

УДК 539.3

© 1997 г. ЛЕВЯКОВ С.В.

НЕЛИНЕЙНЫЙ МАНОМЕТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ ДЛЯ ТРУБОК БУРДОНА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

В геометрически нелинейной постановке рассмотрена задача о нагружении внутренним давлением тороидальной оболочки произвольного поперечного сечения. Выведены деформационные соотношения и получено точное выражение для потенциала сил внутреннего давления. Сформулирован численный алгоритм расчета деформированного состояния, основанный на вычислении коэффициентов первой и второй вариации потенциальной энергии дискретной системы. Приведены результаты численных расчетов трубок с различными типами сечений.

1. Введение. Большинство работ, посвященных расчету трубок Бурдона, выполнено в линейной постановке с использованием различных подходов. Так, в [1, 2] методом Ритца получено приближенное решение задачи для случая эллиптического поперечного сечения. В [3, 4] задача определения напряженно-деформированного состояния сведена к суперпозиции двух решений, одно из которых отвечает нагружению внутренним давлением замкнутой тороидальной оболочки, а другое – случаю чистого изгиба криволинейной трубы краевыми моментами. Заметим, что приближенные решения задачи изгиба трубы эллиптического сечения даны в [5, 6]. В [7] на основе упрощенных линейных дифференциальных уравнений изучались напряжения и упругие характеристики трубок Бурдона с различными типами сечений. Оценка приближенных результатов [3] путем сравнения с решением уточненных уравнений теории тонких оболочек проведена в [8]. В [9] получены формулы, описывающие нелинейный манометрический эффект для криволинейных труб с малой эллиптичностью поперечного сечения.

В данной работе предложен численный метод расчета напряженно-деформированного состояния трубок Бурдона произвольного поперечного сечения с учетом геометрической нелинейности, позволяющий описать деформирование в области больших упругих перемещений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим трубку как сектор тороидальной оболочки с произвольной формой меридиана. Если трубка является достаточно длинной, то влиянием граничных условий на торцах допустимо пренебречь. На этом основании считаем, что напряженно-деформированное состояние не изменяется по длине оболочки. Примем, что поперечные сечения в деформированном состоянии остаются плоскими и ортогональными осевой линии, но могут деформироваться в своей плоскости. На основе принятых допущений и гипотез Кирхгофа – Лява получим следующие деформационные соотношения [10] (суммирование по i):

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(x_i^{\vee} x_i^{\vee} - 1), \quad \varepsilon_t = A_t^{-1}(\varepsilon + k^{\vee} x_1^{\vee} - kx_1)$$

$$\kappa_s = x_i^{\vee} \lambda_i^{n\vee} - x_i^{\vee} \lambda_i^n, \quad \kappa_t = A_t^{-1}(k^{\vee} \lambda_1^{n\vee} - k\lambda_1^n) \quad (i = 1, 2)$$

где ε_s , κ_s и ε_t , κ_t – деформации и искривления срединной поверхности оболочки в

меридиональном и осевом направлениях; $x_i = x_i(s)$ – декартовы координаты, задающие форму меридиана; $A_i = 1 + kx_i$ – параметр Ламе; λ_i^n – направляющие косинусы нормали к контуру поперечного сечения; ε, k – деформация и кривизна осевой линии оболочки; штрихом обозначена производная по натуральной координате s . Здесь и далее галочкой отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию.

Найдем выражение для потенциала сил внутреннего давления W , как взятую с обратным знаком работу, совершаемую силами давления p на изменение объема v , ограниченного оболочкой с единичной длиной осевой линии

$$W = -p(v^\vee - v), \quad v^\vee = \iint (1 + \varepsilon + k^\vee X_1^\vee) dX_1^\vee dX_2^\vee \quad (2.1)$$

где X_i^\vee – координаты деформированного объема. Преобразуя интеграл по площади в (2.1) к криволинейному интегралу, получим следующее выражение для потенциала W :

$$W = -p(1 + \varepsilon) \frac{1}{2} \oint (x_1^\vee x_2^{\vee'} - x_2^\vee x_1^{\vee'}) ds - pk^\vee \frac{1}{2} \oint x_1^{\vee 2} x_2^{\vee'} ds + pV$$

где V – объем в недеформированном состоянии.

Потенциальная энергия деформации упругой изотропной оболочки имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \oint (T_s \varepsilon_s + T_t \varepsilon_t + M_s \varkappa_s + M_t \varkappa_t) A_i ds$$

$$T_s = B(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_t), \quad T_t = B(\varepsilon_t + \nu \varepsilon_s), \quad B = Eh(1 - \nu^2)^{-1}$$

$$M_s = D(\varkappa_s + \nu \varkappa_t), \quad M_t = D(\varkappa_t + \nu \varkappa_s), \quad D = Bh^2 / 12$$

где T_s, T_t, M_s, M_t – усилия и моменты, относящиеся к меридиональному и осевому направлениям; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; h – толщина оболочки.

С использованием принципа стационарности полной потенциальной энергии оболочки $\delta(\Pi + W) = 0$ получим следующие уравнения равновесия:

$$\delta x_1^\vee: \quad H' - k^\vee T_t = -p(1 + \varepsilon + k^\vee x_1^\vee) x_2^{\vee'}$$

$$\delta x_2^\vee: \quad V' = p(1 + \varepsilon + k^\vee x_1^\vee) x_1^{\vee'}$$

$$\delta \varepsilon: \quad \oint T_t ds = p \frac{1}{2} \oint (x_1^\vee x_2^{\vee'} - x_2^\vee x_1^{\vee'}) ds \quad (2.2)$$

$$\delta k^\vee: \quad \oint (T_t x_1^\vee + M_t \lambda_{11}^{\vee n}) ds = p \frac{1}{2} \oint x_1^{\vee 2} x_2^{\vee'} ds$$

$$H = T_s A_t x_1^{\vee'} + (A_s^\vee)^{-1} (M_s A_t x_2^{\vee'})' - (A_s^\vee)^{-3} k^\vee M_t x_1^\vee x_2^{\vee'}$$

$$V = T_s A_t x_2^{\vee'} - (A_s^\vee)^{-1} (M_s A_t x_1^{\vee'})' + (A_s^\vee)^{-3} k^\vee M_t (x_1^\vee)^2$$

$$A_s^\vee = (x_i^{\vee'} x_i^{\vee'})^{1/2} \approx 1 + \varepsilon_s$$

Первое интегральное условие (2.2) показывает, что суммарная продольная сила в оболочке определяется в виде произведения сил давления на площадь фигуры, очерченной деформированным контуром поперечного сечения.

Рассмотрим второе интегральное условие (2.2). Если в качестве осей x_i^\vee выбрать центральные оси инерции фигуры, ограниченной деформированным контуром, то интеграл в правой части, представляющий статический момент площади этой фигуры, обратится в нуль. Таким образом, данное условие выражает равенство нулю главного момента.

Аналитическое решение выписанных уравнений без каких-либо упрощений связано со значительными трудностями, поэтому для решения поставленной задачи воспользуемся численным методом.

3. Алгоритм решения задачи. Разобьем оболочку на конечные элементы, имеющие

длину l в меридиональном направлении. В соответствии с выбранным способом аппроксимации деформационных соотношений [10] потенциальная энергия деформации элемента представляется в виде $\Pi = 1/2 \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u}$, $\mathbf{u}^T = [\varepsilon_s, \theta_1, \theta_2, \varepsilon_t, \varkappa_i]$, где \mathbf{K} – матрица жесткости; \mathbf{u} – вектор обобщенных упругих перемещений; $\varepsilon_s, \varepsilon_t, \varkappa_i$ – постоянные в пределах элемента значения деформаций и искривления; θ_i – изменения косинусов углов между нормалью в i -ом узле и секущей, соединяющей узлы элемента.

Принимая линейный закон изменения для x_i^v в пределах элемента и проводя интегрирование от 0 до l , получим следующее выражение для потенциала сил внутреннего давления для дискретной системы (суммирование по элементам):

$$W = \sum_e W_e$$

$$W_e = -p[(1 + \varepsilon)\omega + 1/6 k^v (2\omega(x_{11}^v + x_{12}^v) + x_{22}^v x_{12}^{v2} - x_{11}^{v2} x_{21}^v)] + p v_e,$$

$$\omega = 1/2 (x_{11}^v x_{22}^v - x_{12}^v x_{21}^v)$$

где v_e – постоянная величина.

Деформированное состояние конечного элемента оболочки определяется как узловыми, так и внеузловыми параметрами, образующими вектор обобщенных координат \mathbf{q} :

$$\mathbf{q}^T = [x_{11}^v, x_{21}^v, \varphi_1^v, x_{12}^v, x_{22}^v, \varphi_2^v, \varepsilon, k^v]$$

где x_{ij}^v – i -ая координата j -го узла; φ_j^v – угол поворота нормали в j -ом узле.

Рассматриваемая дискретная модель оболочки является сложной нелинейной системой, для исследования которой воспользуемся энергетическим методом. С этой целью рассмотрим разложение полной потенциальной энергии конечного элемента в ряд Тейлора по степеням приращений обобщенных координат $\Delta \mathbf{q}$ в окрестности некоторого деформированного состояния (суммирование по i):

$$\Pi + W = \Pi_0 + W_0 + \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{g} + 1/2 \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{q} + \dots \quad (3.1)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{u}' \mathbf{P} + p \mathbf{g}^W, \quad \mathbf{P} = \mathbf{K} \mathbf{u}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{u}' \mathbf{K} (\mathbf{u}')^T + P_i u_i'' + p \mathbf{H}^W \quad (i = 1, \dots, 5)$$

где \mathbf{g} , \mathbf{H} – градиент и матрица Гесса потенциальной энергии деформации конечного элемента; \mathbf{u}' , \mathbf{u}_i'' – матрицы первых и вторых производных от компонент вектора \mathbf{u} по компонентам вектора \mathbf{q} ; \mathbf{g}^W , \mathbf{H}^W – градиент и матрица Гесса потенциала сил внутреннего давления.

Отличные от нуля компоненты вектора \mathbf{g}^W для конечного элемента имеют вид

$$g_1^W = -1/2 (1 + \varepsilon) x_{22}^v - 1/6 k^v a_1 a_2, \quad g_2^W = 1/2 (1 + \varepsilon) x_{12}^v + 1/6 k^v a_3$$

$$g_4^W = 1/2 (1 + \varepsilon) x_{21}^v - 1/6 k^v a_1 a_4, \quad g_5^W = -1/2 (1 + \varepsilon) x_{11}^v - 1/6 k^v a_3$$

$$g_7^W = -\omega, \quad g_8^W = -1/6 a_1 a_3$$

Ненулевые компоненты матрицы \mathbf{H}^W элемента определяются следующими выражениями:

$$H_{11}^W = -1/3 k^v a_1, \quad H_{12}^W = 1/6 k^v a_2, \quad H_{14}^W = -1/6 k^v a_1$$

$$H_{15}^W = -1/2 (1 + \varepsilon) - 1/6 k^v a_2, \quad H_{17}^W = -1/2 x_{22}^v, \quad H_{18}^W = -1/6 a_1 a_2$$

$$H_{24}^W = 1/2 (1 + \varepsilon) + 1/6 k^v a_1, \quad H_{27}^W = 1/2 x_{12}^v, \quad H_{28}^W = 1/6 a_3$$

$$H_{44}^W = -1/3 k^v a_1, \quad H_{45}^W = -1/6 k^v a_4, \quad H_{47}^W = 1/2 x_{21}^v$$

$$H_{48}^W = -\frac{1}{6}a_1a_2, \quad H_{57}^W = -\frac{1}{2}x_{11}^V, \quad H_{58}^W = -\frac{1}{6}a_3$$

$$a_1 = x_{22}^V - x_{21}^V, \quad a_2 = 2x_{11}^V - x_{12}^V, \quad a_3 = x_{11}^{V2} + x_{11}^Vx_{12}^V + x_{12}^{V2}$$

$$a_4 = x_{11}^V + 2x_{12}^V$$

Ограничиваясь выписанными членами ряда (3.1), для ансамбля конечных элементов с помощью принципа стационарности потенциальной энергии получим следующую систему уравнений:

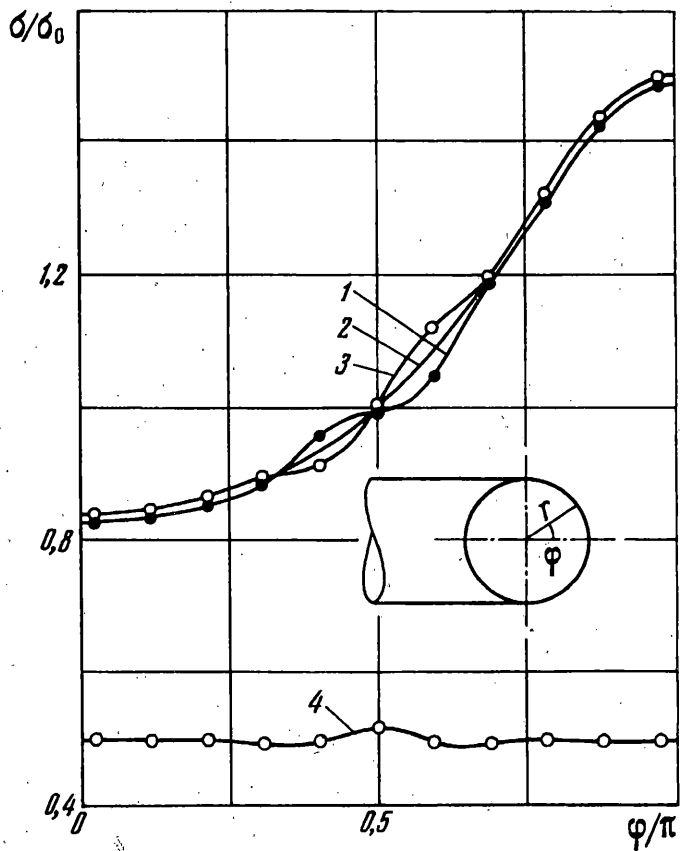
$$\mathbf{H}\delta\mathbf{q} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

где \mathbf{g} , \mathbf{H} – градиент и матрица Гесса ансамбля конечных элементов. Решение системы (3.2) представляет собой один шаг итерационного процесса нахождения равновесного состояния дискретной системы, отвечающего заданному уровню нагрузки. В качестве начального приближения выбирается вектор \mathbf{q} , соответствующий недеформированному состоянию оболочки. Линейное решение задачи получается после завершения первой итерации. Основными исходными данными являются узловые значения координат x_{ij} и направляющих косинусов нормали λ_{ij}^n .

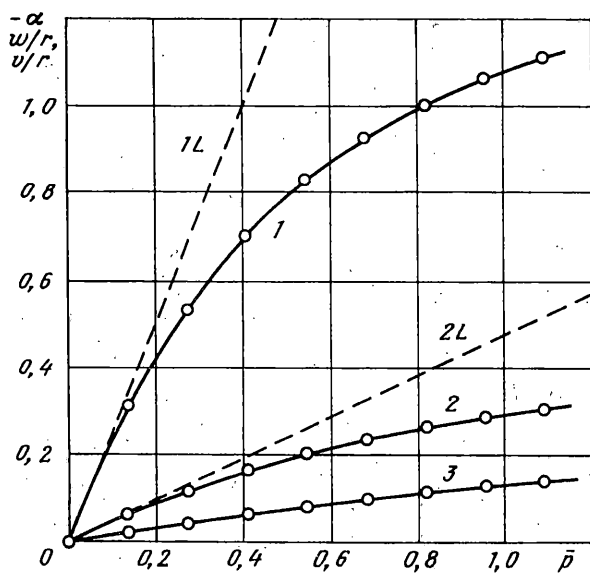
4. Численные результаты. В качестве тестового примера рассмотрена линейная задача о нагружении внутренним давлением тороидальной оболочки с круговым поперечным сечением радиуса r . В расчетах принято $r/h = 10^2$, $kr = 0,5$ и $\nu = 0$. Число конечных элементов на половину сечения $N = 21$. Расчеты показывают, что кривизна осевой линии не изменяется при нагружении оболочки. На фиг. 1 приведены графики распределения безразмерных напряжений, где $\sigma_0 = pr/h$. Кривые 1–3 соответствуют окружным напряжениям σ_θ , вычисленным для внутренней ($z = -h/2$), срединной ($z = 0$) и наружной ($z = h/2$) поверхностей оболочки. Продольные напряжения σ_r , постоянные по толщине стенки, представлены кривой 4. Полученные результаты согласуются с известным безмоментным решением для замкнутой тороидальной оболочки, за исключением области $0,3 \approx \varphi/\pi \approx 0,7$ вблизи линии нулевой гауссовой кривизны, где наблюдается незначительное возмущение напряженного состояния, вызванное изгибом стенки в окружном направлении.

Проиллюстрируем приложение разработанного алгоритма к определению напряженно-деформированного состояния трубки Бурдона эллиптического поперечного сечения. Пусть b и c – полуоси сечения причем малая полуось b лежит в плоскости кривизны трубки. Введем в рассмотрение приведенный радиус сечения, определенный по формуле $r = 2cE(e, \pi/2)/\pi$, где e – эксцентриситет эллипса; $E(e, \pi/2)$ – эллиптический интеграл II-го рода.

При низких уровнях внутреннего давления имеет место линейная зависимость $\alpha = K\bar{p}$, где $\alpha = [12(1-\nu^2)]^{1/2}(k^V - k)r^2/h$ – параметр искривления оси трубки; $\bar{p} = pr^3/(3D)$ – параметр нагрузки; K – некоторый коэффициент, зависящий от геометрических характеристик трубки. В табл. 1 даны значения K , вычисленные для различных геометрических характеристик эллиптических трубок при $h/r = 0,03$ (первые столбцы) и $h/r = 0,01$ (последние столбцы). Строки (1), (2) и (3) получены соответственно по разработанному алгоритму, формулам первого приближения решения задачи методом Ритца [2] и асимптотической формуле [3]. Решение [2] хорошо согласуется с численными результатами лишь при малых значениях параметра kr . С увеличением начальной кривизны осевой линии решение [2] дает существенную погрешность, которая возрастает с уменьшением относительной толщины стенки h/r . Основной причиной наблюдаемого расхождения сравниваемых результатов является, по-видимому, то, что в [2] при определении потенциала сил внутреннего давления не учитывалась кривизна трубки. Асимптотическое решение [3] применимо для весьма тонких оболочек с большой кривизной оси при условии $c/b < 4$. Для малых значений kr данное



Фиг. 1



Фиг. 2

Таблица 1

kr		$c/b = 2$	$c/b = 3$	$c/b = 5$	$c/b = 2$	$c/b = 3$	$c/b = 5$
0,01	(1)	0,30	0,60	1,13	1,34	2,58	4,76
	(2)	0,30	0,61	1,13	1,33	2,59	4,69
	(3)	–	–	–	0,82	0,49	–
0,1	(1)	2,04	3,80	6,76	2,68	4,93	8,64
	(2)	1,91	3,56	6,13	0,96	1,62	2,53
	(3)	1,87	3,07	3,48	2,71	5,13	9,31
0,2	(1)	2,43	4,42	7,65	2,80	5,18	9,08
	(2)	1,80	3,17	5,14	0,50	0,84	1,31
	(3)	2,39	4,35	7,13	2,81	5,38	10,04

Таблица 2

\bar{p}	$N = 4$	$N = 8$	$N = 12$	$N = 18$
0,273	0,1028	0,1146	0,1166	0,1175
0,546	0,1765	0,1976	0,2012	0,2028
0,819	0,2310	0,2566	0,2607	0,2624
1,092	0,2724	0,2996	0,3035	0,3052

решение дает ошибку в знаке, поэтому соответствующие результаты в таблице не приведены.

На фиг. 2 представлены нелинейные характеристики деформирования трубки с параметрами $c/b = 3$, $kr = 10^{-2}$, $r/h = 10^2$ и $\nu = 0,3$. Кривая 1 соответствует параметру искривления оси, а кривые 2 и 3 соответствуют безразмерным изменениям длин малой и большой полуосей сечения w/r и v/r . Штриховыми линиями 1L, 2L представлено линейное решение [2], приемлемое при $\bar{p} < 0,2$. На фиг. 3 приведены некоторые формы деформированного поперечного сечения.

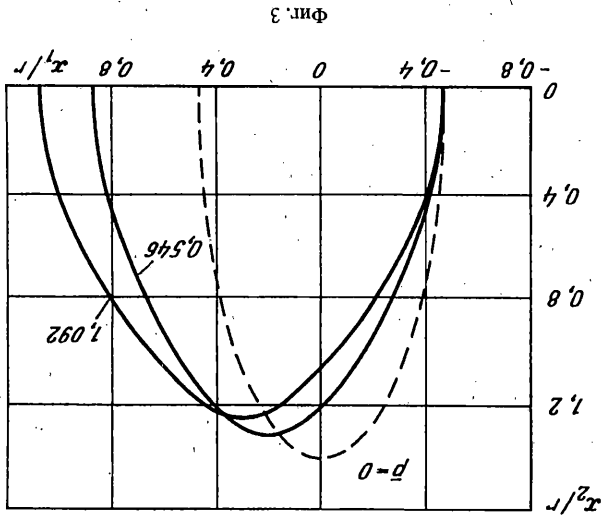
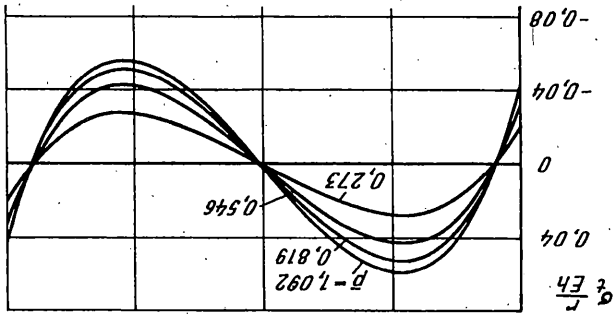
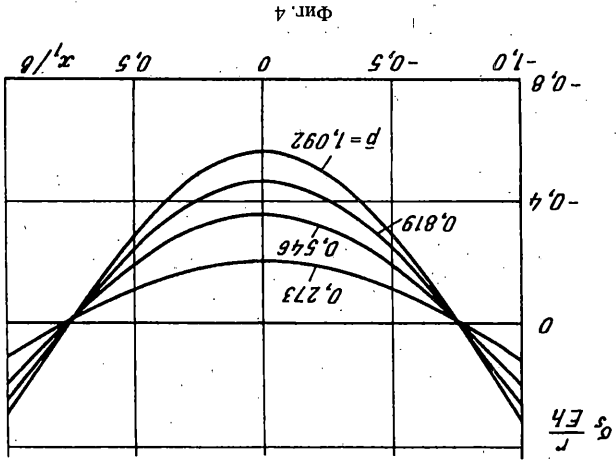
На фиг. 4 показано распределение напряжений по сечению оболочки при различных уровнях внутреннего давления. Продольные напряжения соответствуют срединной, а меридиональные напряжения – внешней поверхности оболочки. Из приведенных результатов видно, что нелинейный характер деформирования заметно сказывается на напряженном состоянии оболочки.

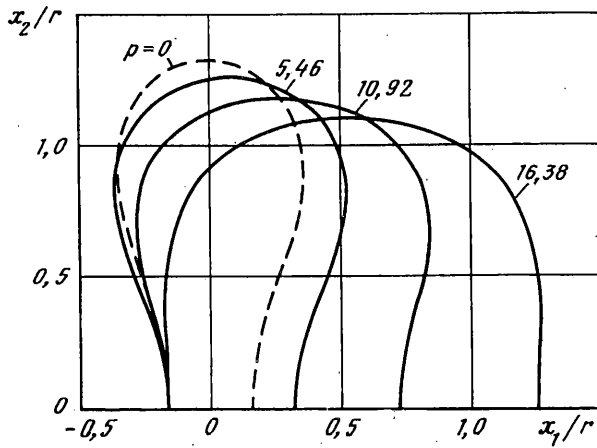
В табл. 2 представлены результаты по исследованию сходимости решения w/r в зависимости от уровня нагрузки и числа конечных элементов N . Отметим, что удовлетворительная точность достигается при разбиении половины контура сечения на 8 конечных элементов.

В качестве второго примера рассмотрим деформирование трубки, форма сечения которой определяется выражением

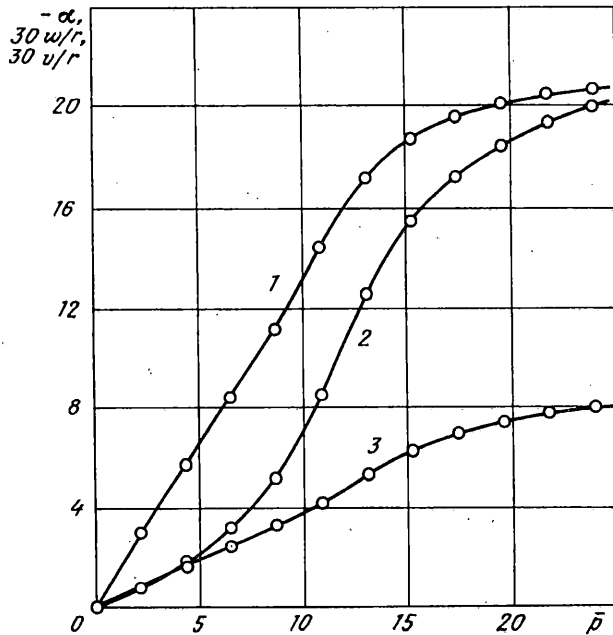
$$\theta = \xi - \sin 2\xi, \quad \xi = s/r, \quad r = \frac{1}{2\pi} \oint ds$$

где θ – угол между нормалью к контуру сечения и осью x_1 . Координаты точек сечения находятся численным интегрированием соотношений $x'_1 = -\sin\theta$, $x'_2 = \cos\theta$. На фиг. 5 изображены исходная и деформированные формы поперечного сечения оболочки. На фиг. 6 представлены нелинейные характеристики, полученные для случая $kr = 0,1$, $r/h = 10^2$, $\nu = 0,3$. Кривая 1 соответствует параметру искривления α , а кривые 2 и 3 – изменениям длин малой и большой полуосей сечения.





Фиг. 5



Фиг. 6

Рассмотренный алгоритм позволяет определить напряженно-деформированное состояние трубок Бурдона произвольного поперечного сечения с учетом влияния геометрической нелинейности. При этом на основе численных результатов могут быть уточнены известные линейные решения задачи и оценены пределы их применимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В.И. Расчет тонкостенных трубок Бурдона эллиптического сечения энергетическим методом. М.: Оборонгиз, 1940. 320 с.
2. Феодосьев В.И. Упругие элементы точного приборостроения. М.: Оборонгиз, 1949. 344 с.

3. *Clark R.A., Gilroy T.I., Reissner E.* Stresses and deformations of toroidal shells of elliptical cross section // *J. Appl. Mech.* 1952. V. 19. №. 1. P. 37–48.
4. *Власов В.В.* Об одном варианте расчета трубки Бурдона эллиптического поперечного сечения // *Изв. АН МТТ.* 1992. № 5. С. 150–155.
5. *Huber M.T.* The bending of the curved tubes of elliptic section // *Proc. V. 7 th Internat. Congr. Appl. Mech.* London, 1948. V. 1. P. 322–328.
6. *Clark R.A., Reissner E.* Bending of curved tubes // *Advances in Applied mechanics.* N.Y.: Acad. Press, 1951. V. 2. P. 93–122.
7. *Васильев Б.Н.* Напряженно-деформированное состояние манометрической трубки // *Изв. АН СССР. Механика.* 1965. № 4. С. 139–144.
8. *Whatham J.F.* An evaluation of approximate pipe bend equations // *Trans. ASME. J. Press. Vessel Technol.* 1992. V. 114. № .1. P. 8–11.
9. *Костовецкий Д.Л.* О влиянии начальной эллиптичности сечения на изгиб кривой тонкостенной трубы // *Энергомашиностроение.* 1960. Т. 3. С. 23–27.
10. *Кузнецов В.В., Левяков С.В.* Нелинейная задача Кармана для тороидальных оболочек произвольного поперечного сечения // *Изв. АН. МТТ.* 1992. № 2. С. 136–142.

Новосибирск

Поступила в редакцию
14.XII.1994