

УДК 539.375.6

© 1997 г. А.А. ЕВТУШЕНКО, Ю.А. ПЫРЬЕВ

## **ВЛИЯНИЕ ИЗНАШИВАНИЯ НА РАЗВИТИЕ ТЕРМОУПРУГОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА**

Под термоупругой неустойчивостью (ТУН) при взаимодействии твердых тел понимают неограниченное возрастание контактных характеристик (температуры, давления, величины износа) при незначительном изменении входных параметров [1–4]. ТУН обычно связывают с наличием неравномерного расширения материалов и перераспределением контактного давления [2–6]. Неустойчивость такого рода, вызываемая попаданием в зону трения частиц износа, окисных пленок и другими факторами, приводит к тому, что на определенных участках области взаимодействия возникает повышенное контактное давление, а в прилегающих к ним зонах происходит понижение давления и даже разделение поверхностей. Такие эффекты экспериментально наблюдались в торцевых уплотнителях [5, 7, 8], тормозных устройствах [1, 9], электрических коллекторах [10]. В работе [3] проведено исследование влияния скорости скольжения и физико-механических параметров трибосистемы на термоупругую неустойчивость на примере скольжения полубесконечной упругой лопасти по поверхности жесткого полупространства. Такая расчетная схема моделирует работу торцевых уплотнителей ротора двигателя Ванделя. На этой же расчетной схеме в работе [11] исследовано влияние на неустойчивость нелинейности функции изнашивания.

Другой важный класс термоупругой неустойчивости стационарного состояния контакта связан с наличием нелинейного термического сопротивления между контактирующими телами [12, 13, 14].

При работе трибосопряжений возможны ситуации, когда возмущение установившегося состояния будет однородным по поверхности трения. Эти возмущения могут быть вызваны, например, пульсациями нагрузки, резким изменением температуры окружающей среды, действием эксплуатационных перегрузок и т.д. Работа [15] посвящена исследованию ТУН в конструкциях типа торцевых и радиальных уплотнителей при наличии осесимметричных возмущений.

Условия возникновения теплового взрыва (неограниченной контактной температуры) и термосиловой устойчивости (убывание со временем давления и температуры на контакте) в предположении линейной зависимости коэффициентов трения и износостойкости от температуры рассмотрены в задаче контактного взаимодействия упругого слоя с жестким штампом [16], а в случае неидеального теплового контакта двух сжимаемых равномерно скользящих слоев в [17]. Процесс теплопроводности в слоях считается квазистационарным. Вопрос устойчивости квазистационарного решения термоупругой задачи износа рассмотрен также в [18].

В данной работе исследуются развитие во времени характеристик термоупругого контакта при наличии износа, фрикционного нагрева и заневолренности (отсутствия сближения) контактирующих тел. Предполагаем, что область контакта и геометрия тел таковы, что можно принять одномерную модель. Применение одномерных моделей оправдано и тем, что на них удается проследить характерные моменты, присущие реальным узлам трения.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим упругий теплопроводящий слой толщины  $L$ , который жестко заземлен на одной (левой) поверхности, а на другой (правой) поверхности сжимается жесткой теплоизолированной бесконечной плитой на

величину  $U = U_0 \varphi_U(t)$  (фиг. 1). Плита движется в направлении оси  $Z$  с постоянной скоростью  $V$ . В области контакта плиты со слоем возникают силы трения и, как следствие, происходит тепловыделение, приводящее к нагреванию слоя и изнашиванию его поверхности. Между слоем и окружающей средой через левую поверхность происходит теплообмен по закону Ньютона.

Требуется определить поле приращения температуры  $T(X, t)$ , термоупругих перемещений  $U(X, t)$ ,  $W(X, t)$  по осям  $X$  и  $Z$  соответственно, и величину износа слоя  $U^w(t)$ .

В математическом плане задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений квазистатической несвязанной термоупругости Ламе–Неймана [19]:

$$\frac{\partial^2 U(X, t)}{\partial X^2} = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial T(X, t)}{\partial X}, \quad \frac{\partial^2 W(X, t)}{\partial X^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\left( \frac{\partial^2 T(X, t)}{\partial X^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial T(X, t)}{\partial t} \quad (0 < X < L, 0 < t < t_c) \right)$$

при механических условиях

$$U(0, t) = W(0, t) = 0, \quad \sigma_{xz}(L, t) = fP(t) \quad (P(t) = -\sigma_{xx}(L, t)) \quad (1.2)$$

$$U(L, t) = -U_0 \varphi_U(t) + U^w(t) \quad (0 < t < t_c)$$

тепловых условиях

$$K \frac{\partial T(0, t)}{\partial X} = hT(0, t) \quad (1.3)$$

$$K \frac{\partial T(L, t)}{\partial X} = fVP(t) \quad (0 < t < t_c)$$

и начальных условиях

$$T(X, 0) = 0 \quad (0 < X < L) \quad (1.4)$$

где  $f$  – коэффициент трения,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга,  $K$  – коэффициент теплопроводности,  $k$  – коэффициент температуропроводности,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $h$  – коэффициент теплообмена.

Принимаем модель абразивного износа [20], для которой

$$U^w(t) = K_U V \int_0^t P(\tau) d\tau \quad (0 < t < t_c) \quad (1.5)$$

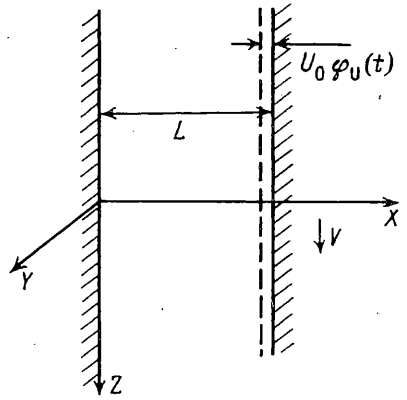
коэффициент износостойкости  $K_U$  считаем постоянным.

Время контакта  $t_c$  определяется как время при котором контактное давление не отрицательно, т.е.  $P(t) \geq 0$  при  $t \in (0; t_c)$ .

Нормальные и касательные напряжения для слоя находятся согласно соотношений Дюамеля–Неймана [19]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - 2\nu} \left[ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{\partial U}{\partial X} - \alpha T \right], \quad \sigma_{xz} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{\partial W}{\partial X} \quad (1.6)$$

С учетом соотношений (1.6) и граничных условий (1.2), из уравнений (1.1) находим



Фиг. 1

контактное давление и перемещение  $W$  в виде

$$P(t) = \frac{E_1}{L} \left[ U_0 \varphi_U(t) - U^w(t) + \alpha_1 \int_0^L T(\xi, t) d\xi \right] \quad (1.7)$$

$$W(X, t) = \frac{1+\nu}{E} fP(t)X, \quad E_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha_1 = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

Введем следующие безразмерные величины и характерные параметры:

$$x = X/L, \quad \tau = t/t_*, \quad \tau_c = t_c/t_*, \quad u = U/U_0, \quad \nu = V/V_*$$

$$u^w = U^w/U_0, \quad \theta = T/T_*, \quad p = P/P_*, \quad H = E\alpha k/K(1-\nu)$$

$$\Omega_1 = f\Omega, \quad \Omega = H(1-\nu)/(1-2\nu), \quad k_U = E_1 K_U, \quad \text{Bi} = hL/K$$

$$t_* = L^2/k, \quad V_* = k/L, \quad T_* = U_0/(\alpha L), \quad P_* = E_1 U_0/L$$

Тогда из (1.1), (1.3)–(1.5), (1.7) получим краевую задачу теплопроводности

$$\partial^2 \theta(x, \tau) / \partial x^2 = \partial \theta(x, \tau) / \partial \tau \quad (0 < x < 1, 0 < \tau < \tau_c)$$

$$\partial \theta(0, \tau) / \partial x = \text{Bi} \theta(0, \tau), \quad \partial \theta(1, \tau) / \partial x = \Omega_1 \nu p(\tau) \quad (0 < \tau < \tau_c) \quad (1.8)$$

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (0 < x < 1)$$

$$p(\tau) = \varphi_U(\tau) - u^w(\tau) + \int_0^1 \theta(\xi, \tau) d\xi, \quad u^w(\tau) = k_U \nu \int_0^1 p(\xi) d\xi \quad (1.9)$$

**2. Метод решения.** Применяем к уравнениям (1.8), (1.9) интегральное преобразование Лапласа по времени  $\tau$ . Для перехода в область оригиналов воспользуемся теоремой разложения и теоремой умножения изображений [21]. В результате получим решение краевой задачи (1.8), (1.9):

$$\theta(x, \tau) = \Omega_1 \nu \varphi_U(\tau) * \frac{d}{d\tau} g(x, \tau), \quad u^w(\tau) = \nu \varphi_U(\tau) * \frac{d}{d\tau} I(\tau) \quad (2.1)$$

$$p(\tau) = \varphi_U(\tau) + \nu \varphi_U(\tau) * \frac{d}{d\tau} G(\tau)$$

$$g(x, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_3(x, s_m)}{\Delta'(s_m)} \exp(s_m \tau), \quad G(\tau) = G_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta_4(s_m)}{s_m \Delta'(s_m)} \exp(s_m \tau) \quad (2.2)$$

$$I(\tau) = I_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_U \Delta_1(s_m)}{s_m \Delta'(s_m)} \exp(s_m \tau), \quad G_0 = -\frac{1}{\nu}, \quad I_1 = -G_0$$

$$\tilde{\nu}_1 = \frac{\nu_0}{1-\Omega_2}, \quad \Omega_2 = \frac{k_U}{\Omega_1}, \quad \nu_0 = \frac{\text{Bi}_1}{\Omega_1}, \quad \text{Bi}_1 = \frac{\text{Bi}}{1+\text{Bi}/2}$$

$$\Delta'(s_m) = 0,5 \{ s_m [( \text{Bi} + 1 ) S_m + C_m - \nu \Omega_1 s_m^{-1} [ C_m - S_m + \text{Bi} ( S_m + 2 C_m^0 ) ] ] +$$

$$+ 2 [ \Delta_1(s_m) - \Omega_1 \nu \Delta_2(s_m) ] + k_U \nu [ (1 + \text{Bi}) S_m + C_m ] \}$$

$$\Delta_1(s_m) = \text{Bi} C_m + s_m S_m, \quad \Delta_2(s_m) = S_m - \text{Bi} C_m^0$$

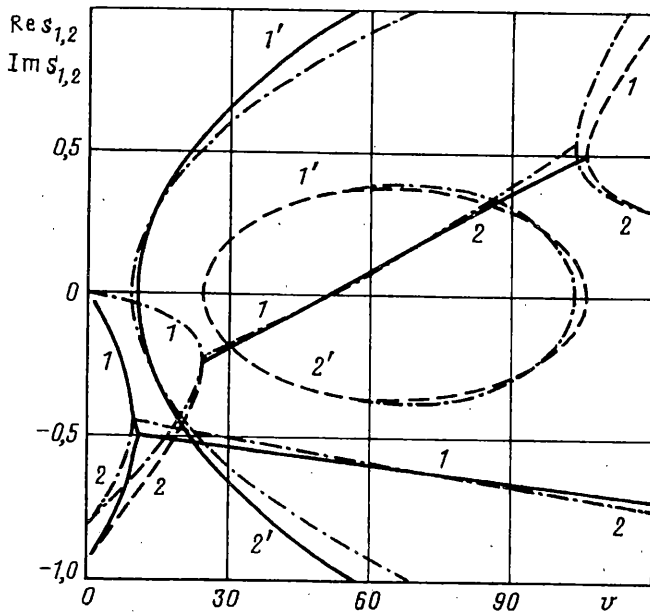
$$\Delta_3(x, s_m) = \text{Bi} S_m^x + C_m^x, \quad \Delta_4(s_m) = \Omega_1 [ s_m \Delta_2(s_m) - \Omega_2 \Delta_1(s_m) ]$$

$$S_m = \begin{cases} \mu_m^{-1} \sin \mu_m, & \nu < \nu_2 \\ \mu_m^{-1} \text{sh} \mu_m, & \nu > \nu_3 \end{cases}, \quad C_m = \begin{cases} \cos \mu_m, & \nu < \nu_2 \\ \text{ch} \mu_m, & \nu > \nu_3 \end{cases}, \quad C_m^0 = \frac{1 - C_m}{s_m}$$

$$S_m^x = \begin{cases} \mu_m^{-1} \sin \mu_m x, & \nu < \nu_2 \\ \mu_m^{-1} \text{sh} \mu_m x, & \nu > \nu_3 \end{cases}, \quad C_m^x = \begin{cases} \cos \mu_m x, & \nu < \nu_2 \\ \text{ch} \mu_m x, & \nu > \nu_3 \end{cases}$$

$$\varphi(\tau) * q(\tau) = \int_0^{\tau} \varphi(\xi) q(\tau - \xi) d\xi$$

где звездочка обозначает свертку функций по времени,  $H(t)$  – функция Хевисайда,



Фиг. 2

$s_m$  – корни характеристического уравнения  $\Delta(s) = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , ( $\Delta(s) = s\Delta_1(s) - v\Delta_4(s)$ ).

Отметим, что  $\text{Im} s_m = 0$ , ( $s_m = -\mu_m^2$ ) при  $m = 3, 4, \dots$ , а при  $m = 1, 2$ , корни, в зависимости от входных параметров задачи, лежат в правой или левой половине комплексной плоскости  $s$ . Изменение действительной и мнимой части корней  $s_1$  и  $s_2$  в зависимости от безразмерной скорости  $v$  показано на фиг. 2. Кривые 1 и 1' (2 и 2') соответствуют действительной и мнимой части корня  $s_1(s_2)$ . При  $\Omega_2 \geq 1$  они всегда лежат в левой половине комплексной плоскости, причем при  $v < v_2$ , или  $v > v_3 > 0$ , они отрицательны, а при  $v_2 < v < v_3$  – комплексно-сопряженные (сплошные линии на фиг. 2,  $\Omega_2 = 1,37$ ,  $\Omega_1 = 1,87 \cdot 10^{-2}$ ,  $\text{Bi} = 1,43$ ). Когда  $0 < \Omega_2 < 1$  корни при  $v < v_2$  отрицательны, при  $v_2 < v < v_1$  – комплексно-сопряженные с отрицательно действительной частью, при  $v_1 < v < v_3$  – комплексно-сопряженные с положительной действительной частью, при  $v_3 < v$  – корни положительны  $s_m = \mu_m^2$ ,  $m = 1, 2$  (штриховые кривые на фиг. 2,  $\Omega_2 = 0,137$ ,  $\Omega_1 = 1,87 \cdot 10^{-2}$ ,  $\text{Bi} = 1,43$ ).

В случае отсутствия износа ( $\Omega_2 = 0$ ), корни характеристического уравнения лежат на действительной оси ( $\text{Im} s_m = 0$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ ), причем при  $v < v_0 - \text{Re} s_m < 0$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , а при  $v > v_0 - \text{Re} s_m < 0$ ,  $m = 2, 3, \dots$ ,  $\text{Re} s_1 > 0$ .

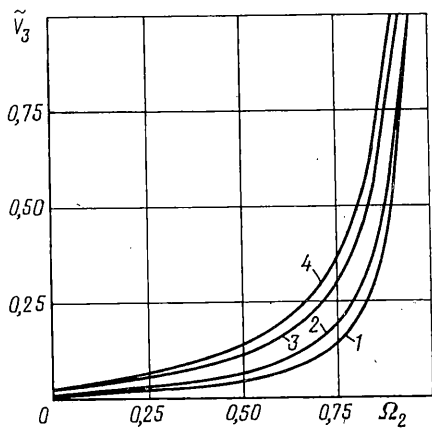
С величиной  $\pi/\text{Im} s_1$  можно связать время контакта  $\tau_c$ : чем больше величина  $\text{Im} s_1$ , тем меньше время контакта. Эта величина соответствует полупериоду колебаний функции  $I(\tau)$ ,  $G(\tau)$ ,  $g(x, \tau)$ . Величина  $\text{Re} s_1 > 0$  отображает закономерность возрастания характеристик контакта по закону  $\exp(\text{Re} s_1)$  и их экстремальные значения.

Для малых значений  $s$  корни  $s_1$  и  $s_2$  могут быть записаны в явном виде

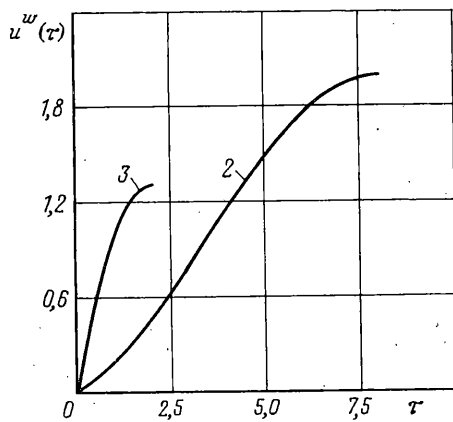
$$s_{1,2} = -\tilde{\alpha} \pm \tilde{\omega} \quad (2.3)$$

$$\tilde{\alpha} = 1/2ba^{-1}, \quad \tilde{\omega} = |\tilde{\alpha}| \sqrt{1 - 4ac/b^2}, \quad \text{Bi}_4 = \frac{1 + \text{Bi}/4}{6(1 + \text{Bi}/2)}$$

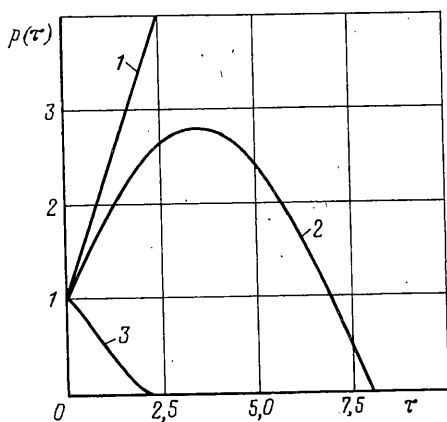
$$a = \tilde{v}_1 / \text{Bi}_1 - v, \quad b = \tilde{v}_1 - v, \quad c = v\tilde{v}_1 k_U$$



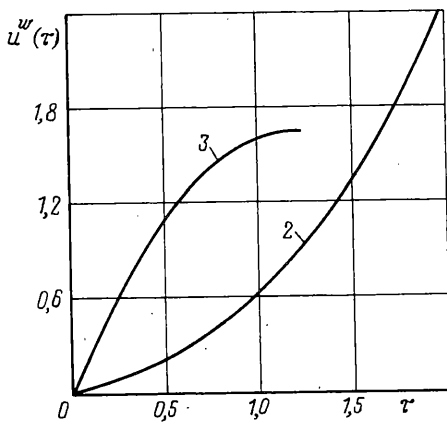
Фиг. 3



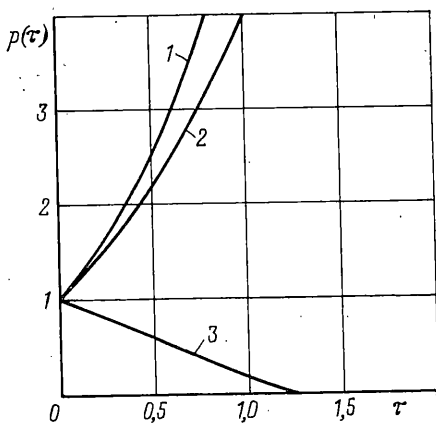
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Изменение действительной и мнимой части приближения корней  $s_1$  и  $s_2$  в зависимости от безразмерной скорости  $\nu$  представлены на фиг. 2 штрих-пунктирными кривыми.

Соотношения (2.3) позволяют написать приближенные выражения для значений  $\nu_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ), т.е.  $\nu_m \approx \tilde{\nu}_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ), где

$$\tilde{\nu}_m = \tilde{\nu}_1 \frac{1 + 2\Omega_3(1 \pm \sqrt{1 - \text{Bi}_2/\Omega_3})}{1 + 4\Omega_3 \text{Bi}_1 \text{Bi}_4} \quad (m = 2, 3) \quad (2.4)$$

$$\Omega_3 = \frac{\Omega_2}{1 - \Omega_2}, \quad \text{Bi}_2 = \frac{1 + 5 \text{Bi} / 6 + 5 \text{Bi}^2 / 24}{(1 + \text{Bi} / 2)^2}$$

Зависимость размерной скорости  $\tilde{V}_3 = \tilde{\nu}_3 V_*$  от параметра  $\Omega_2$  для разных значений параметра  $\text{Bi}$  представлено на фиг. 3. Кривые 1–4 построены для  $\text{Bi} = 0,5; 1; 5; 20$  соответственно,  $V_* = 1,97 \cdot 10^{-4}$  м с<sup>-1</sup>. При  $\Omega_2 \rightarrow 1$  имеет место асимптотика  $\tilde{\nu}_3 \sim [\Omega_1(1 - \Omega_2)\text{Bi}_4]^{-1}$ .

В качестве примера в дальнейшем изучим характеристики термоупругого контакта в процессе абразивного износа при постоянной по времени величина сжатия слоя, т.е.  $\varphi_U(\tau) = H(\tau)$ .

На основе исследования аналитических свойств трансформант решений (2.1), получены следующие асимптотики характеристик термоупругого контакта для малых значений времени

$$\theta(1, \tau) = \nu \Omega_1 2\sqrt{\tau/\pi} + O(\tau^{1.5}), \quad p(\tau) = 1 + \nu \Omega_1(1 - \Omega_2)\tau + O(\tau^2) \quad (2.5)$$

$$u^w(\tau) = \nu k_U \tau + O(\tau^2)$$

Соотношения (2.1)–(2.5), графики на фиг. 2–3 позволяют прогнозировать поведение характеристик термоупругого контакта заневоленного слоя в условиях фрикционного нагрева и абразивного износа.

Параметр  $\Omega_2 = KK_U(1 - \nu)/f\alpha k(1 + \nu)$  характеризует иерархию износа и теплового расширения.

В случае отсутствия износа  $\Omega_2 = 0$  при скоростях меньших критического значения  $\nu_0$ , с течением времени контактное давление и температура выходят на стационарный режим

$$p_c = \frac{\nu_0}{\nu - \nu_0}, \quad \theta_c(x) = \frac{x \text{Bi} + 1}{\text{Bi}} p_c \Omega_2 \nu$$

так как за счет теплоотдачи в системе приток и отток тепла взаимокompенсируются. Чем ближе скорость  $\nu$  к своему критическому значению  $\nu_0$ , тем время выхода на стационарный режим увеличивается.

При скоростях выше критической  $\nu > \nu_0$  происходит рост температуры и контактного давления по экспоненциальному закону. Система не успевает охладиться. Имеет место фрикционная термоупругая неустойчивость, т.е. при сколь угодно малом внешнем возмущении системы (в нашем случае сжатии слоя) происходит экспоненциальный рост температуры и контактного давления.

При  $0 < \Omega_2 < 1$ , т.е. когда величина температурного расширения преобладает над величиной износа, при  $\nu \leq \nu_2$  время контакта  $\tau_c = \infty$  и характеристики контакта со временем стремятся к своим стационарным значениям  $p_c = 0$ ,  $\theta_c(x) = 0$ ,  $u_w = 1$ . Чем ближе  $\nu$  к  $\nu_2$ , тем время выхода на стационарный режим увеличивается. При  $\nu_2 < \nu < \nu_3$  время контакта ограничено. Минимальное время контакта будет при скоростях  $\nu \approx (\nu_2 + \nu_3)/2$ , т.е. когда максимального значения достигает величина  $\text{Im } s_1$ . При приближении скорости  $\nu$  к  $\nu_3$  максимальные значения характеристик контакта увели-

чиваются. При скорости  $v$  больше критической  $v_3$  (области выше соответствующих кривых на фиг. 3) имеет место фрикционная термоупругая неустойчивость, т.е. характеристики контакта экспоненциально возрастают по закону  $\exp(s_1\tau)$ .

При  $\Omega_2 \geq 1$ , т.е. когда величина износа преобладает над величиной температурного расширения и  $v \leq v_2$  характеристики контакта со временем стремятся к стационарному решению задачи (стационарное контактное давление  $p_c = 0$ , стационарная температура  $\theta_c(x) = 0$ , стационарная величина износа  $u^w = 1$ ). При  $v \geq v_2$  время контакта  $\tau_c$  ограничено, хотя формально стационарное решение существует. С возрастанием скорости скольжения время контакта уменьшается.

Контактное давление при  $\Omega_2 \geq 1$  всегда монотонно стремится к нулю, в отличие от случая  $0 < \Omega_2 < 1$ , когда оно имеет максимум.

**3. Численные результаты.** Для иллюстрации теоретических исследований поведения характеристик фрикционного контакта проведен численный анализ решения задачи для случая стального слоя ( $\alpha = 14 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $K = 21 \text{ Вт м}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $k = 5,9 \times 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $E = 190 \times 10^9 \text{ Па}$ ) при  $L = 3 \times 10^{-2} \text{ м}$ , коэффициенте Био  $Bi = 1,43$ ,  $U_0 = 1 \times 10^{-6} \text{ м}$ ,  $f = 1 \times 10^{-2}$  для разных значений коэффициента  $k_U$  характеризующего величину износа и при разных скоростях. Значения параметров обезразмеривания следующие:  $t_* = 153 \text{ с}$ ,  $V_* = 1,97 \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ ,  $P_* = 8,53 \times 10^6 \text{ Па}$ . Величине  $k_U = 0$  ( $\Omega_2 = 0$ ) соответствует значение критической скорости  $v_0 = 44,6$ , величине  $k_U = 0,1 \cdot 10^{-13}$  ( $\Omega_2 = 0,137$ ) – значения характерных скоростей  $\tilde{v}_1 = 51,7$ ,  $\tilde{v}_2 = 24,2$  и значение критической скорости  $\tilde{v}_3 = 103$ , величине  $k_U = 0,1 \cdot 10^{-12}$  ( $\Omega_2 = 1,37$ ) – значение  $\tilde{v}_2 = 9,38$ .

На фиг. 4–5 показаны соответственно зависимости безразмерной величины износа  $u^w(\tau)$  и безразмерного контактного давления  $p(\tau)$  от безразмерного времени  $\tau$  (число Фурье). Безразмерная скорость скольжения  $V = 50$ . В случае отсутствия износа  $\Omega_2 = 0$  кривые обозначены номером 1. Кривые 2 соответствуют значению параметра  $\Omega_2 = 0,137$ . Кривые 3 соответствуют значению  $\Omega_2 = 1,37$  ( $v < v_2$ ). При отсутствии износа (кривая 1) наблюдается фрикционная ТУН для  $v > v_0$ .

На фиг. 6–7 показаны те же зависимости для скорости скольжения  $v = 106$ . В случае отсутствия износа  $\Omega_2 = 0$ ,  $v > v_0$  (кривая 1) и в случае малого износа  $\Omega_2 = 0,137$ ,  $v > v_3$ , (кривые 2) наблюдается фрикционная ТУН.

Таким образом, в явном виде построено и проанализировано решение одномерной модели фрикционного контакта с учетом разогрева от действия сил трения и наличия износа.

Для рассматриваемой модели определены условия возникновения ТУН ( $v > v_3$ ,  $\Omega_2 < 1$ ). Установлено, что ТУН возникает не только при условии расположения нулей характеристического уравнения в правой половине комплексной плоскости параметра преобразования Лапласа ( $v > v_2$ ,  $\Omega_2 < 1$ ), но и их достаточно близком расположении к действительной оси. При  $\Omega_2 \rightarrow 0$  они переходят в условие термосиловой неустойчивости  $v > v_0$  для соответствующей квазистационарной задачи [16, 17].

Учет изнашивания приводит к тому, что критическое значение скорости  $v_3$ , при котором возникает ТУН, увеличивается и при  $\Omega_2 \geq 1$  (когда преобладает износ над термоупругим расширением) ТУН вовсе исчезает. Таким образом, износ выступает стабилизирующим фактором.

Установленные аналитические значения для характерных скоростей позволяют прогнозировать поведение во времени основных контактных параметров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. V. 312. № 1510. P. 381–394.
2. Burton R.A., Nerlikar V., Kilaparti S.R. Thermoelastic instability in a seal-like configuration // Wear. 1973. V. 24. № 2. P. 177–188.

3. *Dow T.A., Burton R.A.* Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear // *Wear*. 1972. V. 19. № 3. P. 315–328.
4. *Lebeck A.O.* The effect of ring deflection and heat transfer of the thermoelastic instability of rotating face seals // *Wear*. 1980. V. 59. № 1. P. 121–133.
5. *Dow T.A.* Thermoelastic effects in a thin sliding seal – a review // *Wear*. 1980. V. 59. № 1. P. 31–52.
6. *Дай Т., Бэртон Р.* Влияние износа на возникновение термоупругих колебаний трущегося контакта // *Проблемы трения и смазки*. 1973. № 1. С. 79–84.
7. *Дай Т., Стоквел Р.* Экспериментальная проверка термоупругой неустойчивости контакта скольжения // *Проблемы трения и смазки*. 1977. № 3. С. 53–59.
8. *Netzel J.P.* Observations of thermoelastic instability in mechanical face seals // *Wear*. 1980. V. 59. № 1. P. 135–148.
9. *Dow T.A.* Thermoelastic effects in brakes // *Wear*. 1980. V. 59. № 1. P. 213–221.
10. *Burton R.A., Bryant M.* Transient thermal deformation in electrical brushes // *J. Therm. Stresses*. 1981. V. 4. № 2. P. 223–235.
11. *Моров В.А.* Влияние нагрузки на термоупругую неустойчивость фрикционного контакта // *Исследование триботехнических систем в условиях холодного климата*. Якутск: Изд-е Якут. Филиала СО АН СССР. 1985. С. 52–59.
12. *Barber J.R., Zhang R.G.* Transient behaviour and stability for the thermoelastic contact of two rods of dissimilar materials // *Intern. J. Mech. Sci.* 1988. V. 30. № 9. P. 691–704.
13. *Zhang R., Barber J.R.* Effect of material properties on the stability of static thermoelastic contact // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1990. V. 57. № 2. P. 365–369.
14. *Yeo Taein, Barber J.R.* Stability of thermoelastic contact of a layer and a half-plane // *J. Therm. Stresses*. 1991. V. 14. № 4. P. 371–388.
15. *Моров В.А.* Анализ термоупругой неустойчивости в трибосистемах типа подвижных уплотнителей при осесимметричном возмущении // *Исследование триботехнических систем в условиях холодного климата*. Якутск: Изд-е Якут. Филиала СО АН СССР. 1985. С. 21–33.
16. *Александров В.М., Аннакулова Г.К.* Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения // *Трение и износ*. 1990. Т. 11. № 1. С. 24–28.
17. *Александров В.М., Аннакулова Г.К.* Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // *Трение и износ*. 1992. Т. 13. № 1. С. 154–160.
18. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Методы решения контактных задач термоупругости с учетом износа взаимодействующих поверхностей // *ПМТФ*. 1985. № 3. С. 129–131.
19. *Коваленко А.Д.* Термоупругость. Киев. Вища шк., 1975. 216 с.
20. *Archard J.F.* The temperature of rubbing surfaces // *Wear*. 1959. V. 2. № 6. P. 438–455.
21. *Мартыненко В.С.* Операционное исчисление. Киев: Вища школа, 1973. 267 с.

Львов

Поступила в редакцию  
19.VII.1995