

УДК 539.3

© 1997 г. Т.Б. НЕРУБАЙЛО

**К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ
ОБОЛОЧКУ НАГРУЗКИ С ВЫСОКОЙ ИЗМЕНЯЕМОСТЬЮ,
ПРИВОДЯЩЕЙСЯ К ЛОКАЛЬНЫМ МОМЕНТАМ**

Вопросу определения напряженно-деформированного состояния оболочек при действии различного рода локализованных и сосредоточенных нагрузок посвящено довольно значительное число работ. Случаи действия на цилиндрические оболочки нормальной нагрузки, приводящейся к внешнему локальному моменту, рассматривали Бейлард П.П. [1, 2], Даревский В.М. [3], Передерий С.К., Ковальский Б.С., Кузьменко А.П. [4] и другие¹. Отметим, что в цитированных работах задача решается на основе уравнений общей или моментной технической теории оболочек (Власова – Доннелла) [5, 6] в двойных тригонометрических рядах, с помощью которых на ЭВМ получена числовая информация о напряженно-деформированном состоянии. Теоретические исследования некоторых математических аспектов этой проблемы проведены Чернышевым Г.Н. [7]. В настоящей работе ставится цель исследовать действительную погрешность различных известных приближенных уравнений теории оболочек, описывающих так называемые элементарные напряженные состояния [8] и рассмотреть возможность применения к рассматриваемому классу нагрузок методов асимптотического синтеза напряженного состояния [9, 10], получивших применение при кусочно-постоянных нагрузках, характеризующихся меньшей изменчивостью, чем исследуемые здесь кусочно-линейные, эквивалентные продольным и окружным локальным внешним моментам.

1. Решение на основе уравнений общей теории оболочек. При использовании полных уравнений теории оболочек, построенный на принятии гипотез Кирхгоффа – Лява, задача о действии на круговую цилиндрическую оболочку нормальной поверхностной нагрузки $p(\alpha, \beta)$ может быть приведена к следующему разрешающему дифференциальному уравнению относительно функции $\Phi(\alpha, \beta)$ [5]:

$$L\Phi(\alpha, \beta) = R^4 D^{-1} p(\alpha, \beta)$$

$$L = \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 1)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \nabla^2 + \frac{1 - \nu^2}{c^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \quad (1.1)$$

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial \alpha^2 + \partial^2 / \partial \beta^2$$

Перемещения, усилия, изгибающие моменты и другие факторы связаны с функцией $\Phi(\alpha, \beta)$ дифференциальными соотношениями. Выпишем наиболее важные из них для рассматриваемого здесь случая действия нагрузки

$$T_1 = -\frac{Eh}{R} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - \frac{2c^2}{1 + \nu} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \nabla^2 \Phi \right)$$

¹ Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Олышанский В.П. Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). М., 1988. 192 с. Деп. в ВИНТИ 12.02.88, № 1222.

$$T_2 = -\frac{Eh}{R} \left\{ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \frac{c^2}{1-\nu^2} \left[\nabla^6 \Phi + (1-\nu) \left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} - \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6} \right) + \nabla^4 \Phi \right] \right\}$$

$$w = \nabla^2 \nabla^2 \Phi \quad (1.2)$$

$$G_1 = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \right) \nabla^4 \Phi$$

$$G_2 = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 1 \right) \nabla^4 \Phi$$

Рассмотрим бесконечно длинную оболочку при действии на нее локализованной нормальной нагрузки, статически эквивалентной самоуравновешенной системе продольных локальных моментов, равномерно расположенных вдоль окружности в фиксированном сечении оболочки, принимаемом за начальное. Действующую нагрузку представим в виде произведения

$$p(\alpha, \beta) = p_0 \theta(\alpha) \theta(\beta) \quad (1.3)$$

в котором p_0 – амплитудное значение нагрузки; $\theta(\alpha)$, $\theta(\beta)$ – безразмерные кусочно-линейная и кусочно-постоянная функции распределения нагрузки в продольном и окружном направлениях соответственно.

Кусочно-линейную функцию $\theta(\alpha)$ представим в форме интеграла Фурье, а кусочно-постоянную функцию $\theta(\beta)$ – в форме ряда Фурье

$$\theta(\alpha) = \frac{2}{\pi \alpha_0} \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha_0 \lambda}{\lambda^2} - \frac{\alpha_0 \cos \alpha_0 \lambda}{\lambda} \right) \sin \alpha \lambda d\lambda$$

$$\theta(\beta) = \frac{k\beta_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kn\beta_0 \cos kn\beta \quad (1.4)$$

Из (1.4) ясно, что нагрузка действует по k областям с размерами $2\alpha_0 R$, $2\beta_0 R$ вдоль образующей и контура оболочки соответственно. Принимая во внимание (1.3), (1.4), для внешней нагрузки получаем представление

$$p(\alpha, \beta) = \frac{2}{\pi \alpha_0} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \theta(\lambda) \sin \alpha \lambda d\lambda \quad (1.5)$$

$$\theta_n = \frac{k\beta_0}{\pi} (n=0), \quad \theta_n = \frac{2}{\pi n} \sin kn\beta_0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\theta(\lambda) = \sin \alpha_0 \lambda / \lambda^2 - \alpha_0 \cos \alpha_0 \lambda / \lambda$$

В соответствии с представлением нагрузки (1.5) решение разрешающего уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos kn\beta \int_0^{\infty} \Phi_n(\lambda) \sin \alpha \lambda d\lambda \quad (1.6)$$

В результате очевидных подстановок (1.5) и (1.6) в уравнение (1.1) находим вначале коэффициент $\Phi_n(\lambda)$, а затем с помощью (1.6) и разрешающую функцию

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{36(1-\nu^2)}{\pi \alpha_0^3} \left(\frac{R}{h} \right)^3 \frac{m_0}{ER} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\theta(\lambda) \sin \alpha \lambda d\lambda}{L(\lambda, n)} \quad (1.7)$$

$$L(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2 - 1)^2 (\lambda^2 + k^2 n^2)^2 + 2(1-\nu) \lambda^2 (\lambda^4 - k^4 n^4) + (1-\nu^2) c^{-2} \lambda^4$$

$$m_0 = (2/3) p_0 \alpha_0^2 R^2$$

где $L(\lambda, n)$ – след оператора L .

Для интересующих нас нормального перемещения, усилий и изгибающих моментов на основании (1.2) и (1.7) записываем искомые выражения

$$\frac{ER}{m_0} w(\alpha, \beta) = \frac{36(1-\nu^2)}{\pi\alpha_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\theta(\lambda) w(\lambda, n) \sin \alpha\lambda}{L(\lambda, n)} d\lambda$$

$$\frac{R}{m_0} T_i(\alpha, \beta) = \frac{36(1-\nu^2)}{\pi\alpha_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\theta(\lambda) t_i(\lambda, n) \sin \alpha\lambda d\lambda}{L(\lambda, n)} \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{m_0} G_i(\alpha, \beta) = \frac{3}{2\pi\alpha_0^3} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\theta(\lambda) g_i(\lambda, n) \sin \alpha\lambda d\lambda}{L(\lambda, n)}$$

$$w(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2)^2, \quad t_1(\lambda, n) = \lambda^2 k^2 n^2 [1 + 2c^2(1+\nu)^{-1}(\lambda^2 + k^2 n^2)]$$

$$t_2(\lambda, n) = \lambda^4 - c^2(1-\nu^2)^{-1}[\nu\lambda^6 + k^6 n^6 + 3\lambda^4 k^2 n^2 + (4-\nu)\lambda^2 k^4 n^4 -$$

$$-(\lambda^2 + k^2 n^2)^2], \quad g_1(\lambda, n) = (\lambda^2 + \nu k^2 n^2 - \nu)w(\lambda, n)$$

$$g_2(\lambda, n) = (k^2 n^2 + \nu\lambda^2 - 1)w(\lambda, n)$$

Индекс i в формулах (1.8) принимает значения $i = 1, i = 2$, указывая направление действия внутренних факторов – усилий и моментов.

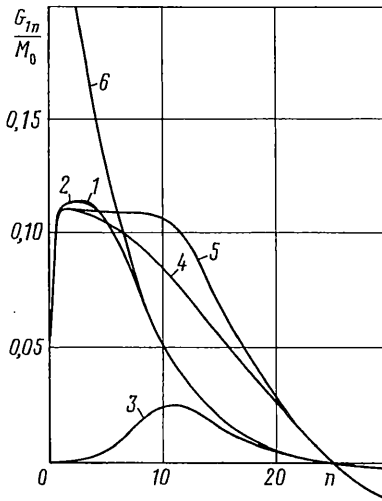
На основе построенного решения (1.8) на ЭВМ получена числовая информация для различных параметров оболочки и нагруженных областей; которая хорошо коррелирует с имеющимися в литературе данными [1–4]. Для n -го номера гармоники продольного и кольцевого изгибающих моментов информация представлена на фиг. 1, 2 (кривые 1) для оболочки с параметром $R/h = 100$ при размерах нагруженных областей, у которых $\alpha_0 = \beta_0 = 0,0625$. Принято, что $k = 2, \beta = 0, \alpha = \alpha_0$.

Отметим, что на обсуждаемых фиг. 1, 2 изгибающие моменты отнесены к внешнему моменту M_0 , приходящемуся на одну нагруженную область, который связан с давлением и погонным моментом по формулам

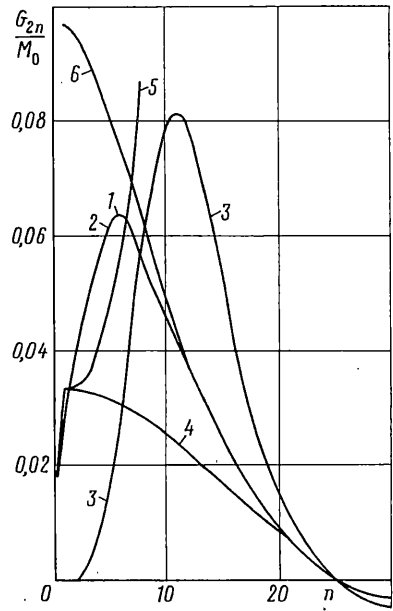
$$M_0 = 2\beta_0 R m_0 = (4/3)p_0 \alpha_0^2 \beta_0 R^3, \quad m_0 = (2/3)p_0 \alpha_0^2 R^2$$

2. Решение на основе уравнений элементарных напряженных состояний. Использование при расчете оболочек в случае локализованных воздействий полных уравнений теории оболочек приводит либо к громоздким либо весьма трудоемким решениям, требующим значительной вычислительной работы с применением ЭВМ, в чем не трудно убедиться, приняв во внимание выражение (1.8). Рассмотрим возможный путь преодоления этих трудностей.

Асимптотический анализ полных уравнений теории оболочек, проведенный в работах А.Л. Гольденвейзера [8] показал, что в зависимости от величины показателя изменяемости напряженного состояния, которая у нас характеризуется номером гармоники n , полные уравнения допускают те или иные упрощения. При построении напряженно-деформированного состояния для нагрузки, содержащей в разложении типа (1.4) различные гармоники ($n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$), полное напряженное состояние может быть представлено в виде суммы следующих элементарных напряженных состояний: *основное состояние и краевой эффект*; состояние с *высокой изменяемостью*, или напряженное состояние с *большим показателем изменяемости*; *изгибное и тангенциальное* состояния. Вопрос о замене полных уравнений теории оболочек приближенными уравнениями более низкого порядка и более простой структуры представляет значительный интерес как в теоретическом, так и в практическом отношениях при решении задач, к которым, на наш взгляд, относится и рассматриваемая здесь задача о действии локальных нагрузок моментного типа.



Фиг. 1



Фиг. 2

Построим решение задачи на основе применения приближенных уравнений, описывающих перечисленные выше элементарные напряженные состояния. Это уравнения полубезмоментной теории, описывающие основное состояние, уравнения простого краевого эффекта, уравнения напряженного состояния с высокой изменчивостью, или уравнения Власова – Доннелла, и, наконец, уравнения изгибного состояния. Решения на их основе могут быть получены как непосредственным интегрированием разрешающих уравнений, что было сделано выше в случае общей теории оболочек, так и путем соответствующих упрощений уже полученного по общей теории оболочек решения (1.8). Второй путь представляется более рациональным и поэтому здесь используется для записи искомых силовых факторов и нормального перемещения.

Основное состояние описывается уравнениями полубезмоментной теории в форме, получающейся из полных уравнений, если принять справедливым сильное неравенство, предложенное В.В. Новожиловым: $|\partial^2 \Phi / \partial \beta^2| \gg |\partial^2 \Phi / \partial \alpha^2|$ [11]. Тогда для наиболее важных факторов основного состояния получим

$$\frac{ER}{m_0} w^\circ(\alpha, \beta) = \frac{3k^4}{\pi\alpha_0^3} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\bar{n}} n^4 \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\theta(\lambda) \sin \alpha\lambda d\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} \quad (2.1)$$

$$\frac{R}{m_0} T_1^\circ(\alpha, \beta) = -\frac{3k^2}{\pi\alpha_0^3} \sum_{n=1}^{\bar{n}} n^2 \theta_n \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \theta(\lambda) \sin \alpha\lambda d\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4}$$

$$\frac{1}{m_0} G_2^\circ(\alpha, \beta) = \frac{12}{\pi\alpha_0^3} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{\mu_n^4 \theta_n}{k^2 n^2 - 1} \cos kn\beta \int_0^\infty \frac{\theta(\lambda) \sin \alpha\lambda d\lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4}$$

$$G_1^\circ(\alpha, \beta) = vG_2^\circ(\alpha, \beta), \quad 4\mu_n^4 = c^2(1 - v^2)^{-1} k^4 n^4 (k^2 n^2 - 1)^2$$

После вычисления несобственных интегралов, входящих в (2.1), путем их сведения к табличным или с помощью применения теоремы о вычетах находим аналитические

выражения [12], [13]:

$$\begin{aligned} \frac{ER}{m_0} w^\circ(\alpha, \beta) &= \frac{3k^4}{16\pi\alpha_0^3} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{n^3}{\mu_n^5} \sin kn\beta_0 w_n^\circ(\alpha) \cos kn\beta \\ \bar{w}_n^\circ(\alpha) &= 4\mu_n\alpha + (1 + 2\mu_n\alpha)[\varphi_n(\alpha_0 + \alpha) - \varphi_n(\alpha_0 - \alpha)] + \\ &+ \psi_n(\alpha_0 - \alpha) - \psi_n(\alpha_0 + \alpha) \quad (0 \leq \alpha \leq \alpha_0), \quad \bar{w}_n^\circ(\alpha) = (1 + 2\mu_n\alpha_0) \times \\ &\times \varphi_n(\alpha + \alpha_0) - (1 - 2\mu_n\alpha_0)\varphi_n(\alpha - \alpha_0) + \psi_n(\alpha - \alpha_0) - \psi_n(\alpha + \alpha_0) \quad (\alpha > \alpha_0) \quad (2.2) \\ \frac{R}{m_0} T_1^\circ(\alpha, \beta) &= -\frac{3k^2}{8\pi\alpha_0^3} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{n}{\mu_n^3} \sin kn\beta_0 \bar{t}_{1n}^\circ(\alpha) \cos kn\beta \\ \bar{t}_{1n}^\circ(\alpha) &= \varphi_n(\alpha_0 - \alpha) - \varphi_n(\alpha_0 + \alpha) + (1 + 2\mu_n\alpha_0)[\psi_n(\alpha_0 - \alpha) - \\ &- \psi_n(\alpha_0 + \alpha)] \quad (0 \leq \alpha \leq \alpha_0), \quad \bar{t}_{1n}^\circ(\alpha) = \varphi_n(\alpha - \alpha_0) - \varphi_n(\alpha + \alpha_0) + \\ &+ (1 - 2\mu_n\alpha_0)\psi_n(\alpha - \alpha_0) - (1 + 2\mu_n\alpha_0)\psi_n(\alpha + \alpha_0) \quad (\alpha > \alpha_0) \\ \frac{1}{m_0} G_2^\circ(\alpha, \beta) &= \frac{3}{4\pi\alpha_0^3} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{\sin kn\beta_0}{n\mu_n(k^2n^2 - 1)} \bar{g}_{2n}^\circ(\alpha) \cos kn\beta \\ \bar{g}_{2n}^\circ(\alpha) &= \bar{w}_n^\circ(\alpha) \\ \varphi_n(\alpha) &= \exp(-\mu_n\alpha) \cos \mu_n\alpha, \quad \psi_n(\alpha) = \exp(-\mu_n\alpha) \sin \mu_n\alpha \end{aligned}$$

Перейдем к локальному краевому эффекту. Это быстроизменяющееся напряженно-деформированное состояние, возникающее в зоне приложения нагрузки, названо локальным краевым эффектом по аналогии с "точечным" краевым эффектом, введенным Г.Н. Чернышевым при рассмотрении действия сосредоточенной силы на выпуклые оболочки [14].

Для нормального перемещения, кольцевого усилия и продольного изгибающего момента, являющихся наиболее важными факторами локального краевого эффекта, на основании зависимостей (1.8) с учетом сильного неравенства $|\partial^2\Phi / \partial\alpha^2| \gg |\partial^2\Phi / \partial\beta^2|$ находим

$$\begin{aligned} \frac{ER}{m_0} w^k(\alpha, \beta) &= \frac{36(1 - \nu^2)}{\pi\alpha_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \bar{\theta}(\beta) \int_0^\infty \frac{\theta(\lambda) \sin \alpha\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda \\ \frac{R}{m_0} T_2^k(\alpha, \beta) &= -\frac{36(1 - \nu^2)}{\pi\alpha_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \bar{\theta}(\beta) \int_0^\infty \frac{\theta(\lambda) \sin \alpha\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{m_0} G_1^k(\alpha, \beta) = \frac{3}{\pi\alpha_0^3} \bar{\theta}(\beta) \int_0^\infty \frac{\theta(\lambda) \lambda^2 \sin \alpha\lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda$$

$$G_2^k(\alpha, \beta) = \nu G_1^k(\alpha, \beta), \quad 4\eta^4 = (1 - \nu^2)c^{-2}$$

Здесь функция $\bar{\theta}(\beta) = \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta$ ($n = 0, 1, \dots, \bar{n}$) характеризует изменение факторов вдоль контура в отличие от обычно применяемого осесимметричного краевого эффекта.

В результате вычисления несобственных интегралов в (2.3) получаем

$$\frac{ER}{m_0} w^k(\alpha, \beta) = \frac{3}{8\pi\eta\alpha_0^3} \frac{R}{h} \bar{w}^k(\alpha) \bar{\theta}(\beta) \quad (2.4)$$

$$\frac{R}{m_0} T_2^k(\alpha, \beta) = -\frac{3}{8\pi\eta\alpha_0^3} \bar{t}_2^k(\alpha) \bar{\theta}(\beta), \quad \frac{1}{m_0} G_1^k(\alpha, \beta) = \frac{3}{16\pi\eta^3\alpha_0^3} \bar{g}_1^k(\alpha) \bar{\theta}(\beta)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}^k(\alpha) &= (1 + 2\eta\alpha_0)\varphi(\alpha + \alpha_0) - (1 - 2\eta\alpha_0)\varphi(\alpha - \alpha_0) + \\ &+ \psi(\alpha - \alpha_0) - \psi(\alpha + \alpha_0) \quad (\alpha > \alpha_0), \quad \bar{w}^k(\alpha) = 4\eta\alpha + \\ &+ (1 + 2\eta\alpha_0)[\varphi(\alpha_0 + \alpha) - \varphi(\alpha_0 - \alpha)] + \psi(\alpha_0 - \alpha) - \psi(\alpha_0 + \alpha) \\ (0 \leq \alpha \leq \alpha_0), \quad \bar{t}_2^k(\alpha) &= \bar{w}^k(\alpha), \quad \bar{g}_1^k(\alpha) = \varphi(\alpha - \alpha_0) - \\ &- \varphi(\alpha + \alpha_0) + (1 - 2\eta\alpha_0)\psi(\alpha - \alpha_0) - (1 + 2\eta\alpha_0)\psi(\alpha + \alpha_0) \\ (\alpha > \alpha_0), \quad \bar{g}_1^k(\alpha) &= \varphi(\alpha_0 - \alpha) - \varphi(\alpha_0 + \alpha) + (1 + 2\eta\alpha_0) \times \\ &\times [\psi(\alpha_0 - \alpha) - \psi(\alpha_0 + \alpha)] \quad (0 \leq \alpha \leq \alpha_0) \\ \varphi(\alpha) &= \exp(-\eta\alpha) \cos \eta\alpha, \quad \psi(\alpha) = \exp(-\eta\alpha) \sin \eta\alpha \end{aligned}$$

Напряженное состояние с высокой изменчивостью определяется на основании уравнений Власова – Доннелла, если в выражениях (1.8) произвести упрощения, отвечающие соотношению $|\partial^2\Phi / \partial\alpha^2| \approx |\partial^2\Phi / \partial\beta^2| \gg |\Phi|$. Это означает, что запись выражений (1.8) сохраняется неизменной, а входящие туда члены упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} L(\lambda, n) &= (\lambda^2 + k^2n^2)^4 + (1 - \nu^2)c^{-2}\lambda^4, \quad t_1(\lambda, n) = \lambda^2k^2n^2 \\ t_2(\lambda, n) &= \lambda^4, \quad g_1(\lambda, n) = (\lambda^2 + \nu k^2n^2)w(\lambda, n) \\ g_2(\lambda, n) &= (k^2n^2 + \nu\lambda^2)w(\lambda, n) \quad (\bar{n} + 1 \leq n \leq n^*) \end{aligned} \quad (2.5)$$

При действии на оболочку нормальной нагрузки тангенциальное состояние отсутствует, а изгибное состояние описывается уравнениями, полностью совпадающими с уравнениями изгиба пластинки, применяемыми при больших номерах гармоник $n \geq n^* + 1$.

Основными факторами, описывающими изгибное состояние, являются нормальное перемещение, продольный и окружной изгибающие моменты, определяемые выражениями, вытекающими из (1.8):

$$\frac{ER}{m_0} w^u(\alpha, \beta) = \frac{72(1 - \nu^2)}{\pi\alpha_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kn\beta_0 \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\theta(\lambda) \sin \alpha\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + k^2n^2)^2} \quad (2.6)$$

$$\frac{R}{m_0} G_i^u(\alpha, \beta) = \frac{6}{\pi\alpha_0^3} \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin kn\beta_0 \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\theta(\lambda) g_i^u(\lambda, n) \sin \alpha\lambda d\lambda}{(\lambda^2 + k^2n^2)^2}$$

$$g_1^u(\lambda, n) = \lambda^2 + \nu k^2n^2, \quad g_2^u(\lambda, n) = k^2n^2 + \nu\lambda^2$$

После вычисления несобственных интегралов в (2.6) получаем аналитические выражения для перемещения и моментов изгибного состояния

$$\begin{aligned} \frac{ER}{m_0} w^u(\alpha, \beta) &= \frac{9(1 - \nu^2)}{\pi k^5 \alpha_0^3} \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \sin kn\beta_0 \bar{w}_n^u(\alpha) \cos kn\beta \\ \frac{1}{m_0} G_i^u(\alpha, \beta) &= \frac{3}{4\pi k^3 \alpha_0^3} \sum_{n^*+1}^{\infty} \frac{\sin kn\beta_0}{n^4} \bar{g}_{in}^u(\alpha) \cos kn\beta \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^u(\alpha) &= 4kn\alpha - [3 + 2kn\alpha_0 + (1 + kn\alpha_0)kn(\alpha_0 - \alpha)] \times \\ &\times \exp[-kn(\alpha_0 - \alpha)] - [3 + 2kn\alpha_0 + (1 + kn\alpha_0)kn(\alpha_0 + \alpha)] \times \end{aligned}$$

$$\times \exp[-kn(\alpha_0 + \alpha)] \quad (0 \leq \alpha \leq \alpha_0), \quad w_n^u(\alpha) = -[3 + 2kn\alpha_0 + \\ + (1 - kn\alpha_0)kn(\alpha - \alpha_0)] \exp[-kn(\alpha - \alpha_0)] + [3 + 2kn\alpha_0 + \\ + (1 + kn\alpha_0)kn(\alpha + \alpha_0)] \exp[-kn(\alpha + \alpha_0)] \quad (\alpha > \alpha_0)$$

$$\bar{g}_{1n}^u(\alpha) = 4vkn\alpha + [1 - 3v - 2vkn\alpha_0 + (1 - v)(1 + kn\alpha_0)] \times \\ \times kn(\alpha_0 - \alpha) \exp[-kn(\alpha_0 - \alpha)] - [1 - 3v - 2vkn\alpha_0 + \\ + (1 - v)(1 + kn\alpha_0)kn(\alpha_0 + \alpha)] \exp[-kn(\alpha_0 + \alpha)] \quad (0 \leq \alpha \leq \alpha_0)$$

$$\bar{g}_{1n}^u(\alpha) = [1 - 3v + 2kn\alpha_0 + (1 - v)(1 - kn\alpha_0)kn(\alpha - \alpha_0)] \times \\ \times \exp[-kn(\alpha - \alpha_0)] - [1 - 3v - 2vkn\alpha_0 + (1 - v)(1 + kn\alpha_0)] \times \\ \times kn(\alpha + \alpha_0) \exp[-kn(\alpha + \alpha_0)] \quad (\alpha > \alpha_0), \quad g_{2n}^u(\alpha) = 4kn\alpha - \\ - [3 - v + 2kn\alpha_0 + (1 - v)(1 + kn\alpha_0)kn(\alpha_0 - \alpha)] \exp[-kn(\alpha_0 - \alpha)] + \\ + [3 - v + 2kn\alpha_0 + (1 - v)(1 + kn\alpha_0)kn(\alpha_0 + \alpha)] \exp[-kn(\alpha_0 + \alpha)]$$

$$(0 \leq \alpha \leq \alpha_0), \quad g_{2n}^u(\alpha) = -[3 - v - 2kn\alpha_0 + (1 - v)(1 - kn\alpha_0)kn(\alpha - \alpha_0)] \times \\ \times \exp[-kn(\alpha - \alpha_0)] + [3 - v + 2kn\alpha_0 + (1 - v)(1 + kn\alpha_0)kn(\alpha + \alpha_0)] \times \\ \times \exp[-kn(\alpha + \alpha_0)] \quad (\alpha > \alpha_0)$$

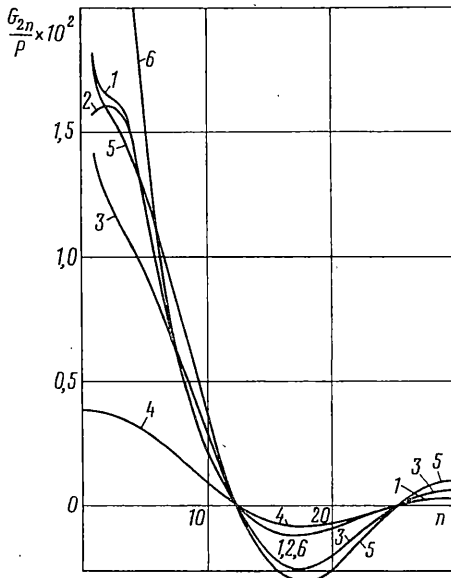
В выражениях (2.2)–(2.7), полученных на основе приближенных уравнений, описывающих элементарные напряженные состояния, имеются два характерных значения n ($n = \bar{n}$, $n = n^*$), разделяющих полный замкнутый интервал изменения номеров гармоник n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$) на "низкие" ($n \leq \bar{n}$), "средние" ($\bar{n} + 1 \leq n \leq n^*$) и "высокие" ($n \geq n^* + 1$) номера, величины которых находятся по формулам работы [10]:

$$n^4 \approx 2\sqrt{3}k^{-4}R/h, \quad n^4 \approx 2(1 - v^2)k^{-4}(R/h)^{5/2} \quad (2.8)$$

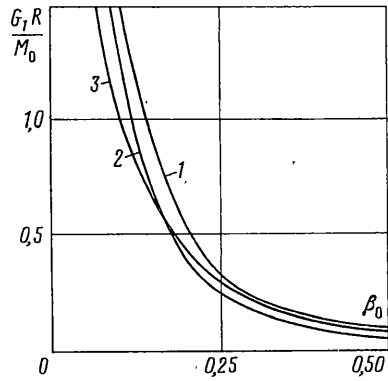
Причем, округленное до ближайшего целого числа значение n , определенное по первой из формул (2.8), дает \bar{n} , а по второй – значение n^* . Знание величин \bar{n} , n^* , устанавливающих области применения приближенных решений, позволило сформулировать три метода асимптотического синтеза (МАС) напряженного состояния при действии на оболочки кусочно-постоянных нагрузок [10], которые основываются на результатах анализа асимптотической и действительной погрешностей в определении факторов напряженно-деформированного состояния.

Как и в случае решения по общей теории оболочек, на основе решений уравнений полубезмоментной теории (2.2), краевого эффекта (2.4), уравнений Власова – Доннелла (1.8), (2.5), уравнений изгибного состояния (2.7) произведены вычисления перемещения и силовых факторов, а также получена числовая информация для сравнительного анализа амплитудных значений этих факторов для n -го члена ряда с целью оценить вклад и погрешность каждой гармоники элементарных напряженных состояний при формировании полного напряженного состояния. Результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2 для полубезмоментной теории (кривая 3), локального краевого эффекта (кривая 4), уравнений изгибного состояния (кривая б). Сумма значений по полубезмоментной теории и на основе краевого эффекта дана в виде кривой 5. Решение на основе уравнений Власова – Доннелла (кривая 2) практически совпадает с решением по общей теории оболочек (кривая 1).

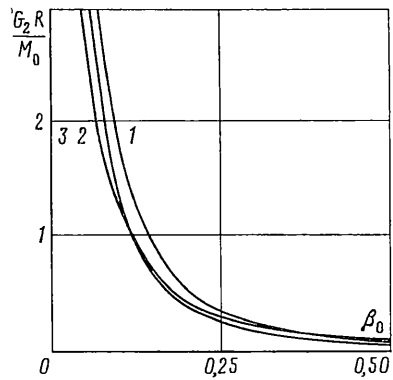
Для сравнения с рассматриваемым здесь случаем нагружения на фиг. 3 приведены значения кольцевого момента для n -го члена ряда при действии кусочно-постоянной нагрузки по двум отрезкам контура ($k = 2$, $\beta_0 = 0,125$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$) оболочки с параметрами $R/h = 100$ (номера кривых для решений на основе различных уравнений совпадают с принятыми на фиг. 1, 2). Отметим, что качественная картина поведения



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

на основе приближенных уравнений при моментной нагрузке (фиг. 1, 2) достаточно хорошо коррелирует с аналогичной информацией для кусочно-постоянной нагрузки (фиг. 3), хотя роль отдельных напряженных состояний в общем балансе силовых факторов (моментов) несколько отличается. Так, решение на основе уравнений Власова – Доннелла с точностью до величины 1% совпадает с общей теорией (фиг. 1, 2) даже при самых низких номерах гармоник, чего не наблюдается в случае кусочно-постоянной нагрузки (фиг. 3). Кроме того, в случае действия моментной нагрузки вклад в общее напряженное состояние полубезмоментного решения менее весомый, чем при кусочно-постоянной нагрузке. Поведение изгибного состояния совпадает с поведением при кусочно-постоянной нагрузке, т.е. при номерах гармоник $n = 5-10$ решение для изгибного состояния почти совпадает с решением на основе общей теории оболочек, которое, в свою очередь, совпадает с решением на основе уравнений Власова – Доннелла, что полностью подтверждает правомерность применяемой здесь формулы для величины $n = n^*$.

Зная компоненты напряженного состояния для краевого эффекта и основного состояния ($n \leq \bar{n}$), напряженного состояния с высокой изменчивостью ($\bar{n} + 1 \leq n \leq n^*$), а также изгибного состояния ($n \geq n^* + 1$), можно построить полное напряженно-деформированное состояние оболочки:

$$w = w^o + w^k + w^* + w^u, \quad T_1 = T_1^o + T_1^*$$

$$T_2 = T_2^k + T_2^*, \quad S = S^o + S^*$$

(2.9)

$$G_1 = G_1^k + \nu G_2^o + G_1^* + G_1^u, \quad G_2 = G_2^o + \nu G_1^k + G_2^* + G_2^u$$

Здесь верхние индексы обозначают принадлежность к основному состоянию, крайнему эффекту, состоянию с высокой изменчивостью и изгибному состоянию соответственно.

На основе построенных аналитических решений для элементарных напряженных состояний с учетом зависимостей (2.9) может быть построено полное напряженно-деформированное состояние оболочки путем применения одного из методов асимптотического синтеза (МАС) напряженного состояния. Первый и второй из МАС дают результаты, практически не отличающиеся от точных (разница составляет 1–2%). Возможности получения простых выражений или расчетных формул в замкнутом виде здесь более ограничены, чем при кусочно-постоянных воздействиях.

3. Случай нагрузки, статически эквивалентной окружным моментам.

Рассмотрим бесконечно длинную оболочку при действии нормальной нагрузки, кусочно-постоянной в продольном направлении и кусочно-линейной в окружном направлении. Для такой нагрузки справедливо разложение, аналогичное (1.5):

$$p(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2 k \beta_0} p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin kn\beta_0 \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda$$

$$\omega_n = (1/n^2)(\sin kn\beta_0 - kn\beta_0 \cos kn\beta_0) \quad (3.1)$$

Разрешающую функцию $\Phi(\alpha, \beta)$ уравнения (1.1) ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin kn\beta_0 \int_0^{\infty} \Phi_n(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda$$

В результате очевидных подстановок и преобразований имеем

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{48(1-\nu^2)}{\pi^2 k \beta_0} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \frac{p_0 R}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin kn\beta_0 \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda L(\lambda, n)} \quad (3.2)$$

Для нормального перемещения, усилий и изгибающих моментов на основании (1.2), (3.2) находим выражения

$$\frac{ER}{m_0} w(\alpha, \beta) = \frac{72(1-\nu^2)}{\pi^2 k \beta_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin kn\beta_0 \int_0^{\infty} \frac{w(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda L(\lambda, n)} \quad (3.3)$$

$$\frac{R}{m_0} T_i(\alpha, \beta) = -\frac{72(1-\nu^2)}{\pi^2 k \beta_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin kn\beta_0 \int_0^{\infty} \frac{t_i(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda L(\lambda, n)}$$

$$\frac{1}{m_0} G_i(\alpha, \beta) = \frac{3}{\pi^2 k \beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \sin kn\beta_0 \int_0^{\infty} \frac{g_i(\lambda, n) \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda}{\lambda L(\lambda, n)}$$

Принятые здесь обозначения совпадают с прежними. Кроме того, учтена связь между давлением p_0 и погонным моментом m_0 , передающимися на одну из k нагруженных областей: $m_0(2/3)p_0\beta_0^2R^2$.

С помощью выражений (3.3), по аналогии со случаем действия продольных моментов, получим решения для элементарных напряженных состояний, содержащие несобственные интегралы, а затем запишем окончательные формулы после их аналитического вычисления (при $\alpha \geq 0$):

1). Основное состояние оболочки:

$$\frac{ER}{m_0} w^\circ(\alpha, \beta) = \frac{3k^3}{8\pi\beta_0^3} \frac{R}{h} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{n^4}{\mu_n^4} \omega_n \bar{\omega}_n^\circ(\alpha) \sin kn\beta$$

$$\frac{R}{m_0} T_1^\circ(\alpha, \beta) = -\frac{3k}{4\pi\beta_0^3} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{n^2}{\mu_n^2} \omega_n t_{1n}^\circ(\alpha) \sin kn\beta \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{m_0} G_2^{\circ}(\alpha, \beta) = \frac{3}{4\pi k \beta_0^3} \sum_{n=1}^{\bar{n}} \frac{\omega_n}{k^2 n^2 - 1} \bar{g}_{2n}^{\circ}(\alpha) \sin kn\beta$$

$$\bar{w}_n^{\circ}(\alpha) = 2 - \varphi_n(\alpha_0 - \alpha) - \varphi_n(\alpha_0 + \alpha) \quad (\alpha \leq \alpha_0)$$

$$w_n^{\circ}(\alpha) = \varphi_n(\alpha - \alpha_0) - \varphi_n(\alpha + \alpha_0) \quad (\alpha > \alpha_0)$$

$$\bar{i}_{1n}^{\circ}(\alpha) = \psi_n(\alpha_0 - \alpha) + \psi_n(\alpha_0 + \alpha) \quad (\alpha \leq \alpha_0)$$

$$i_{1n}^{\circ}(\alpha) = \psi_n(\alpha + \alpha_0) - \psi_n(\alpha - \alpha_0) \quad (\alpha > \alpha_0), \quad \bar{g}_{2n}^{\circ}(\alpha) = \bar{w}_n^{\circ}(\alpha)$$

2). Локальный краевой эффект:

$$\frac{ER}{m_0} w^k(\alpha, \beta) = \frac{3}{2\pi k \beta_0^3} \frac{R}{h} \bar{w}^k(\alpha) \bar{\omega}(\beta) \quad (3.5)$$

$$\frac{R}{m_0} T_2^k(\alpha, \beta) = -\frac{3}{2\pi k \beta_0^3} \bar{i}_2^k(\alpha) \bar{\omega}(\beta)$$

$$\frac{1}{m_0} G_1^k(\alpha, \beta) = \frac{3}{8\pi k \eta^2 \beta_0^3} \bar{g}_1^k(\alpha) \bar{\omega}(\beta), \quad G_2^k(\alpha, \beta) = \nu G_1^k(\alpha, \beta)$$

$$\bar{w}^k(\alpha) = 2 - \varphi(\alpha_0 + \alpha) - \varphi(\alpha_0 - \alpha) \quad (\alpha \leq \alpha_0), \quad \bar{w}^k(\alpha) = \varphi(\alpha - \alpha_0) - \varphi(\alpha + \alpha_0) \quad (\alpha > \alpha_0),$$

$$\bar{i}_2^k(\alpha) = \bar{w}^k(\alpha), \quad \bar{g}_1^k(\alpha) = \psi(\alpha_0 - \alpha) + \psi(\alpha_0 + \alpha) \quad (\alpha \leq \alpha_0),$$

$$\bar{g}_1^k(\alpha) = \psi(\alpha + \alpha_0) - \psi(\alpha - \alpha_0) \quad (\alpha > \alpha_0) \quad \bar{\omega}(\beta) = \sum_{n=1}^{\bar{n}} \omega_n \sin kn\beta$$

3). Напряженное состояние с высокой изменчивостью.

В этом случае справедливо решение (3.3), в котором следует принять обозначения (2.5), а в (3.3) суммирование производить от $n = \bar{n} + 1$ до $n = n^*$.

4). Изгибное напряженное состояние:

$$\frac{ER}{m_0} w^u(\alpha, \beta) = \frac{18(1-\nu^2)}{\pi k^5 \beta_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n^4} \bar{w}_n^u(\alpha) \sin kn\beta \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{m_0} G_1^u(\alpha, \beta) = \frac{3}{4\pi k^3 \beta_0^3} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n^2} \bar{g}_{1n}^u(\alpha) \sin kn(\beta)$$

$$\bar{w}_n^u(\alpha) = 2 - \frac{1}{2} \exp[-kn(\alpha_0 - \alpha)][2 + kn(\alpha_0 - \alpha)] - \frac{1}{2} \exp[-kn(\alpha_0 + \alpha)][2 + kn(\alpha_0 + \alpha)]$$

$$(\alpha \leq \alpha_0), \quad \bar{w}_n^u(\alpha) = \frac{1}{2} \exp[-kn(\alpha - \alpha_0)][2 + kn(\alpha - \alpha_0)] - \frac{1}{2} \exp[-kn(\alpha + \alpha_0)] \times$$

$$\times [2 + kn(\alpha + \alpha_0)] \quad (\alpha > \alpha_0), \quad \bar{g}_{1n}^u(\alpha) = 2\nu - \frac{1}{2}[2\nu - (1-\nu)kn(\alpha_0 - \alpha)] \exp[-kn(\alpha_0 - \alpha)] -$$

$$- \frac{1}{2}[2\nu - (1-\nu)kn(\alpha_0 + \alpha)] \exp[-kn(\alpha_0 + \alpha)] \quad (\alpha \leq \alpha_0), \quad \bar{g}_{1n}^u(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}[2\nu - (1-\nu)kn(\alpha - \alpha_0)] \exp[-kn(\alpha - \alpha_0)] - \frac{1}{2}[2\nu - (1-\nu)kn(\alpha + \alpha_0)] \times$$

$$\times \exp[-kn(\alpha + \alpha_0)] \quad (\alpha > \alpha_0), \quad \bar{g}_{2n}^u(\alpha) = 2 - \frac{1}{2}[2 + (1-\nu)kn(\alpha_0 - \alpha)] \times$$

$$\times \exp[-kn(\alpha_0 - \alpha)] - \frac{1}{2}[2 + (1-\nu)kn(\alpha_0 + \alpha)] \exp[-kn(\alpha_0 + \alpha)]$$

$$(\alpha \leq \alpha_0), \quad \bar{g}_{2n}^u(\alpha) = -\frac{1}{2}[2 + (1-\nu)kn(\alpha - \alpha_0)] \exp[-kn(\alpha - \alpha_0)] -$$

$$- \frac{1}{2}[2 + (1-\nu)kn(\alpha + \alpha_0)] \exp[-kn(\alpha + \alpha_0)] \quad (\alpha > \alpha_0)$$

Теперь, принимая во внимание записанные здесь выражения для искомых факторов (3.4)–(3.6), с помощью зависимостей (2.9) может быть записано решение на основе любого из трех МАС.

Перейдем к рассмотрению частного случая приложения нагрузки.

4. Случай передачи окружных моментов по отрезкам контура. Полное напряженно-деформированное состояние оболочки представим в виде трех элементарных состояний: основного, локального краевого эффекта (при $n \leq n^*$) и изгибного состояния (при

$n \geq n^* + 1$), что составляет сущность третьего МАС, в котором, по сравнению со вторым МАС, игнорируется уравнение восьмого порядка для напряженного состояния с высокой изменчивостью Власова – Доннелла, а область применения основного состояния и краевого эффекта расширяется до $n = n^*$:

$$\begin{aligned} \frac{ER^2}{M_0} w(\alpha, \beta) = & \frac{9(1-v^2)}{\pi^4 \sqrt{3(1-v^2)} \beta_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{(k^2 n^2 - 1)^3}} \times \\ & \times [\varphi_n(\alpha) + \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta + \frac{3\sqrt{3(1-v^2)}}{4\beta_0^2} \frac{R}{h} \sqrt{\frac{R}{h}} [\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)] \omega^*(\beta) + \\ & + \frac{9(1-v^2)}{\pi k^4 \beta_0^3} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n^3} (1+kn\alpha) e^{-kn\alpha} \sin kn\beta \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\frac{R^2}{M_0} T_1(\alpha, \beta) = -\frac{\sqrt{3(1-v^2)}}{2\pi\beta_0^3} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} [\varphi_n(\alpha) - \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta$$

$$\frac{R^2}{M_0} T_2(\alpha, \beta) = -\frac{3\sqrt{3(1-v^2)}}{4\beta_0^2} \sqrt{\frac{R}{h}} [\varphi(\alpha) + \psi(\alpha)] \omega^*(\beta),$$

$$\omega^*(\beta) = \frac{2}{\pi k \beta_0} \sum_{n=1}^{n^*} \omega_n \sin kn\beta$$

$$\frac{R}{M_0} G_1(\alpha, \beta) = \frac{3}{8\sqrt{3(1-v^2)} \beta_0^2} \sqrt{\frac{h}{R}} [\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)] \omega^*(\beta) +$$

$$+ \frac{3v}{4\pi\sqrt{3(1-v^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} [\varphi_n(\alpha) + \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta +$$

$$+ \frac{3}{4\pi k^2 \beta_0^3} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n} [1+v-(1-v)kn\alpha] e^{-kn\alpha} \sin kn\beta,$$

$$\frac{R}{M_0} G_2(\alpha, \beta) = \frac{3}{4\pi\sqrt{3(1-v^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}} \sum_{n=1}^{n^*} \frac{n\omega_n}{\sqrt{k^2 n^2 - 1}} [\varphi_n(\alpha) + \psi_n(\alpha)] \sin kn\beta +$$

$$+ \frac{3v}{8\sqrt{3(1-v^2)} \beta_0^2} \sqrt{\frac{h}{R}} [\varphi(\alpha) - \psi(\alpha)] \omega^*(\beta) +$$

$$+ \frac{3}{4\pi k^2 \beta_0^3} \sum_{n^{*+1}}^{\infty} \frac{\omega_n}{n} [1+v+(1-v)kn\alpha] e^{-kn\alpha} \sin kn\beta$$

Здесь M_0 – полный момент, передающийся на оболочку через один из k участков контура $M_0 = 2\alpha_0 m_0 R$.

Рассмотрим возможность упрощения решения (4.1) с целью получения расчетных формул в замкнутом виде, не содержащих рядов, как это было сделано при действии кусочно-постоянной нагрузки [9]. При этом будем предполагать, что в некотором диапазоне изменения размеров нагруженных отрезков контура решение может быть построено только на основе уравнений полубезмоментной теории и локального краевого эффекта. Это означает, что построенные в виде рядов решения для основного состояния и краевого эффекта формально распространяются на весь диапазон изменения номеров гармоник. Но здесь существенным является то обстоятельство, что в определенном диапазоне изменения длин нагруженных отрезков часть ряда, кусок ряда с номерами гармоник, для которых эти решения имеют значительную погрешность (фиг. 3), не вносит заметного вклада в их полную сумму. А в то же

время, так как ряды становятся бесконечными, появляется возможность в некоторых частных случаях получить их сумму в конечном виде, или просуммировать эти ряды [9], [12].

Пусть $k \geq 2$, тогда приняв сильное неравенство $k^2 n^2 \gg 1$, при $\alpha = 0$ получаем

$$\frac{R^2}{M_0} T_1^\circ(0, \beta) = -\frac{3\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\pi k \beta_0^3} \sqrt{\frac{R}{h}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kn\beta_0}{n^2} - k\beta_0 \frac{\cos kn\beta_0}{n} \right) \sin kn\beta \quad (4.2)$$

$$\frac{R}{M_0} G_2^\circ(0, \beta) = \frac{3}{4\pi k \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kn\beta_0}{n^2} - k\beta_0 \frac{\cos kn\beta_0}{n} \right) \sin kn\beta$$

Входящий в выражения для продольного усилия и кольцевого изгибающего момента ряд может быть просуммирован [12], тогда после некоторых преобразований для $\beta = \beta_0$, т.е. для границы области, получаем конечные формулы

$$\frac{R^2}{M_0} T_1^\circ(0, \beta_0) = -\frac{3\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{8\beta_0^3} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (4.3)$$

$$\frac{R}{M_0} G_2^\circ(0, \beta_0) = \frac{3}{16\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}}$$

Для локального краевого эффекта могут быть найдены аналогичные формулы, которые при $\beta = \beta_0$ принимают вид

$$\frac{R^2}{M_0} T_2^k(0, \beta_0) = -\frac{3\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{8\beta_0^3} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad (4.4)$$

$$\frac{R}{M_0} G_1^k(0, \beta_0) = \frac{3}{16\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}}$$

Продольное усилие в оболочке определяется как решение для основного состояния $T_1(\alpha, \beta) \approx T_1^\circ(\alpha, \beta)$, а кольцевое усилие – как решение для локального краевого эффекта $T_2(\alpha, \beta) \approx T_2^k(\alpha, \beta)$. Полные формулы для изгибающих моментов получаются путем сложения формул на основе решений для локального краевого эффекта (4.4) и основного состояния (4.3). На границе нагруженной области $\beta = \beta_0$ для моментов находим

$$\frac{R}{M_0} G_1(0, \beta_0) = \frac{R}{M_0} G_2(0, \beta_0) = \frac{3(1+\nu)}{16\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \beta_0^3} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (4.5)$$

Представляет интерес сравнение численных результатов по приближенным формулам с точным решением с целью установления их области применимости (фиг. 4, 5). Решение на основе второго МАС представлено кривой 3, а по формулам (4.3), (4.4) – кривой 2. Достаточно хорошее соответствие данных по формуле (4.5) (кривая 1) точному решению имеет место в широком диапазоне изменения параметра нагруженной области $\beta_0 \geq (h/R)^{1/2}$. При меньших значениях β_0 различие может стать более существенным, тогда необходимо учитывать изгибное состояние (4.1), которое по мере уменьшения параметра β_0 становится все более мощным. Отметим, что решение на основе второго МАС (кривая 3) практически совпадает с точным решением, за которое принимается решение (1.8) по общей теории оболочек.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность академику

И.Ф. Образцову и профессору Б.И. Сахарову за внимание к работе и полезное обсуждение результатов исследования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (грант N2J000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bijlaard P.P.* Stresses from local loadings in cylindrical pressure vessels // *Trans. ASME.* 1955. V. 77. № 6. P. 805–816.
2. *Bijlaard P.P.* Stresses from radial loads and external moments in cylindrical pressure vessels // *Welding Journal.* 1955. V. 34. № 12. P. 608–617.
3. *Даревский В.М.* Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках // *Прочность и динамика авиационных двигателей.* М.: Машиностроение, 1964. Вып. 1. С. 23–83.
4. *Передерий С.К., Ковальский Б.С., Кузьменко А.П.* Цилиндрическая оболочка под действием внешних продольных моментов // *Прикл. механика.* 1970. Т. 6. Вып. 7. С. 113–115.
5. *Власов В.З.* Общая теория оболочек // *Избр. тр.* Т. 1. Изд-во АН СССР, 1961. 528 с.
6. *Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
7. *Чернышев Г.Н.* О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую тонкую оболочку произвольного очертания // *ПММ.* 1963. Т. 27. Вып. 7. С. 126–134.
8. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
9. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
10. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В.* О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек // *Докл. АН СССР.* 1983. Т. 269. № 1. С. 54–56.
11. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
13. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
14. *Чернышев Г.Н.* О контактных задачах в теории оболочек // *Тр. 7-й Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.* Днепропетровск, 1969. М.: Наука, 1970. С. 898–903.

Подольск

Поступила в редакцию
21.II.1996