нулю не только на плоскостях $x_3=\pm h/2$, но и в срединной плоскости $x_3=0$. Они по толщине пластинки меняют знак.

3. Приведенным выше напряжениям соответствуют эквивалентные им внутренние условия и моменты, действующие на единице длины координатных линий срединной плоскости [7, 8]. В частности, имеем

$$T_{11} = hB\frac{\partial u}{\partial x_1} + hB_{12}\frac{\partial v}{\partial x_2}, \qquad T_{22} = hB\frac{\partial v}{\partial x_2} + hB_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}$$

$$S_{12} = S_{21} = h\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \tag{3.1}$$

Получили значения тангенциальных сил, которые не отличаются от соответствующих величин классической теории [10].

Для поперечных усилий имеем

$$N_{13} = \frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2\right)$$

$$N_{23} = \frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_2 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right) \tag{3.2}$$

Здесь наряду с членами уточненной теории [7, 8] имеем также новые члены, представляющие повороты ω_1 и ω_2. Та же картина наблюдается и в моментах

$$M_{11} = -\frac{h^3 B}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) + \frac{h^5 B}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) +$$
$$+\frac{h^5 2\alpha B}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \nu\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right)$$

$$M_{22} = -\frac{h^3 B}{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right) + \frac{h^5 B}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right) +$$
$$+\frac{h^5 2\alpha B}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \nu\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}\right) \tag{3.3}$$

$$H_{12} = -\frac{h^3}{12}2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{h^5 2\alpha}{120}\psi_3 + \frac{h^5}{120}\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} +\right.$$
$$\left.+2\alpha\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right)\right]$$

$$H_{21} = -\frac{h^3}{12}2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{h^5 2\alpha}{120}\psi_3 + \frac{h^5}{120}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} +\right.$$
$$\left.+2\alpha\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\right)\right] \tag{3.4}$$

Моментным напряжениям эквивалентны следующие суммарные моменты и отличные от нуля гипермоменты:

$$P_{11} = h2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{h^3}{12}(2\gamma+\beta)\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{h^3}{12}\beta\left(\psi_3 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right) \tag{3.5}$$

$$P_{22} = -h2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{h^3}{12}(2\gamma+\beta)\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \frac{h^3}{12}\beta\left(\psi_3 - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right)$$

$$R_{12}=-h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+h(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{h^3}{12}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\frac{h^3}{12}(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}$$

$$R_{21}=h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-h(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{h^3}{12}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\frac{h^3}{12}(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \tag{3.6}$$

$$Q_{13}=h\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)$$

$$Q_{23}=h\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \tag{3.7}$$

$$G_{13}=\frac{h^5}{120}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}+\frac{h^3}{12}(\gamma+\varepsilon)\psi_1$$

$$G_{23}=\frac{h^5}{120}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}+\frac{h^3}{12}(\gamma-\varepsilon)\psi_2 \tag{3.8}$$

4. Исходя из (1.1), (1.2), (2.3), (2.4), (2.6), путем известной процедуры [7, 8] построим срединные дифференциальные уравнения движения пластинки.

Проинтегрировав первые два уравнения (1.1) и третье уравнение (1.2) по x_3, в пределах от $x_3=-h/2$ до $x_3=h/2$, получим следующие три уравнения плоской задачи:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}=h\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}=h\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2}=\frac{h}{2}J\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial x_2\partial t^2}\right) \tag{4.1}$$

Подставив значения внутренних усилий и моментов из (3.1) и (3.7) в (4.1), запишем следующую систему дифференциальных уравнений плоской задачи, относительно тангенциальных перемещений:

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+(B_{12}+\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$B\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+(B_{12}+\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=\frac{J}{\gamma+\varepsilon}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{\partial^3 u}{\partial x_2\partial t^2}\right) \tag{4.3}$$

Таким образом, получены уравнения плоской задачи (4.2), однако искомые перемещения u, v, как и следовало ожидать [6], в задачах несимметричной упругости связаны дополнительным уравнением (4.3). В последующем плоская задача для пластинки не будет рассматриваться. Остальные осредненные уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-Z+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial H_{21}}{\partial x_2}-\frac{h^3}{12}\varphi_1=-\frac{h^3}{12}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}+\frac{h^5}{120}\frac{\rho}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right) \tag{4.5}$$

$$\frac{M_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial H_{12}}{\partial x_1}-\frac{h^3}{12}\varphi_2=-\frac{h^3}{12}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}+\frac{h^5}{120}\frac{\rho}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{h^3}{12}\left(\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_2-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right)-\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial R_{21}}{\partial x_2}=-hJ\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}+\frac{h^3}{12}J\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{h^3}{12}\left(\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1-\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2\right)-\frac{\partial P_{22}}{\partial x_2}-\frac{\partial R_{12}}{\partial x_1}=-hJ\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}+\frac{h^3}{12}J\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} \tag{4.6}$$

$$H_{12}-H_{21}+\frac{\partial G_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial G_{23}}{\partial x_2}-\frac{h^3}{12}\left[(2\gamma+\beta)\psi_3-\beta\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\right]=\frac{h^5}{120}J\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{4.7}$$

Как видно из (3.2)–(3.8), все внутренние усилия и моменты изгибаемой пластинки выражаются через нормальное перемещение $w(x_1, x_2)$ функции поперечного сдвига $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ и функции, представляющие повороты $\psi_i(x_1, x_2)$. Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (3.2)–(3.8) в уравнения (4.4)–(4.7), получим систему из шести дифференциальных уравнений движения пластинки в шести искомых функциях w, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, ψ_3.

Ввиду элементарности этих подстановок и громоздкости получаемых при этом уравнений их здесь не приводим. Однако приводим их для случая, когда $\alpha = 0$ [2], так как общие уравнения в этом случае имеют некоторые особенности. Полагая $\alpha = 0$, получим следующие уравнения:

$$B\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}+(B_{12}+2\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{h^2}{10}\left(\frac{B}{\mu}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_2^2}+\frac{B_{12}+\mu}{\mu}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\varphi_1=$$

$$=\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{h^2\rho}{10\mu}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} \tag{4.8}$$

$$B\frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3}+(B_{12}+2\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial x_1^2}-\frac{h^2}{10}\left(\frac{B}{\mu}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1^2}+\frac{B_{12}+\mu}{\mu}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)+\varphi_2=$$

$$=\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2}-\frac{h^2\rho}{10\mu}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=-\frac{12}{h^3}Z+\frac{12}{h^3}\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{4.10}$$

$$(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_2^2}-(\gamma-\varepsilon+\beta)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}-\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}-$$

$$-\frac{12}{h^2}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)=J\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}-J\frac{12}{h^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2} \tag{4.11}$$

$$(2\gamma+\beta)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}-(\gamma-\varepsilon+\beta)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x_2}-$$

$$-\frac{12}{h^2}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)=-J\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}+J\frac{12}{h^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x_2\partial t^2} \tag{4.12}$$

$$\frac{h^2}{10}(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x_2^2}\right)+(\gamma-\varepsilon+\beta)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)-(2\gamma+\beta)\psi_3=J\frac{h^2}{10}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial t^2} \tag{4.13}$$

Как легко заметить, в этом случае общая система уравнений движения разделяется на две подсистемы. Первая подсистема (4.8)–(4.10) совпадает с системой уравнений уточненной теории [7, 8]. Вторая подсистема (4.11)–(4.13) в целом происходит от моментных напряжений и естественным образом связана с "классической" подсистемой граничными условиями и искомой $w(x_1, x_2, t)$. В этом случае имеем дело с некоторым псевдоконтинуумом Коссера.

5. Искомые функции должны удовлетворять как системе из шести дифференциальных уравнений, так и граничным условиям на торцах пластинки.

Пусть край пластинки проходит вдоль координатной линии $x_1 = 0$. Известно, что однородные граничные условия в случае трехмерной задачи могут быть сформулированы следующим образом:

свободный край:

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \mu_{11} = 0, \quad \mu_{12} = 0, \quad \mu_{13} = 0 \tag{5.1}$$

заделанный край

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0 \tag{5.2}$$

шарнирно опертый край

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad u_3 = 0, \quad \mu_{11} = 0, \quad \mu_{12} = 0, \quad \mu_{13} = 0 \tag{5.3}$$

Очевидно, возможны и другие непротиворечащие комбинации граничных условий [7, 8, 10].

В предлагаемой здесь теории граничные условия (5.1)–(5.3) не могут быть удовлетворены точно, т.е. в каждой точке соответствующего краевого-торцевого сечения. Принятые нами исходные предположения и гипотезы, естественно, ставят определенные ограничения на сформулированные граничные условия. Здесь ограничимся удовлетворением "смягченных" осредненных граничных условий:

свободный край. Согласно (3.3)–(3.8), вместо (5.1) имеем

$$M_{11} = 0, \quad H_{12} = 0, \quad N_{13} = 0, \quad P_{11} = 0, \quad R_{12} = 0, \quad G_{13} = 0 \tag{5.4}$$

заделанный край. Предполагается, что условия (5.2) выполняются лишь для $x_3 = \pm c$ $(0 \leqslant c \leqslant h/2)$. В силу (2.4), (2.5), (2.6) вместо (5.2) имеем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - c^2\right)\psi_2 = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - c^2\right)\psi_1 = 0 \\
\frac{\partial w}{\partial x_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{c^2}{3}\right)\frac{1}{\mu + \alpha}(\varphi_1 + 2\alpha\psi_2) = 0, \qquad w = 0 \\
\frac{\partial w}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{c^2}{3}\right)\frac{1}{\mu + \alpha}(\varphi_2 + 2\alpha\psi_1) = 0, \qquad \psi_3 = 0
\end{gathered} \tag{5.5}$$

шарнирно опертый край. Согласно (3.3)–(3.8), вместо (5.3) имеем

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad H_{12} = 0, \quad P_{11} = 0, \quad R_{12} = 0, \quad G_{13} = 0 \tag{5.6}$$

Иные граничные условия здесь не рассматриваются.

6. Рассмотрим одномерную задачу. Пусть все искомые функции и расчетные величины зависят от координаты x_1. Тогда вместо шести уравнений движения будем иметь следующую систему из трех дифференциальных уравнений, относительно трех искомых функций $w(x_1)$, $\varphi_1(x_1)$ и $\psi_2(x_1)$, через которые представляются все напряжения, внутренние усилия и моменты пластинки:

$$\frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)=-Z(x_1)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{6.1}$$

$$B\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^3}-\frac{h^2}{10}\frac{B}{\mu+\alpha}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2}-\frac{h^2}{10}\frac{2\alpha B}{\mu+\alpha}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}+\varphi_1=$$

$$=\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_1\partial t^2}-\frac{h^2}{10}\frac{\rho}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right)$$

$$h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3}-\frac{h^3}{12}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}+\frac{h^3}{12}\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2-\frac{h^3}{12}\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1=\frac{h^3}{12}J\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}$$

В этом случае для отличных от нуля внутренних усилий и моментов имеем

$$M_{11}=-\frac{Bh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{h^5 B}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+2\alpha\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right) \tag{6.2}$$

$$M_{22}=-\frac{B_{12}h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{h^5 B_{12}}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+2\alpha\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)$$

$$N_{13}=\frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2\right) \tag{6.3}$$

$$R_{12}=-h(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{h^3}{12}(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}$$

$$R_{21}=-h(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{h^3}{12}(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \tag{6.4}$$

$$G_{23}=-\tfrac{1}{12}h^3(\gamma-\varepsilon)\psi_2 \tag{6.5}$$

а эквивалентные им напряжения запишутся следующим образом:

$$\sigma_{11}=-x_3 B\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+I_0\frac{B}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+2\alpha\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)$$

$$\sigma_{22}=B_{12}\sigma_{11}/B \tag{6.6}$$

$$\sigma_{13}=f\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2\right) \tag{6.7}$$

$$\mu_{12}=-(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+f(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \tag{6.8}$$

$$\mu_{21}=\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\mu_{12},\quad \mu_{23}=-x_3(\gamma-\varepsilon)\psi_2 \tag{6.9}$$

Кроме этих напряжений мы имеем также отличное от нуля силовое направление σ_{33}

и моментное напряжение μ_{32}, которые были определены из уравнений равновесия

$$\sigma_{33} = -I_0\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right) + \frac{Z^+ - Z^-}{2} \tag{6.10}$$

$$\mu_{32} = -I_0\left[\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1 - \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_2 + (\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1^2}\right] + x_3(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} \tag{6.11}$$

Таким образом, имеются все уравнения и формулы для рассмотрения различных задач изгиба, устойчивости и колебаний пластин.

7. Рассмотрим модельную задачу цилиндрического изгиба пластинки-полосы ($0 \leqslant x_1 \leqslant L$), загруженной распределенной по всей пластинке нагрузкой с интенсивностью $Z = q\sin\lambda x_1$, где $\lambda = \pi/L$. Пусть пластинка шарнирно оперта по длинным сторонам $x_1 = 0$, $x_1 = L$.

Полагая

$$w = C_w \sin\lambda x_1, \quad \varphi_1 = C_\varphi \cos\lambda x_1, \quad \psi_2 = C_\psi \cos\lambda x_1 \tag{7.1}$$

удовлетворяем условиям шарнирного опирания ($M_{11} = 0$, $R_{12} = 0$, $w = 0$ при $x_1 = 0, L$), а из системы основных уравнений (6.1) после соответствующих подстановок и серии преобразований для искомых коэффициентов C_k получим

$$\begin{aligned}
&C_w = \frac{\Delta_5}{\Delta_3\Delta_6 - \Delta_2\Delta_5}\frac{12q}{h^3\lambda}\\
&C_\varphi = \left(\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha} - \frac{\Delta_6}{\Delta_3\Delta_6 - \Delta_2\Delta_5}\frac{4\mu\alpha}{\mu-\alpha}\right)\frac{12q}{h^3\lambda}\\
&C_\psi = \frac{\Delta_6}{\Delta_3\Delta_6 - \Delta_2\Delta_5}\frac{12}{h^3\lambda}\\
&\Delta_1 = 1 + \frac{h^2\lambda^2}{10}\frac{B}{\mu+\alpha}, \quad \Delta_4 = (\gamma+\varepsilon)\lambda^2 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\\
&\Delta_2 = \frac{12\lambda^3}{h^2}\frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu-\alpha)}{2\alpha}, \quad \Delta_3 = \frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu-\alpha)}{2\alpha}\lambda^2 + 2\mu\\
&\Delta_5 = \frac{\mu+\alpha}{2\alpha}\Delta_1\Delta_4 + \frac{h^2}{10}\frac{2\alpha B}{\mu+\alpha}\lambda^2\\
&\Delta_6 = B\lambda^3 + \frac{12\lambda^3}{h^2}\frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{2\alpha}\Delta_1
\end{aligned} \tag{7.2}$$

На конкретных примерах, не ограничивающих общности рассуждений, проследим влияния новых упругих постоянных на напряженно-деформированное состояние пластинки.

Пусть имеем $h/L = 1/\pi$, $\mu = 0{,}4B$, $\alpha = 0{,}04B$, $\gamma + \varepsilon = 4\mu l^2 = 1{,}6Bl^2$, $\gamma - \varepsilon = 1{,}6Bl^2\eta$. Весьма важным является отношение характерного размера материала l к абсолютной толщине пластинки h, т.е. к характерному геометрическому размеру.

Пусть $l = 0{,}05$ см, $h = 0{,}5$ см, т.е. $l/h = 0{,}1$. В этом случае для искомых коэффициентов C_k получим

$$C_w = 1{,}0604\frac{12qh}{B}, \quad \overline{C}_w = 1{,}25\frac{12qh}{B}, \quad C_\varphi = 0{,}8317\frac{12q}{h^2}$$

$$\overline{C}_\varphi = \frac{12q}{h^2}, \quad C_\psi = 2{,}1968\frac{12q}{Bh^2}, \quad \overline{C}_\psi \equiv 0$$

Черточкой обозначены соответствующие коэффициенты, определенные по уточненной теории [7, 8]. Сравнивая эти результаты, замечаем, что они расходятся на ~18–20% (конечно, за исключением C_ψ).

Пусть теперь $l = 0{,}05$ см, $h = 0{,}25$ см, $l/h = 0{,}2$, т.е. удельный вес характерного размера материала увеличен в 2 раза. В этом случае $C_w = 0{,}8047(12qh/B)$, $C_\varphi = 0{,}6043(12q/h^2)$, $C_\psi = 3{,}4744(12q/Bh^2)$.

Очевидно, что коэффициенты, найденные по уточненной теории, остаются неизменными. Как нетрудно заметить, в этом случае расхождения существенно увеличиваются, достигая 55–65%.

Отметим, что изменение относительной толщины пластинки, существенно влияя на абсолютные значения коэффициентов (h/L), незначительно влияет и на процент расхождения значений расчетных коэффициентов двух сравниваемых теорий. В частности, уменьшая h/L в 3 раза, т.е. полагая, что $h/L = 1/(3\pi)$, для рассмотренного выше первого случая ($l = 0{,}05$ см, $h = 0{,}5$ см) получим

$$C_w = 69{,}95\frac{12qh}{B}, \quad \overline{C}_w = 83{,}25\frac{12qh}{B}, \quad C_\varphi = 2{,}5141\frac{12q}{h^2}$$

$$\overline{C}_\varphi = 3{,}0\frac{12q}{h^2}, \quad C_\psi = 6{,}4808\frac{12q}{Bh^2}, \quad \overline{C}_\psi \equiv 0$$

Сравнивая эти результаты, замечаем, что и в этом случае расхождение составляет ~19%, что ничтожно мало отличается от случая толстой пластинки.

Для полноты картины приведем еще и значения некоторых расчетных величин задачи в случае, когда $h/L = 1/(3\pi)$, $l = 0{,}05$ см, $h = 0{,}5$ см, $\mu = 0{,}4B$, $\alpha = 0{,}04B$, $\gamma + \varepsilon = 1{,}6Bl^2$, $\gamma - \varepsilon = 1{,}6Bl^2\eta$, $\eta = 0{,}25$:

$$w = 69{,}95\frac{12qh}{B}\sin\lambda x_1, \quad \overline{w} = 83{,}25\frac{12qh}{B}\sin\lambda x_1$$

$$\varphi_1 = 2{,}514\frac{12q}{h^2}\cos\lambda x_1, \quad \overline{\varphi}_1 = 3\frac{12q}{h^2}\cos\lambda x_1$$

$$\psi_2 = 6{,}481\frac{12q}{Bh^2}\cos\lambda x_1, \quad \overline{\psi}_2 \equiv 0$$

$$N_{12} = 3qh\cos\lambda x_1, \quad \overline{N}_{13} = 3qh\cos\lambda x_1$$

$$M_{11} = 7{,}543qh^2\sin\lambda x_1, \quad \overline{M}_{11} = 9qh^2\sin\lambda x_1$$

$$M_{22} = 1{,}508qh^2\sin\lambda x_1, \quad \overline{M}_{22} = 1{,}8qh^2\sin\lambda x_1$$

$$R_{12} = 1{,}458qh^2\sin\lambda x_1, \quad \overline{R}_{12} = 0$$

$$R_{21} = 0{,}364qh^2\sin\lambda x_1, \quad \overline{R}_{21} = 0$$

$$G_{23} = -0{,}0259qh^3\cos\lambda x_1, \quad \overline{G}_{23} = 0$$

Справа приводятся значения тех же расчетных величин, определенных по уточненной теории [7, 8]. Они отмечены чертой сверху.

Рассматривая формулы (6.2)–(6.9), замечаем, что в данной задаче, изменение нового коэффициента упругости η может внести существенные изменения лишь в расчетные величины, происходящие от учета моментных напряжений. Как нетрудно заметить, значения этих величин прямо пропорциональны η.

Наконец, проанализируем влияние коэффициента упругости α на расчетные величины рассмотренной здесь задачи. Пусть имеем $h/L = 1/\pi$, $\mu = 0{,}4B$, $\gamma + \varepsilon = 1{,}6Bl^2$, $\gamma - \varepsilon = 1{,}6Bl^2\eta$, $l = 0{,}05$, $h = 0{,}5$. Для α берем четыре варианта: $\alpha = 0{,}02B$, $\alpha = 0{,}04B$, $\alpha = 0{,}2B$, $\alpha = 0{,}38B$. Случай $\alpha = 0$, как было указано выше, – особый случай, когда по существу имеем дело с псевдоконтинуумом Коссера [2, 6], с явной симметрией касательных напряжений, т.е. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Этот случай здесь не обсуждается.

В результате вычислений получим

α	$C_w \dfrac{B\lambda}{12q}$	$C_\varphi \dfrac{h^3\lambda}{12q}$	$C_\psi \dfrac{h^3\lambda B}{12q}$
0,02B	1,0756	0,8434	3,1111
0,04B	1,0604	0,8317	2,1968
0,2B	1,0481	0,8205	1,3622
0,38B	1,0466	0,8150	1,2561

Далее с помощью этих расчетов и формул (6.2)–(6.5), (7.1), (7.2) получим

α	$M_{11}/(qh^2)$	$N_{13}/(qh)$	$R_{12}/(qh^2)$	$-G_{23}/(qh^3\eta)$
0,02B	0,8452	1,0000	0,1567	0,0498
0,04B	0,8322	1,0000	0,1685	0,0352
0,2B	0,8205	1,0000	0,1794	0,0218
0,38B	0,8197	1,0000	0,1808	0,0201

Рассматривая приведенные результаты, замечаем, что существенное изменение упругого параметра α незначительно влияет на основные – классические расчетные величины задачи. Упругий коэффициент α существенно влияет на расчетные величины нового – моментного происхождения.

Предложенная двумерная теория изгиба пластин поможет эффективно решить некоторые специфичные задачи прочности, устойчивости и колебаний пластин из специфичных композиционных материалов. Она поможет также путем корректного анализа соответствующих экспериментов определить новые упругие постоянные несимметричной теории упругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cosserat E., Cosserat F.* Theorie des corps déformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
2. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 401–408.
3. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. № 7. С. 1399–1409.
4. *Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф.* Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1964. № 4. С. 80–114.
5. *Койтер В.Т.* Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1965. № 3. С. 89–112.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446 с.
8. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.
9. *Миндлин Р.Д.* Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1964. № 4. С. 115–128.
10. *Гольденвейзер А.А.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

Ереван

Поступила в редакцию
13.IX.1995