МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997

УДК 539.375

© 1997 г. Э.Б. ЗАВОЙЧИНСКАЯ, А.Г. САТТАРОВ

ВЗАИМОСВЯЗЬ ПАРАМЕТРОВ АСИММЕТРИЧНОГО СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРИ РАЗРУШЕНИИ

В элементах многих машиностроительных и строительных конструкций при эксплуатации возникает плоское напряженное состояние с непропорциональным изменением компонент напряжений во времени.
Надежность прогнозирования срока службы таких конструкций обеспечивается, в первую очередь, совершенством взаимосвязи между компонентами нагружения и временными параметрами при разрушении. В настоящей работе эта взаимосвязь найдена на основе постулата о предельных процессах сложного нагружения [1]. Показано, что полученные соотношения являются квадратичными и биквадратичными формами не зависящих от времени инвариантов процессов относительно ортогональных преобразований пространства напряжений А.А. Ильюшина [2] для рассмотренных случаев циклического нагружения. Предлагаемые соотношения хорошо согласуются с зависимостями других исследователей и имеющимися экспериментальными данными (расхождение на более 7%).

1. На наклонной площадке координатного тетраэдра с нормалью **n**, определяемой углами Эйлера (α, β, γ), задан процесс нагружения $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n(t)$. Это процесс может быть предельным в том смысле, что за $t \in [0, t^*]$ происходит достижение некоторого предельного состояния [1], например, нарушение сплошности элементарного объема при образовании трещины и др. (в таких случаях t^* называется долговечностью). Предельный процесс $\mathbf{P}_n^*$, соответствующий данному нагружению $\mathbf{P}_n$, представляется в виде [1]:

$$\mathbf{P}_n^*(t, t^*) = \mathbf{P}_n(t)\sigma^*(t^*) \tag{1}$$

где функция $\sigma^*(t^*)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$[\sigma^*(t^*)]^{-1} = \max\{\|\mathbf{J}[z, t^*, \mathbf{P}_n(\tau, \alpha, \beta, \gamma)]_{\tau=0}^{t^*}\| : z \in [0, t^*], \alpha, \beta \in [0, 2\pi], \gamma \in [0, \pi]\} \tag{2}$$

Здесь рассматривается максимум нормы образа процесса нагружения при действии некоторого оператора **J** на интервале времени $[0, t^*]$ и по всем площадкам в теле. Идея использования интегральных зависимостей (в том числе и нелинейных) при описании процессов в механике сплошной среды принадлежит А.А. Ильюшину [2, 3].

Оператор **J** представляется в различных формах в зависимости от материала [1]. Норма оператора **J** задается таким образом:

$$\|\mathbf{J}\| = \left[\sum_{i=1}^{3} (J_{i,q})^q\right]^{1/q} \tag{3}$$

где q = 1,2 для материалов первого и второго классов соответственно [1];

для материалов первой группы

$$J_{i,q}=\sum_{j=1}^{2}|\Pi_{i,q}^{-}[z,t^*,p_{i,j}(\tau)]_{\tau=0}^{t^*}|+(-1)^{1+q}|\Pi_{0,q}^{-}[z,t^*,p(\tau)]_{\tau=0}^{t^*}|\delta_{1i} \tag{4}$$

для материалов второй группы

$$J_{i,q}=\sum_{j=1}^{2}\frac{p_{i,j}^2(z)}{|\Pi_{i,q}^{+}[z,t^*,p_{i,j}(\tau)]_{\tau=0}^{t^*}|}+(-1)^{1+q}\frac{p^2(z)\delta_{1i}}{|\Pi_{0,q}^{+}[z,t^*,p(\tau)]_{\tau=0}^{t^*}|} \tag{5}$$

Здесь $\Pi_{i,q}^{\pm}=\Pi_{i,q}^{\pm}[z,t^*,f(\tau)]_{\tau=0}^{t^*}$, $i=0,1,2,3$, $q=1,2$ операторы следующего вида:

$$\Pi_{i,q}^{\pm}(f(z))=\lambda_{i,q}^{\pm}|f(z)|\mp\left|\sum_{k=0}^{\infty}\hat{\lambda}_{i,q}^{\pm}(\omega_k,t^*)f_k\varphi_k(z)\right| \quad (i=0,1,2,3) \tag{6}$$

$$f_k=\frac{1}{t^*}\int_0^{t^*}f(\tau)\varphi_k(\tau)d\tau$$

где $\varphi_k=\varphi_k(z)$ – полная ортогональная система функций на интервале $[0,t^*]$ (для материалов первой группы выбирается знак (–), а для второй – (+)); $\omega_0=0$, $\omega_k=2\pi k/t^*$, $k=1,2,\ldots$ – число циклов до разрушения.

Под $f(\tau)$ понимаются или функции $p_{i,j}(\tau)$, или функции $p(\tau)$, которые определяются в виде [1]:

$$\mathbf{P}_n(\tau)=p_i(\tau)\mathbf{n}_i,\quad p_i(\tau)=p_{i,1}(\tau)+p_{i,2}(\tau)+p(\tau)\delta_{1i}$$

$$p_{i,1}(\tau)=s_{11}(\tau)(n_{i1}n_{11}-n_{i3}n_{13})+s_{22}(\tau)(n_{i2}n_{12}-n_{i3}n_{13})$$

$$p_{i,2}(\tau)=\sum_{m,j=1}^{3}s_{mj}(\tau)n_{ij}n_{1m}(1-\delta_{mj})$$

$$p(\tau)=\sigma_{ii}(\tau)/3,\quad s_{ij}(\tau)=\sigma_{ij}(\tau)-p(\tau)\delta_{ij}\quad (i,j=1,2)$$

где нормаль к площадке $\mathbf{n}$ обозначена вектором $\mathbf{n}_1$, ортогональные векторы $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ лежат в плоскости площадки таким образом, что $(\mathbf{n}_i,\mathbf{n}_j)=\sigma_{ij}$, $\mathbf{n}_i=\mathbf{n}_i(n_{im})$; $i,j,m=1,2,3$, δ_{ij} – символы Кронеккера.

Таким образом, уравнение (2) позволяет получать соотношения между компонентами различных предельных процессов переменного нагружения, если заданы ядра интегральных операторов (6). Ядра трех операторов находятся, используя результаты экспериментов по длительной и циклической прочности материалов при следующих простых нагружениях:

а) одномерном постоянном растяжении или сжатии ($\sigma_s=\sigma$ и $\sigma=\sigma_0 h(t)$, $t\in[0,t^*]$, $h(t)$ – функция Хевисайда, σ_s – временное сопротивление) и симметричном растяжении-сжатии ($\sigma=\sigma_{-1}(\omega_i t^*)\sin(\omega_i t)$, $i=1,2,\ldots$);

б) постоянном ($\tau=\tau_s$ и $\tau=\tau_0 h(t)$) и симметричном ($\tau=\tau_{-1}(\omega_i,t^*)\sin(\omega_i t)$, $i=1,2,\ldots$) сдвигах;

в) равномерном постоянном ($\sigma_1=\sigma_2=\hat{\sigma}_s$ и $\sigma_1=\sigma_2=\hat{\sigma}_0 h(t)$) и симметричном ($\sigma_1=\sigma_2=\hat{\sigma}(\omega_i,t^*)\sin(\omega_i t)$) нагружениях.

В настоящей работе определено ядро четвертого оператора по результатам эксперимента при симметричном нагружении нормальной и касательной компонентами со сдвигом фаз, равном $\pi/2$, и отношением амплитуд 2 : 1 вида $\sigma_{11}=\tilde{\sigma}(\omega,t^*)\sin(\omega t)$, $\sigma_{12}=0{,}5\tilde{\sigma}(\omega,t^*)\cos(\omega t)$.

Найденные соотношения для ядер интегральных операторов (6) имеют следующий вид

для материалов первого класса

$$\lambda_{0,1} = (3(\eta_1 - 1)/\breve{\sigma})^{\mp 1}, \quad \lambda_{1,1} = (3(4 - 2\eta_1 - \eta_2)^{\mp 1}/\breve{\sigma})$$

$$[(\lambda_{2,1})^2 + (\lambda_{3,1})^2]^{1/2} = (2/\breve{\sigma})^{\mp 1}[(3\eta_1 + 2\eta_2 - 6)(6 - 3\eta_1 - \eta_2)]^{\mp 1/2} \tag{7}$$

$$\eta_3 \equiv \frac{\sigma_{-1}}{\tilde{\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\eta_2^2 + 2(1 - \eta_2) + \Lambda_0 + \Lambda_3 + 2\frac{\Lambda_1\Lambda_2(\Lambda_1 - \Lambda_0)}{\Lambda_3^2}\right]^{1/2}$$

$$\Lambda_0 = (\lambda_{2,1})^2(\lambda_{3,1})^2/((\lambda_{2,1})^2 + (\lambda_{3,1})^2), \quad \Lambda_1 = \Lambda_0 + \lambda_{1,1}(2 - \eta_2)$$

$$\Lambda_2 = (\lambda_{2,1})^2, \quad \Lambda_3 = [(2 - \eta_2)^2((\lambda_{2,1})^2 + (\lambda_{3,1})^2) + \Lambda_1^2]^{1/2}$$

для материалов второго класса

$$\lambda_{0,2} = (3/2\breve{\sigma})^{\mp 1}(\eta_2(A - \sqrt{4 - \eta_2^2})/\sqrt{\eta_2^2 + 9A^2})^{\mp 1}$$

(8)

$$\lambda_{1,2} = (3/\breve{\sigma})^{\mp 1}(\eta_2 A/\sqrt{\eta_2^2 + 9A^2})^{\mp 1}, \quad \lambda_{2,2} = (\eta_2/\breve{\sigma})^{\mp 1}$$

или $A_1 = A_2$ $(x = \lambda_{3,2})$, если $\eta_3 \equiv \sigma_{-1}/\tilde{\sigma} \leqslant A_1$; или $\eta_3 = A_2$ $(x = \lambda_{3,2})$, если $\eta_3 > A_1$ и $\eta_3 \leqslant A_2$ $(x = \lambda_{2,2})$; или $\lambda_{3,2} = \lambda_{2,2}$, если $\eta_3 > A_1$ и $\eta_3 \geqslant A_2$ $(x = \lambda_{2,2})$

$$A_1 = 0,5\sqrt{(\lambda_{2,2})^{\mp 2} + \frac{4}{9}(2(\lambda_{1,2})^{\mp 1} - (\lambda_{0,2})^{\mp 1})^2}$$

$$A = 2\sqrt{4 - \eta_2^2} - \sqrt{4\eta_1^2 - \eta_2^2}$$

$$A_2(x) = 0,5\sqrt{(\lambda_{2,2})^{\mp 2} + x^2/2 + B^2 + \frac{[x^2/2 + 2(\lambda_{1,2})^{\mp 1}B]^2}{4[(\lambda_{1,2})^{\mp 1} - (\lambda_{0,2})^{\mp 1}]}}$$

$$B = ((\lambda_{1,2})^{\mp 1} - 2(\lambda_{0,2})^{\mp 1})/3$$

В соотношениях (7)–(8) приняты следующие обозначения: $\breve{\sigma} = \sigma_s$, $\eta_1 = \sigma_s/\hat{\sigma}_s$, $\eta_2 = \sigma_s/\tau_s$ для величин $\lambda_{i,q} = \lambda_{i,q}^{\pm}$, $\lambda_{2,q}^{\pm} = \lambda_{3,q}^{\pm}$; $\breve{\sigma} = \sigma_0$, $\eta_1 = \sigma_0/\hat{\sigma}_0$, $\eta_2 = \sigma_0/\tau_0$ для функций $\lambda_{1,q} = \lambda_{i,q}^{\pm}(0,t^*)$, $\lambda_{2,q}^{\pm}(0,t^*) = \lambda_{3,q}^{\pm}(0,t^*)$; $\breve{\sigma} = \sigma_{-1}$, $\eta_1 = \sigma_{-1}/\hat{\sigma}$, $\eta_2 = \sigma_{-1}/\tau_{-1}$ для функций $\lambda_{i,q} = \lambda_{i,q}^{\pm}(\omega_k,t^*)$ и $\hat{\lambda}_{i,q}^{\pm}(k,t^*) = \mp[\lambda_{i,q}^{\pm}(\omega_k,t^*) - \lambda_{i,q}^{\pm}]$, $\omega_0 = 0$ $(j = 1,2,\ldots$ $\ldots, i = 0,1,2,3, q = 1,2)$.

2. Результаты исследования простых циклических нагружений представлены в [1,4]. Изучению некоторых сложных циклических процессов посвящены работы [5, 6, 7]. В данной работе рассматриваются некоторые частные случаи сложных циклических процессов при плоском напряженном состоянии следующего вида:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij,m} + \sigma_{ij,a}\sin(\omega t + \beta_{ij}) \quad (i,j = 1,2) \quad \beta_{11} = 0 \tag{9}$$

А именно, двумерное нагружение, где одна нормальная компонента напряжения изменяется симметрично, другая постоянна по времени; нагружение симметричной по времени сдвиговой и постоянной нормальной компонентами; нагружение симметричной по времени нормальной и постоянной сдвиговой компонентами.

Для процесса нагружения вида

$$\sigma_{11} = \sigma_a\sin(\omega t), \quad \sigma_{22} = \sigma_m, \quad t \in [0,t^*], \quad \sigma_m = \text{const} \tag{10}$$

Численный анализ показал, что максимум нормы оператора **J** (2)–(6) достигается при $\gamma = \pi/2$, $\sin\omega t = -1$, если $\sigma_m > 0$ или $\sin\omega t = 1$, если $\sigma_m < 0$. После аналитического нахождения максимума по α и β имеем следующие соотношения между параметрами предельного процесса ($\xi_m = \sigma_m / \sigma_a$):

$$(\eta_2 - 1)(\sigma_a^{*2} + \sigma_m^{*2}) + (2 - \eta_2)(\sigma_a^* + \sigma_m^*) = 1 \tag{11}$$

$$\sigma_a^* = \begin{cases} 1 - (\eta_2 - 1)|\sigma_m^*| & \text{при } |\xi_m| \leqslant 1 \\ [1 - (2\eta_1 + \eta_2 - 3)|\sigma_m^*|][1 - 2\sigma^*(\eta_1 - 1)]^{-1} & \text{при } |\xi_m \sigma^*| < 1 \\ (1 - |\sigma_m^*|)[2\eta_1 + \eta_2 - 3 - 2\sigma^*(\eta_1 - 1)]^{-1} & \text{при } |\xi_m \delta^*| \geqslant 1 \end{cases} \tag{12}$$

где для материалов второй и первой групп первого класса соотношения (11) и (12) соответственно.

Для материалов второго класса второй и первой групп эти соотношения представляются соответственно так:

$$\sigma_a^{*2} + \sigma_m^{*2} + (4\eta_2^2\sigma^* / (1 + \sigma^*)^2 - 1/\sigma^* - \sigma^*)\sigma_a^*\sigma_m^* = 1 \tag{13}$$

$$\sigma_a^{*2} + \sigma_m^{*2} + (\eta_2^2 - 2)\sigma_a^*\sigma_m^* = 1 \tag{14}$$

$$\sigma_a^* = \sigma_a / \sigma_{-1}(\omega, t^*), \quad \sigma_m^* = \sigma_m / \sigma_s, \quad \sigma^* = \sigma_{-1}(\omega, t^*) / \sigma_s \tag{15}$$

$$\eta_1 = \sigma_{-1}(\omega, t^*) / \hat{\sigma}(\omega, t^*), \quad \eta_2 = \sigma_{-1}(\omega, t^*) / \tau_{-1}(\omega, t^*)$$

где $2\pi N = \omega t^*$, N – число циклов до разрушения.

Для сравнения предлагаемого и известных соотношений вводится среднее квадратичное отклонение в виде

$$d = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sigma_{ij,a}^{*(k)} - \tilde{\sigma}_{ij,a}^{*(k)}}{\sigma_{ij,a}^{*(k)}} \right)^2 \right]^{1/2} \times 100\% \tag{16}$$

где амплитуды $\sigma_{ij,a}^{*(k)}$ и $\tilde{\sigma}_{ij,a}^{*(k)}$ вычисляются по каждому из сравниваемых соотношений при фиксированных средних компонентах $\sigma_{ij,m}^{*(k)}$ $(k = 1, \ldots n)$, n – число узлов ($n = 100$).

Материалы с $\eta \in [1, \sqrt{3}]$ (называемые хрупкими) отнесены к первому, а с $\eta_2 \in [\sqrt{3}, 2]$ (т.н. пластичные) ко второму классам [1]. Каждый класс подразделен на две группы в зависимости от связи амплитуды $\sigma_a^*(\omega_i, t^*)$ и среднего значения σ_m^* одномерного нагружения вида $\sigma = \sigma_m^* + \sigma_a^* \sin(\omega_i t)$, $t \in [0, t^*]$ $(i = 1, 2, \ldots)$; если кривая $\sigma_a^* = \sigma_a^*(\sigma_m^*)$ имеет выпуклость вниз или линейна, то это материалы первой группы, а если выпукла вверх, то второй.

При сопоставлении зависимости (12), $\eta_1 = 1{,}2$; $N = 10^6$, с соотношением МакДиармида для сталей 0,4%C, 3,5%NiCr, NiCrMo, 34CrMo4 и др. в виде [8]:

$$\sigma_m^{*2} + \sigma_a^{*3/2}(1 - \eta_2/2) + (\eta_2/2)\sigma_a^* = 1 \tag{17}$$

отклонение $d \leqslant 3\%$, а с зависимостью Кавады [8]:

$$(\eta_2 - 1)\sigma_a^{*2} + (2 - \eta_2)p\sigma_a^* = p^2, \quad p = 1 - (2 - \sigma_p / \sigma_{-1})\sigma_s / \sigma_p \tag{18}$$

(σ_p – предел усталости при одноосном пульсирующем нагружении вида $\sigma = \sigma_p(\omega, t^*)(1+\sin(\omega t))$, $t \in [0, t^*]$, $2\pi N = \omega t^*$) отклонение d не превышает 8%.

Рядом авторов [1], [8], [9] проведены многочисленные экспериментальные исследования усталости материалов с анализом образования и роста трещин при нагружении (10). Они приводят следующие зависимости, отражающие полученные закономерности усталостного поведения:

а) критерий Марина:

$$\sigma_a^{*2} + \sigma_m^{*2} = 1 \tag{19}$$

б) критерий Зеннера и другие

$$\sigma_a^{*2} + \sigma_m^{*} = 1 \tag{20}$$

с) критерий Труста, Эль-Магда, Миелке:

$$\sigma_a^{*2} = 4\Phi^2(\Psi^2 - \varkappa)^2[(\Psi^2 - \varkappa)^2 + (3\Psi^2 + \varkappa^2)\Phi^2]^{-1} \tag{21}$$

$$\Phi = 1 - p\sigma_m^* - (1-p)\sigma_m^{*2}, \quad \Psi = 1 - (1-p)\sigma_m^{*2}, \quad \varkappa = -p\sigma_m^*$$

$$p = [(\sigma_\Pi / 2\sigma_{-1} + (\sigma_\Pi / 2\sigma_s))^2 - 1] / [(\sigma_\Pi / 2\sigma_s)^2 - \sigma_\Pi / 2\sigma_s]$$

где σ_a^* и σ_m^* определяются по (15). Для ряда материалов [19], приведенных ниже в первом столбце, представлено среднее квадратичное отклонение d в % по соотношениям (11), $N = 10^6$ и (19), (20), (21) во втором, третьем и четвертом столбцах соответственно

34Cr4	3,0	1,2	1,4
St60	3,0	1,2	1,7
St35	3,0	1,2	10,0
25CrMo4	5,2	1,6	0,6
42CrMo4	6,4	2,0	2,0

Свойства материала EN24T описываются зависимостью (17), которая в этом случае совпадает с (11), $d = 0{,}5\%$. При сравнении соотношения (14) со следующей зависимостью, полученной при нагружении (10) согласно подходу [8]:

$$\sigma_a^* + \sigma_m^* = 1 \tag{22}$$

для NiCrMo и 0,1% C сталей отклонение $d = 2{,}6\%$, для мягкой стали $d = 5{,}7\%$, для 0,4% C и NiCr сталей $d = 6\%$.

Сопоставляя формулу (13) с дугой окружности (19), имеем: для дюралюминия $d = 13\%$, для 0,4% C и NiCr сталей d не превышает 4%.

Уравнение (2) между параметрами процесса нагружения симметричной нормальной и постоянной сдвиговой компонентами

$$\sigma_{11} = \sigma_a \sin(\omega t), \quad \sigma_{12} = \tau_m, \quad t \in [0, t^*], \quad \tau_m = \mathrm{const} \tag{23}$$

для материалов первого класса преобразуется к следующему виду:

$$A_2\sigma_a^* + [\eta_2^2(\sigma_a^{*2} + 4\sigma_m^{*2})/4 + A_1\sigma_a^*|\sigma_m^*|]^{1/2} = 1 \tag{24}$$

а для материалов второго класса имеем такое уравнение

$$4[(A_5\sigma_m^* + A_3\sigma_a^* / \lambda_{1,2}^2) + \eta_2^2 A_4^2 \sigma_a^{*2}] = \sigma_a^{*2}[A_3[(A_5\sigma_m^* + A_3\sigma_a^* / \lambda_{1,2})^2 + \eta_2^2 A_4^2 \sigma_a^{*2}]^{1/2} / \eta_2 +$$
$$+ \lambda_{1,2}(A_5 + 2A_4)\sigma_m^* + \lambda_{1,2}A_3\sigma_a^*]^2 + [2A_5\sigma_m^{*2} + 2A_3\sigma_a^*\sigma_m^* + \eta_2^2 A_4^2 \sigma_a^{*2}]^2 \tag{25}$$

где $A_i = A_i(\eta_1, \eta_2, \lambda_{1,2}, \lambda_{0,2})$, $i = 1,\dots,5$ определяется таким образом $A_1 = 12(4 - -2\eta_1 - \eta_2)[(3\eta_1 + 2\eta_2 - 6)(6 - 3\eta_1 - \eta_2)]^{1/2}$, $A_2 = 1 - \eta_2 / 2$
$A_3 = \eta_2(\lambda_{1,2} - 2\lambda_{0,2})/3$, $A_4 = [(\eta_2^2 / \lambda_{1,2} - 1)^2 - A_3^2 / \eta_2^2]^{1/2}$, $A_5 = 2A_4 - A_3 / \eta_2$

Здесь $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{0,2}$ задаются соотношениями (8) и под σ_a^*, и σ_m^* понимается следующее

$$\sigma_a^* = \sigma_a / \sigma_{-1}(\omega, t^*), \quad \sigma_m^* = \tau_m / \tau_B \tag{26}$$

Для сталей первого класса EN24T, EN25, 3%Ni, 0,9%C, CrVa и чугунов [1], [5] зависимость (24) при $\eta_1 = 1$ и соотношение МакДиармида вида

$$\sigma_m^* + \sigma_a^{*3/2}(1 - \eta_2 / 2) + (\eta_2 / 2)\sigma_a^* = 1 \tag{27}$$

совпадают ($d = 1\%$), а при сопоставлении (24) с $\eta_1 = 1{,}2$ и формулы Гафа вида (20) $d \leqslant 2{,}5\%$ (σ_a^* и σ_m^* определяются по (26)). Для статей второго класса (0,1%C, NiCr, мягкой и др.) и дюралюминия отклонение по (25) при $\eta_1 = 1{,}2$ от (20) характеризуется $d \leqslant 3{,}8\%$. Для материалов со значением η_2, равном 2 или $\sqrt{3}$, при $\eta_1 = 1$ зависимости (25) и (20) совпадают.

Соотношение (24) для материалов первого и (25) – для второго классов справедливы и для нагружения вида

$$\sigma_{12} = \tau_a \sin(\omega t), \quad \sigma_{11} = \sigma_m, \quad t \in [0, t^*], \quad \sigma_m = \text{const} \tag{28}$$

после замены σ_a^* и σ_m^* на σ_m^* и σ_a^* соответственно, $A_5 = 8 / \lambda_{1,2}$ и обозначениях

$$\sigma_a^* = \tau_a / \tau_{-1}(\omega, t^*), \quad \sigma_m^* = \sigma_m / \sigma_s \tag{29}$$

Формула Гафа и Финдли вида (19) (в обозначениях (29)) и соотношение (25) для материалов второго класса с $\eta_2 = 2$, $\eta_1 = 1$ совпадают, а при сопоставлении этой формулы с (24) для всех рассмотренных сталей первого класса $d \leqslant 5\%$. Для материалов первого класса с $\eta_1 = 1$ соотношение (24) совпадает с линейной аппроксимацией МакДиармида вида (22), где σ_a^* и σ_m^* определяются по (29).

3. Ряд работ [1, 5–7] посвящен исследованию разных частных случаев несинхронных нагружений вида

$$\sigma_{11} = \sigma_a \sin(\omega t), \quad \sigma_{12} = \mu_{12}\sigma_a \sin(\omega t + \varphi_{12}) \tag{30}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_a \sin(\omega t), \quad \sigma_{22} = \mu_{22}\sigma_a \sin(\omega t + \varphi_{22}) \tag{31}$$

Проведен численный расчет по (2) для дюралюминия [8] с $\eta_1 = \sigma_{-1} / \hat{\sigma} = 1{,}1$; $\eta_2 = \sigma_{-1} / \tau_{-1} = 1{,}9$; $\eta_3 = \sigma_{-1} / \hat{\sigma} = 1{,}08$; $\sigma^* = \sigma_{-1} / \sigma_s = 0{,}42$ и для NiCrMo стали с $\eta_1 = 1{,}2$; $\eta_2 = 1{,}64$; $\eta_3 = 1{,}1$; $\sigma^* = 0{,}58$, при нагружении (30) отношение σ_a^* / σ_{-1} в зависимости от $\varphi_{12} = 0$, $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$, $5\pi/6$, π соответственно равны:

для дюралюминия

при $\mu_{12} = 0{,}5$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,73; 0,76; 0,84; 1,0; 0,84; 0,76; 0,73

при $\mu_{12} = 1{,}0$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,46; 0,47; 0,5; 0,53; 0,5; 0,47; 0,46

при $\mu_{12} = 2{,}0$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,25; 0,26; 0,26; 0,26; 0,26; 0,26; 0,25

для NiCrMo стали

при $\mu_{12} = 0{,}5$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,63; 0,66; 0,73; 0,87; 0,73; 0,66; 0,63

при $\mu_{12} = 1{,}0$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,44; 0,46; 0,51; 0,6; 0,51; 0,46; 0,44

при $\mu_{12} = 2{,}0$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,27; 0,27; 0,29; 0,31; 0,29; 0,27; 0,27

Значения отношения σ_a^* / σ_{-1} при нагружении (31) в зависимости от $\varphi_{22} = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi$ приводятся соответственно ниже:

для дюралюминия

при $\mu_{22} = 0,5$ σ_a^* / σ_{-1} = 1,0; 1,0; 1,0; 0,94; 0,8; 0,72; 0,7

при $\mu_{22} = 1,0$ σ_a^* / σ_{-1} = 1,0; 1,0; 1,0; 0,75; 0,61; 0,55; 0,53

при $\mu_{22} = 2,0$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,5; 0,5; 0,5; 0,47; 0,4; 0,36; 0,35

для NiCrMo стали

при $\mu_{22} = 0,5$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,9; 0,9; 0,93; 0,94; 0,83; 0,77; 0,75

при $\mu_{22} = 1,0$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,82; 0,84; 0,88; 0,84; 0,7; 0,63; 0,61

при $\mu_{22} = 2,0$ σ_a^* / σ_{-1} = 0,45; 0,45; 0,47; 0,47; 0,42; 0,38; 0,37

Результаты расчета согласуются с имеющимися экспериментальными данными для таких нагружений [8] (отклонение не превышает 7%).

Анализ численных результатов нагружения (31) при $\mu_{22} = -1$ и изменении φ_{22} в диапазоне $[0, \pi]$ показал, что предел циклической прочности σ_a^* монотонно увеличивается от значения τ_{-1} к значению $\hat{\sigma}$. В диапазоне $\varphi_{22} \in [0,6\pi, \pi]$ этот предел выше предела прочности $\hat{\sigma}$, что подтверждается экспериментально. Анализ численных результатов при нагружении (30) показал, что наибольшее увеличение прочности (на 15–20%) происходит при $\varphi_{12} = \pi / 2$.

Для изучения влияния среднего напряжения на циклическую прочность ряда сталей [8] при несинхронном нагружении были численно исследованы некоторые частные случаи вида

$$\sigma_{11} = \sigma_a(\mu_{1,m} + \sin(\omega t)), \quad \sigma_{22} = \sigma_a(\mu_{2,m} + \mu_{2,a} \sin(\omega t + \varphi_{22})) \tag{32}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_a(\mu_{1,m} + \sin(\omega t)), \quad \sigma_{12} = \sigma_a(\mu_{12,m} + \mu_{12,a} \sin(\omega t + \varphi_{12})) \tag{33}$$

Найдено, что при нагружении (32) и $\varphi_{22} \leqslant 0,1\pi$ наблюдается повышение прочности до 15–20%, а при $\varphi_{22} \in [0,1\pi, \pi]$ – ее уменьшение на 20–35%. При нагружении (33) наибольшее увеличение циклической прочности материалов (на 40%) достигается при $\varphi_{12} = \pi / 6$. Вышеупомянутые закономерности согласуются с экспериментальными данными [1, 5, 6].

4. Рассматривается образ процесса (1) в изображающем пространстве А.А. Ильюшина [2] и его инварианты относительно ортогональных преобразований этого пространства.

Процесс (1) в изображающем пространстве А.А. Ильюшина [2], в котором вектор напряжения σ определяется по формуле

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = S_k(t)\mathbf{e}_k = (3(\sigma_{11} - p) / 2, \sqrt{3}\sigma_{22} / 2, \sqrt{3}\sigma_{12}), \quad p = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3 \tag{34}$$

представляется следующим образом [7]:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 \sin(\omega t) + \mathbf{r}_2 \cos(\omega t) \tag{35}$$

$$\mathbf{r}_0 = (\sigma_{11,m} - \sigma_{22,m} / 2, \sqrt{3}\sigma_{22,m} / 2, \sqrt{3}\sigma_{12,m})$$

$$\mathbf{r}_1 = (\sigma_{11,a} - \sigma_{22,a} \cos\beta_{22} / 2, \sqrt{3}\sigma_{22,a} \cos\beta_{22} / 2, \sqrt{3}\sigma_{12,a} \cos\beta_{12})$$

$$\mathbf{r}_2 = (\sigma_{22,a} \sin\beta_{22} / 2, -\sqrt{3}\sigma_{22,a} \sin\beta_{22} / 2, -\sqrt{3}\sigma_{12,a} \sin\beta_{12})$$

Его траектория при $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \neq 0$ лежит в плоскости π, определяемой уравнением $(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$, и является эллипсом, характеризующимся положением центра эллипса, его полуосями, ориентацией плоскости π и эллипса в этой плоскости.

В случае коллинеарности векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ траектория процесса является отрезком. Пять не зависящих от времени инвариантов относительно ортогональных преобразований пространства А.А. Ильюшина [3] вместе со средним значением и амплитудой среднего напряжения образуют полную систему инвариантов процесса (35).

Траектория процесса (10) лежит в плоскости ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) и является отрезком длины $I_1 = |\mathbf{r}_1| = \sigma_a$, перпендикулярном $\mathbf{e}_2$ с расстоянием до центра $I_2 = |\mathbf{r}_0| = \sigma_m$ от начала координат (угол между $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{e}_1$ равен 120°). В инвариантах процесса (10) (I_1, I_2) соотношения (11)–(14) приводятся к виду:

$$g(I_1, I_2, \omega, t^*) = 1 \tag{36}$$

с функцией g либо линейной по I_1, I_2 (соотношение (12)), либо в виде квадратичной формы инвариантов (соотношения (11), (13), (14)).

Траектория процесса (23) лежит в плоскости ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$) и является отрезком длины $I_1 = |\mathbf{r}_1| = \sigma_a$, перпендикулярном $\mathbf{e}_3$ с расстоянием до центра $I_2 = |\mathbf{r}_0| = \sqrt{3}|\tau_m|$. Соотношение (24) представляется в виде (36) с функцией g как квадратичной формой инвариантов $I_1 = \sigma_a$ и $I_2 = \sqrt{3}|\tau_m|$, а (25) получается, если рассматривать функцию g как биквадратичную форму от I_1, I_2 и $\sqrt{Q(I_1, I_2)}$, где $Q = Q(I_1, I_2)$ – некоторая квадратичная форма инвариантов.

Для нагружения (28), траектория которого – отрезок длины $I_1 = \sqrt{3}|\tau_a|$, лежащей в плоскости ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$), перпендикулярный $\mathbf{e}_1$ с расстоянием до центра $I_2 = |\sigma_m|/2$, функция g (36) имеет вид подобный g для случая нагружения (23).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Завойчинский Б.И.* Долговечность магистральных и технологических трубопроводов. М.: Недра, 1992. 271 с.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность, основы общей математической теории. М.: Физматгиз, 1963. 271 с.
3. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
4. *Завойчинская Э.Б.* Об одном обобщении классических теорий прочности для простых циклических нагружений // Аналитические численные и экспериментальные методы в механике. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 90–98.
5. *Завойчинская Э.Б.* Об одном представлении предельных процессов несинхронного нагружения // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 121–136.
6. *Завойчинская Э.Б.* Предельные циклические процессы при плоском состоянии // Вопросы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 68–71.
7. *Завойчинская Э.Б.* Представление процессов несинхронного нагружения в пространстве напряжений // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1989. № 4. С. 99–102.
8. *McDiarmid D.L.* A general criterion for higt cycle multiaxial fatigue failure // Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct. 1991. V. 44. No. 4. P. 429–453.
9. *Zenner H., Heidenreich R., Richter I.* Bewertung von Festigkeitshypothesen fur kombinierte statische und schwingende sowie synchrone schwingende Beanspruchung // Z. Werkstofftech. 1983. No. 14. S. 391–406.

Москва

Поступила в редакцию
16.III.1995