**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997**

УДК 534.1

© 1997 г. **В.Г. ОРЕШНИКОВ**

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Предлагается метод построения периодических решений неоднородных нелинейных систем, основанный на использовании итерационной схемы с существенно нелинейным оператором специального вида, который эффективно обращается на каждом шаге итераций. Приводятся примеры применения метода к нелинейным неоднородным системам второго порядка, для которых находятся периодические решения с учетом высших гармоник.

В работе предлагается метод построения периодических решений неоднородных нелинейных систем. Суть метода излагается применительно к скалярному нелинейному дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(y)\frac{d^i y}{dt^i} = f \tag{1}$$

где $y = y(t)$ – искомая функция, $a_i(y)$ – полиномы по степеням $y, f = F_m \sin \omega t$ – внешнее воздействие с частотой ω и амплитудой F_m.

Уравнение (1) записывается в операторном виде

$$Ay = f \tag{2}$$

где A – нелинейный оператор, определяемый левой частью уравнения (1).

Будем искать решение операторного уравнения (2) при помощи итерационной схемы

$$By_{k+1} - By_k + Ay_k = f \tag{3}$$

Здесь $y_k = y_k(t)$ $(k = 1, 2, 3,\ldots)$ – последовательные приближения для решения $y(t)$, имеющие вид

$$y_k = \sum_{m=1}^{k} Y_{mk} \sin(m\omega t + \varphi_{mk})$$

где Y_{mk} – амплитуды, φ_{mk} – начальные фазы, подлежащие определению, B – нелинейный оператор, определяемый соотношениями

$$By_k = \sum_{i=0}^{n} a_i(Y_k)\frac{d^i y_k}{dt^i}, \quad Y_k = \sqrt{\sum_{m=1}^{k} Y_{mk}^2}$$

Оператор A левой части уравнения (1) имеет форму

$$Ay_k = \sum_{i=0}^{n} a_i(y_k)\frac{d^i y_k}{dt^i}$$

Разность между двумя соседними приближениями y_{k+1} и y_k определяется через расстояние (норму) [1]:

$$||y_{k+1}-y_k||=\left[\sum_{m+1}^{k+1}(Y_{mk+1}-Y_{mk})^2\right]^{1/2}$$

Таким образом, последовательные приближения сходятся, если $||y_{k+1}-y_k|| \to 0$ при $k \to \infty$, для чего необходимо выполнение условий $|Y_{mk+1}-Y_{mk}| \to 0$ при $k \to \infty$.

Сходимость предложенного алгоритма может быть доказана при помощи методов, изложенных в [2].

Итерационный процесс (3) начинается с определения первого приближения $y_1 = Y_{11}\sin(\omega t+\varphi_{11})$. Для нахождения амплитуды Y_{11} и фазы φ_{11} получаем уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(Y_{11})\frac{d^i y_1}{dt^i}=f$$

Второе приближение ищется в форме

$$y_2=Y_{12}\sin(\omega t+\varphi_{12})+Y_{22}\sin(2\omega t+\varphi_{22})$$

Для определения амплитуд Y_{12}, Y_{22} и фаз φ_{12}, φ_{22} записываем уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(Y_2)\frac{d^i y_2}{dt^i}-\sum_{i=0}^{n} a_i(Y_i)\frac{d^i y_1}{dt^i}+\sum_{i=0}^{n} a_i(y_1)\frac{d^i y_1}{dt^i}=f$$

$$Y_1=Y_{11},\quad Y_2=\sqrt{Y_{12}^2+Y_{22}^2}$$

и так далее.

Пример 1. Будем рассматривать вынужденные колебания, определяемые нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$d^2y/dt^2+\mu dy/dt+y^3=\sin\omega t \tag{4}$$

Первое приближение для уравнения (4) ищется в виде $y_1 = Y_{11}\sin(\omega t+\varphi_{11})$. В соответствии с изложенной выше методикой для определения величин Y_{11} и φ_{11} записываем дифференциальное уравнение

$$d^2y_1/dt^2+\mu dy_1/dt+Y_{11}^2y_1=\sin\omega t$$

Переходя к комплексным величинам [3]: $\hat{Y}_{11}=Y'_{11}+jY''_{11}$, $\varphi_{11}=\operatorname{arctg}(Y''_{11}/Y'_{11})$, $j=\sqrt{-1}$, для определения первого приближения получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных Y'_{11} и Y''_{11}:

$$(-\omega^2+Y_{11}^2)Y'_{11}-\mu\omega Y''_{11}=1 \tag{5}$$

$$\mu\omega Y'_{11}+(-\omega^2+Y_{11}^2)Y''_{11}=0,\quad Y_{11}^2=Y'^2_{11}+Y''^2_{11}$$

Для третьего приближения

$$y_3=Y_{13}\sin(\omega t+\varphi_{13})+Y_{33}\sin(3\omega t+\varphi_{33})$$

в соответствии с итерационной схемой (3) имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2y_3}{dt^2}+\mu\frac{dy_3}{dt}+Y_3^2y_3-Y_{11}^2y_1+y_1^3=\sin\omega t$$

$$Y_3^2=Y_{13}^2+Y_{33}^2$$

Переходя к комплексным амплитудам $\hat{Y}_{13}=Y'_{13}+jY''_{13}$, $\hat{Y}_{33}=Y'_{33}+jY''_{33}$, получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных Y'_{13}, Y''_{13}, Y'_{33} и Y''_{33}:

$$
\begin{aligned}
&Y'_{13}(-\omega^2+Y_3^2)-\mu\omega Y''_{13}=1+0,25Y_{11}^3\cos\varphi_{11}\\
&Y'_{13}\mu\omega+Y'_{13}(-\omega^2+Y_3^2)=0,25Y_{11}^3\sin\varphi_{11}\\
&Y'_{33}(-9\omega^2+Y_3^2)-3\mu\omega Y''_{33}=0,25Y_{11}^3\cos 3\varphi_{11}\\
&3\mu\omega Y'_{33}+Y''_{33}(-9\omega^2+Y_3^2)=0,25Y_{11}^3\sin 3\varphi_{11}\\
&Y_3^2=Y_{13}'^2+Y_{13}''^2+Y_{33}'^2+Y_{33}''^2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

С учетом первой, третьей и пятой гармоник, соответствующее приближение имеет вид

$$y_5=Y_{15}\sin(\omega t+\varphi_{15})+Y_{35}\sin(3\omega t+\varphi_{35})+Y_{55}\sin(5\omega t+\varphi_{55})$$

Дифференциальное уравнение для этого приближения запишем в форме

$$\frac{d^2y_5}{dt^2}+\mu\frac{dy_5}{dt}+Y_5^2y_5-Y_3^2y_3+y_3^3=\sin\omega t$$

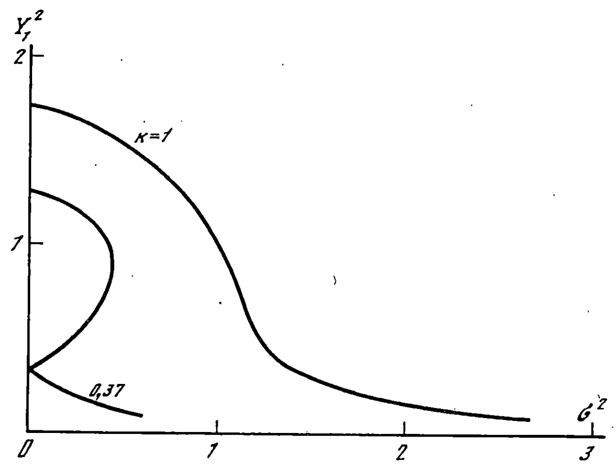
$$Y_5^2=Y_{15}^2+Y_{35}^2+Y_{55}^2$$

Для определения комплексных амплитуд $\hat{Y}_{15}=Y'_{15}+jY''_{15}$, $\hat{Y}_{35}=Y'_{35}+jY''_{35}$, $\hat{Y}_{55}=Y'_{55}+$ $+jY''_{55}$, получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных Y'_{15}, Y''_{15}, Y'_{35}, Y''_{35}, Y'_{55} и Y''_{55}:

$$
\begin{aligned}
&Y'_{15}(-\omega^2+Y_5^2)-\mu\omega Y''_{15}=1+Y_3^2Y_{13}\cos\varphi_{13}-(0,75Y_{13}^3\cos\varphi_{13}-\\
&-0,75Y_{13}^2Y_{33}\cos(\varphi_{33}-2\varphi_{13})+1,5Y_{13}Y_{33}^2\cos\varphi_{13})\\
&\mu\omega Y'_{15}+Y''_{15}(-\omega^2+Y_5^2)=Y_3^2Y_{13}\sin\varphi_{13}-(0,75Y_{13}^3\sin\varphi_{13}-\\
&-0,75Y_{13}^2Y_{33}\sin(\varphi_{33}-2\varphi_{13})+1,5Y_{13}Y_{33}^2\sin\varphi_{13})\\
&Y'_{35}(-9\omega^2+Y_5^2)-3\mu\omega Y''_{35}=Y_3^2Y_{33}\cos\varphi_{33}+0,25Y_{13}^3\cos 3\varphi_{13}-\\
&-1,5Y_{13}^2Y_{33}\cos\varphi_{33}-0,75Y_{13}^3\cos\varphi_{33}\\
&3\mu\omega Y'_{35}+Y''_{35}(-9\omega^2+Y_5^2)=Y_3^2Y_{33}\sin\varphi_{33}+\\
&+0,25Y_{13}^3\sin 3\varphi_{13}-1,5Y_{13}^2Y_{33}\sin\varphi_{33}-0,75Y_{33}^3\\
&Y'_{55}(-25\omega^2+Y_5^2)-5\mu\omega Y''_{55}=\\
&=0,75Y_{13}^2Y_{33}\cos(2\varphi_{33}+\varphi_{13})-0,75Y_{13}Y_{33}^2\cos(2\varphi_{33}-\varphi_{13})\\
&5\mu\omega Y'_{55}+Y''_{55}(-25\omega^2+Y_5^2)=0,75Y_{13}^2Y_{33}\sin(2\varphi_{13}+\varphi_{33})-\\
&-0,75Y_{13}Y_{33}^2\sin(2\varphi_{33}-\varphi_{13})\\
&Y_5^2=Y_{15}'^2+Y_{15}''^2+Y_{35}'^2+Y_{35}''^2+Y_{55}'^2+Y_{55}''^2
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Начальные фазы φ_{pq} (p, $q=1, 3, 5$) находятся по формулам $\varphi_{pq}=\mathrm{arctg}(Y''_{pq}/Y'_{pq})$.

Из рассмотрения полученных систем алгебраических уравнений видно, что система уравнений (5) линейна по переменным Y'_{11} и Y''_{11}, система уравнений (6) линейна по переменным Y'_{13}, Y''_{13}, Y'_{33}, Y''_{33}, и система уравнений (7) линейна по переменным Y'_{15}, Y''_{15}, Y'_{35}, Y''_{35}, Y'_{55} и Y''_{55}; причем при фиксированных величинах Y_3^2 и Y_5^2 соответствующие системы уравнений высокого порядка распадаются на независимые системы уравнений второго



порядка. Это позволяет построить эффективный алгоритм решения всех указанных систем уравнений на ЭВМ.

Расчет на ЭВМ проводился для значений параметров $\mu = 0{,}1$ и $\omega = 0{,}05$–$3{,}2$. Ниже приведены результаты вычислений амплитуды первой гармоники в зависимости от номера приближений q и частоты ω.

$\omega = 0{,}05$	0,25	0,45	1,00	2,00	3,00	3,20
$Y_{11} = 1{,}00$	1,02	1,06	1,32	2,10	3,02	0,105
$Y_{13} = 1{,}07$	1,06	0,72	1,43	2,33	3,34	0,104
$Y_{15} = 1{,}13$	0,92	0,55	1,44	2,35	3,41	0,103

Пример 2. Рассмотрим неоднородное уравнение Ван-дер-Поля

$$d^2y/dt^2 + \omega_0^2 y + \varepsilon(y^2 - 1)dy/dt = \varepsilon K \cos \omega t \tag{8}$$

Анализ периодических решений уравнения (8) при $\varepsilon = 0$ известен [4].

Положим $\varepsilon = 1$, $\omega_0 = 1$, и будем искать периодические решения уравнения (8) при помощи предложенного метода. Первое приближение для уравнения (8) ищем в виде

$$y_1 = Y'_{11} \cos \omega t + Y''_{11} \sin \omega t$$

Уравнение для нахождения величин Y'_{11} и Y''_{11} имеет вид

$$d^2y_1/dt^2 + y_1 + (Y_1^2 - 1)dy_1/dt = K\cos\omega t$$

$$Y_1^2 = Y_{11}^2 = Y_{11}'^2 + Y_{11}''^2 \tag{9}$$

Следующее приближение для решения представим в форме

$$y_3 = Y'_{13}\cos\omega t + Y''_{13}\sin\omega t + Y'_{33}\cos 3\omega t + Y''_{33}\sin 3\omega t$$

В соответствии с итерационной схемой (3), уравнение для нахождения этого приближения находим в виде

$$\frac{d^2y_3}{dt^2} + y_3 + (Y_3^2 - 1)\frac{dy_3}{dt} = (Y_1^2 - y_1^2)\frac{dy_1}{dt} + K\cos\omega t$$

$$Y_3^2 = Y_{13}^2 + Y_{33}^2, \quad Y_{13}^2 = Y_{13}'^2 + Y_{13}''^2, \quad Y_{33}^2 = Y_{33}'^2 + Y_{33}''^2 \tag{10}$$

Решение уравнений (9) и (10), линейных относительно переменных y_1 и y_3, было найдено при значениях $K = 1$ и $K = 0{,}37$ в диапазоне частот $1 < \omega < 2$.

На фигуре показаны графики зависимостей квадратов амплитуд гармоник первого приближения в функции от величины $\sigma^2 = \omega^2 - 1$ (квадрата расстройки частоты) для двух значений величины K.

Ниже для $K = 1$ приведены результаты расчетов квадратов амплитуд Y_{11}^2 и Y_{13}^2 первой гармоники с учетом первого и следующего приближений для ряда значений величины σ^2:

$\sigma^2 = 2{,}65$	1,79	1,46	1,29	1,20	1,15	1,11	1,08	1,04	1,00	0,94
$Y_{11}^2 = 0{,}10$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10
$Y_{13}^2 = 0{,}10$	0,21	0,33	0,52	0,82	1,03	1,17	1,28	1,38	1,47	1,57

Из приведенных данных можно сделать заключение, что для ряда значений частоты точность построения периодических решений в рассмотренных примерах является достаточной.

В то же время для других значений частоты необходимо при нахождении решений учитывать гармоники высших порядков, что не вызывает принципиальных затруднений в силу особенностей метода. Непосредственно точность получаемых решений можно оценить подстановкой их в исходные уравнения и вычислений невязок на интервалах времени, равных периодам решений.

Следует подчеркнуть, что метод расчета выявляет многозначность резонансных кривых для основных гармоник периодических решений, что характерно для нелинейных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харди Г.Х., Рогозинский В.В.* Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 156 с.
2. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.
3. *Атабеков Г.И.* Основы теории цепей. М.: Энергия, 1969. 424 с.
4. *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.XI.1994