МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1997

УДК 539.376

© 1997 г. **Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ**

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ЗАДАННОЙ НА ГРАНИЦЕ КИНЕМАТИКОЙ

Исследование устойчивости невозмущенного состояния в физическом теле относительно малых возмущений приводит к линеаризованной краевой проблеме, включающей в себя систему линейных по скоростям уравнений в области, систему граничных условий, снесенных на невозмущенные поверхности тела, и, возможно, начальные условия. В случае стационарного основного состояния эта проблема сводится к задаче на собственные значения. Примером здесь служит классическая задача Орра – Зоммерфельда для одномерного сдвига линейной вязкой жидкости [1].

Подобная методика применима и при изучении устойчивости тел с нелинейными определяющими соотношениями. Структура соответствующих уравнений здесь будет существенно сложнее чем в линейной модели. Для вязкопластических течений задача осложняется наличием жестких зон, границы которых могут меняться в процессе возмущенного движения [2].

Данная работа посвящена постановке линеаризованной краевой задачи устойчивости тела с достаточно общей связью напряжений и скоростей деформаций, допускающей как упрочнение, так и существование предела текучести. Основное течение рассматривается в плоской односвязной области, на границе которой заданы кинематические условия. Обсуждаются случаи, когда трехмерная картина возмущений может быть сведена к двумерной.

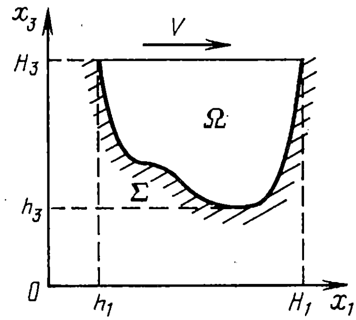
На основе метода интегральных соотношений строятся различные независимые оценки устойчивости основного течения. В эти оценки входят физические свойства материала (скалярное определяющее соотношение), геометрия области и максимальная скорость скольжения в невозмущенном состоянии.

1. Краевая задача устойчивости тела с произвольным скалярным соотношением. Рассмотрим процессы деформирования несжимаемых тел, напряжения $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ и скорости деформаций $v_{ij}(\mathbf{x}, t)$, в которых связаны тензорно линейными определяющими соотношениями

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mathrm{M}v_{ij}, \quad \mathrm{M} = T/U \tag{1.1}$$

$$T = [(\sigma_{ij} + p\delta_{ij})(\sigma_{ij} + p\delta_{ij})/2]^{1/2}$$

где T – максимальное касательное напряжение, $U = (2v_{ij}v_{ij})^{1/2}$ – максимальная скорость скольжения, $p = -\sigma_{jj}/3$ – функция давления. Скалярное определяющее соотношение, связывающее инварианты T и U и характеризующее реологию материала, выберем в довольно общем виде: $T = T(U)$. В случаях, когда кривая $T(U)$ имеет выпуклости вверх ($\ddot{T} < 0$) или вниз ($\ddot{T} > 0$), речь идет о материалах соответственно с мягкой и жесткой характеристиками [3]. Здесь и далее точка означает производную от скалярной функции по скалярному аргументу U. Единственная физически линейная модель, описываемая (1.1), – ньютоновская жидкость с динамической вязкостью μ – имеет место, если $\mathrm{M}(U) \equiv \mu$. Среды, для которых $\lim T(U) = 0$ при $U \to 0$, принято называть нелинейно вязкими жидкостями, а для которых $\lim T(U) = \tau_s > 0$ при $U \to 0$, – вязкопластическими телами с пределом текучести при сдвиге τ_s. Деформирование таких тел происходит лишь там, где $T(\mathbf{x}, t) > \tau_s$, остальная же область занята жестким, упругим либо вязкоупругим [2, 4] ядром течения.



Фиг. 1

В дальнейшем при выводе оценок устойчивости будем давать ограничения на вид зависимости $T(U)$. В частности, будем выделять случаи, когда график этой зависимости имеет горизонтальные (идеальная пластичность; переход от восходящей диаграммы к падающей) или вертикальные (абсолютно жесткая модель, начиная с некоторого U) касательные.

В [5] приведена линеаризованная постановка в возмущениях краевой задачи устойчивости основного движения для материала со скалярным соотношением $T = \tau_s + \mu U[1 - F(U)]$. Дадим ее здесь в терминах функции $\mathrm{M}(U)$. Кроме того, развивая результаты [5], выведем достаточные условия, при которых трехмерная картина возмущений произвольного нестационарного плоского течения сводится к двумерной.

В эйлеровой декартовой системе координат $(Ox_1x_2x_3)$ уравнения устойчивости в возмущениях несжимаемого тела Ω имеют вид

$$-p_{,i} + 2(\mathrm{M}_0 v_{ij} + U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{ijkl}^\circ v_{kl})_{,j} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j^\circ v_{i,j} + v_{i,j}^\circ v_j \tag{1.2}$$

$$v_{i,i} = 0 \tag{1.3}$$

$$\mathrm{M}_0 \equiv \mathrm{M}(U_0), \quad \mathrm{M}_0^\bullet \equiv (d\mathrm{M}/dU)(U^\circ), \quad V_{ijkl}^\circ = 2v_{ij}^\circ v_{kl}^\circ / (U^\circ)^2$$

Здесь $v_i^\circ(\mathbf{x}, t)$, $v_{ij}^\circ(\mathbf{x}, t)$, $U^\circ(\mathbf{x}, t)$ – компоненты вектора скорости, тензора скоростей деформаций и максимальная скорость скольжения основного движения. Уравнения (1.2), (1.3) записаны в безразмерном виде, причем одна из физических величин, входящих в базис обезразмеривания, – плотность тела. В качестве двух других могут быть выбраны, например, характерные скорость и линейный размер области Ω.

Линеаризация граничных условий представлет собой их снесение с возмущенных границ на невозмущенные. Предположим, что течение полностью занимает односвязную область Ω с кусочногладкой границей Σ, уравнение которой с течением времени в эйлеровом пространстве не меняется. Пусть на Σ заданы кинематические граничные условия, которые остаются прежними при переходе из невозмущенного состояния в возмущенное, т.е.

$$\mathbf{x} \in \Sigma: \quad \delta\mathbf{v} = 0 \tag{1.4}$$

На фиг. 1 изображена возможная область Ω и возможное задание на ней граничных условий, удовлетворяющих (1.4).

В случае стационарного основного движения сведем краевую задачу (1.2)–(1.4) к спектральной проблеме. Для этого выпишем отдельные гармоники по осям (Ox_1), (Ox_2):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}^\vee(x_3)\exp(is_m x_m + \alpha t) \tag{1.5}$$

$$p(\mathbf{x}, t) = p^\vee(x_3)\exp(is_m x_m + \alpha t) \tag{1.6}$$

где s_1, s_2 – вещественные компоненты волнового вектора $\mathbf{s}$, s_3 формально положим равным нулю, а $\alpha = \alpha_* + \alpha_{**}$ – комплексная частота. Со знаком α_* связана устойчивость основного движения системы. Критерием устойчивости является неравенство $\alpha_* < 0$.

Подставим (1.5), (1.6) в систему (1.2), (1.3) и получим для комплексных амплитуд $\mathbf{v}^\vee$, $p^\vee$:

$$-is_m p^\vee - \delta_{m3} p^{\vee\prime} + 2\mathrm{M}_{0,j} v^\vee_{jm} + 2(U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{mjkl})_{,j} v^\vee_{kl} + 2is_j \mathrm{M}_0 v_{jm} +$$

$$+2is_j U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{mjkl} v^\vee_{kl} + \mathrm{M}_0(is_m v_3^{\vee\prime} + v_m^{\vee\prime\prime} + \delta_{3m} v_3^{\vee\prime\prime}) + 2U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{m3kl} v^{\vee\prime}_{kl} =$$

$$= \alpha v_m^\vee + v_j^\circ(is_j v_m^\vee + \delta_{j3} v_m^{\vee\prime}) + v^\circ_{m,j} v_j^\vee \tag{1.7}$$

$$is_k v_k^\vee + v_3^{\vee\prime} = 0 \tag{1.8}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x_3, знаки вариаций опущены.

2. Сведение трехмерной картины возмущений к двумерной. Ограничим невозмущенное движение классом плоских течений $v_1^\circ = v_1^\circ(x_1, x_3)$, $v_2^\circ \equiv 0$, $v_3^\circ = v_3^\circ(x_1, x_3)$, возмущения же, по-прежнему, оставим трехмерными. Умножим уравнение (1.7) на s_m и просуммируем по m. Предварительно вводя обозначения $s = (s_m s_m)^{1/2}$, $u_1^\vee = s_m v_m^\vee / s$, $u_3^\vee = v_3^\vee$, $q^\vee = sp^\vee / s_1$, $\gamma = \alpha s / s_1$, будем иметь

$$-isq^\vee + \frac{s}{s_1}\mathrm{M}_{0,j}(is_j u_1^\vee + isv_j^\vee + \delta_{3j} u_1^{\vee\prime}) + 2(U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{mjkl})_{,j} \frac{s_m}{s_1} v^\vee_{kl} +$$

$$+\frac{s}{s_1}\mathrm{M}_0(-s^2 u_1^\vee + u_1^{\vee\prime\prime}) + 2iU^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{mjkl} \frac{s_j s_m}{s_1} v^\vee_{kl} + 2U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{m3kl} \frac{s_m}{s_1} v^{\vee\prime}_{kl} =$$

$$= \gamma u_1^\vee + v_j^\circ \frac{s}{s_1}(is_j u_1^\vee + \delta_{j3} u_1^{\vee\prime}) + v^\circ_{m,j} v_j^\vee \frac{s_m}{s_1} \tag{2.1}$$

Третье уравнение (1.7) и условие несжимаемости (1.8) в новых переменных имеют вид

$$-q^{\vee\prime} + \frac{s}{s_1}\mathrm{M}_{0,j}(is_j u_3^\vee + v_j^{\vee\prime} + \delta_{3j} u_3^{\vee\prime}) + 2(U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{3jkl})_{,j} \frac{s}{s_1} v^\vee_{kl} +$$

$$+\frac{s}{s_1}\mathrm{M}_0(-s^2 u_3^\vee + u_3^{\vee\prime\prime}) + 2iU^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{3jkl} \frac{s_j s}{s_1} v^\vee_{kl} + 2U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V^\circ_{33kl} \frac{s}{s_1} v^{\vee\prime}_{kl} =$$

$$= \gamma u_3^\vee + v_j^\circ \frac{s}{s_1}(is_j u_3^\vee + \delta_{j3} u_3^{\vee\prime}) + v^\circ_{3,j} v_j^\vee \frac{s}{s_1} \tag{2.2}$$

$$isu_1^\vee + u_3^{\vee\prime} = 0 \tag{2.3}$$

Рассмотрим теперь вместо (1.5), (1.6) двумерную картину возмущений в плоскости (Ox_1x_3):

$$v_1(x_1,\ x_3,\ t) = u_1(x_3)\exp(isx_1 + \gamma t),\ v_2 = 0 \tag{2.4}$$

$$v_3(x_1,\ x_3,\ t) = u_3(x_3)\exp(isx_1 + \gamma t) \tag{2.5}$$

$$p(x_1,\ x_3,\ t) = q(x_3)\exp(isx_1 + \gamma t) \tag{2.6}$$

Подставляя (2.4)–(2.6) в (1.2), (1.3), получим

$$-isq + \mathrm{M}_{0,j}(isu_1\delta_{1j} + isu_j + u_1'\delta_{3j}) + 2(U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{1jkl}^\circ)_{,j} u_{kl} +$$

$$+\mathrm{M}_0(-s^2 u_1 + u_1'') + 2iU^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{11kl}^\circ s u_{kl} + 2U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{13kl}^\circ u_{kl}' = \gamma u_1 +$$

$$+v_j^\circ(is\delta_{1j}u_1 + \delta_{3j}u_1') + v_{1,j}^\circ u_j \tag{2.7}$$

$$-q' + \mathrm{M}_{0,j}(isu_3\delta_{1j} + u_j' + u_3'\delta_{3j}) + 2(U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{3jkl}^\circ)_{,j} u_{kl} +$$

$$+\mathrm{M}_0(-s^2 u_3 + u_3'') + 2iU^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{13kl}^\circ s u_{kl} + 2U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{33kl}^\circ u_{kl}' = \gamma u_3 +$$

$$+v_j^\circ(is\delta_{1j}u_3 + \delta_{3j}u_3') + v_{3,j}^\circ u_j \tag{2.8}$$

$$isu_1 + u_3' = 0 \tag{2.9}$$

Идея преобразования Сквайра, предложенного в [6] для одномерного сдвига ньютоновской жидкости, заключается в сравнении систем уравнений, полученных для трехмерной и двумерной в плоскости сдвига картин возмущений. Если эти системы совпадают с точностью до коэффициента s_1/s при числе Рейнольдса, то в силу неравенства $s_1 < s$ и пропорции $\alpha/s_1 = \gamma/s$ устойчивость волны возмущения, распространяющейся под углом к плоскости основного сдвига, повышается. В этом и состоит теорема Сквайра.

Формальное обобщение преобразования Сквайра на случай произвольного плоского основного движения и достаточно общего типа сред проведено в настоящей работе выше. Оно приводит к сравнению систем (2.1)–(2.3) и (2.7)–(2.9). Как видно, уравнения (2.7), (2.8) существенно отличаются от уравнений (2.1), (2.2) и не могут быть получены из последних переобозначением коэффициентов. Это говорит о невозможности сведения в столь общем случае трехмерной картины возмущений к двумерной. На подобный факт в теории устойчивости неньютоновских жидкостей обращалось внимание и ранее [7].

Выделим здесь два важных независимых частных случая.

А. Пусть $\mathrm{M}(U) \equiv \mu = 1/\mathrm{Re}$, т.е имеется линейная вязкая жидкость. Тогда уравнения (2.1), (2.2) упростятся и примут вид

$$-isq^\vee + \frac{s}{s_1 \mathrm{Re}}(-s^2 u_1^\vee + u_1^{\vee\prime\prime}) = \gamma u_1 + iv_1^\circ s u_1^\vee + v_3^\circ \frac{s}{s_1} u_1^{\vee\prime} + v_{1,j}^\circ v_j \tag{2.10}$$

$$-q^{\vee\prime} + \frac{s}{s_1 \mathrm{Re}}(-s^2 u_3^\vee + u_3^{\vee\prime\prime}) = \gamma u_3 + iv_1^\circ s u_3^\vee + v_3^\circ \frac{s}{s_1} u_3^{\vee\prime} + v_{3,j}^\circ \frac{s}{s_1} v_j \tag{2.11}$$

а уравнения (2.7), (2.8) запишутся в виде

$$-isq + \frac{1}{\mathrm{Re}}(-s^2 u_1 + u_1'') = \gamma u_1 + iv_1^\circ s u_1 + v_3^\circ u_1' + v_{1,j}^\circ u_j \tag{2.12}$$

$$-q' + \frac{1}{\mathrm{Re}}(-s^2 u_3 + u_3'') = \gamma u_3 + iv_1^\circ s u_3 + v_3^\circ u_3' + v_{3,j}^\circ u_j \tag{2.13}$$

Сравнивая (2.10), (2.11) с (2.12), (2.13), видно, что трехмерные возмущения сводимы к двумерным только, если $v_3^\circ \equiv 0$ и $v_1^\circ = v_1^\circ(x_3)$, т.е. невозмущенное течение должно быть чистым одномерным сдвигом в плоскости (Ox_1x_3). Следовательно, даже физической линейности модели недостаточно для обобщения утверждения Сквайра на произвольное плоское основное течение.

В. Пусть

$$V^{\circ}_{mjkl} = \tfrac{1}{2}(\delta_{m1}\delta_{k1}\delta_{j3}\delta_{l3} + \delta_{j1}\delta_{k1}\delta_{m3}\delta_{l3} + \delta_{j1}\delta_{l1}\delta_{m3}\delta_{k3} + \delta_{m1}\delta_{l1}\delta_{j3}\delta_{k3}) \tag{2.14}$$

т.е изучается устойчивость одномерного сдвига в плоскости $(Ox_1x_3)(\upsilon^{\circ}_1 \equiv \equiv \upsilon^{\circ}(x_3),\ \upsilon^{\circ}_2 = \upsilon^{\circ}_3 \equiv 0,\ U^{\circ} = |\upsilon^{\circ\prime}|)$ [8]. Подставим (2.14) в уравнения (2.1), (2.2) и (2.7), (2.8). После некоторых преобразований вместо (2.1), (2.2) будем иметь

$$-isq^{\vee} + \frac{s}{s_1}\mathrm{M}_0(-s^2u_1^{\vee} + u_1^{\vee\prime\prime}) + \frac{s}{s_1}[U^{\circ}\mathrm{M}_0^{\bullet}(isu_3^{\vee} + u_1^{\vee\prime})] + \frac{s}{s_1}\mathrm{M}_0'(isu_3^{\vee} + u_1^{\vee\prime}) -$$

$$-\frac{s_2}{s_1}[U^{\circ}\mathrm{M}_0^{\bullet}(is_2\upsilon_3^{\vee} + \upsilon_2^{\vee\prime})]' = \gamma u_1^{\vee} + is\upsilon^{\circ}u_1^{\vee} + \upsilon^{\circ\prime}u_3^{\vee} \tag{2.15}$$

$$-q^{\vee\prime} + \frac{s}{s_1}\mathrm{M}_0(-s^2u_3^{\vee} + u_3^{\vee\prime\prime}) + 2\frac{s}{s_1}\mathrm{M}_0'u_3^{\vee\prime} + \frac{is^2}{s_1}U^{\circ}\mathrm{M}_0^{\bullet}(isu_3^{\vee} + u_1^{\vee\prime}) -$$

$$-\frac{iss_2}{s_1}U^{\circ}\mathrm{M}_0^{\bullet}(is_2\upsilon_3^{\vee} + \upsilon_2^{\vee\prime}) = \gamma u_3^{\vee} + is\upsilon^{\circ}u_3^{\vee} \tag{2.16}$$

а вместо (2.7), (2.8):

$$-isq + \mathrm{M}_0(-s^2u_1 + u_1'') + [U^{\circ}\mathrm{M}_0^{\bullet}(isu_3 + u_1')]' + \mathrm{M}_0'(isu_3 + u_1') =$$

$$= \gamma u_1 + is\upsilon^{\circ}u_1 + \upsilon^{\circ\prime}u_3 \tag{2.17}$$

$$-q' + \mathrm{M}_0(-s^2u_3 + u_3'') + 2\mathrm{M}_0'u_3' + isU^{\circ}\mathrm{M}_0^{\bullet}(isu_3 + u_1') = \gamma u_3 + is\upsilon^{\circ}u_3 \tag{2.18}$$

Видно, что, если $is_2\upsilon_3^{\vee} + \upsilon_2^{\vee\prime} = 0$ (т.е. $\upsilon_{23}^{\vee} = 0$), то (2.15), (2.16) с точностью до коэффицинта s/s_1 при функции M_0 совпадают с (2.17), (2.18) соответственно.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (аналог теоремы Сквайра для материалов с произвольным скалярным соотношением). В случае одномерного сдвигового течения в плоскости (Ox_1x_3) среди всех нарастающих трехмерных возмущений, удовлетворяющих условию $\upsilon_{23} = 0$, всегда можно найти двумерное в той же плоскости (Ox_1x_3), нарастающее с той же скоростью, но при большем значении функции M_0.

Ограничение $\upsilon_{23} = 0$ является достаточным в условии теоремы 1. Оно допускает учет довольно широкого класса возмущений, выходящих из плоскости (Ox_1x_3). Роль критического числа Рейнольдса Re* (точнее, числа обратного к нему) играет критическая кривая $[T(U) - T(0)]/U$.

Отметим здесь невозможность обобщения теоремы Сквайра на другие эйлеровы ортогональные системы координат, например, цилиндрическую (r, θ, z). При анализе устойчивости движения в плоскостях (r, θ) (течения Куэтта – Тейлора) и (r, z) (продольные течения внутри поверхностей вращения) необходимо учитывать возмущения в третьих направлениях либо искусственно ограничивать их. Такие возмущения могут существенно влиять на переход из ламинарного режима в турбулентный и на смену типов устойчивостей. Соответствующими примерами из теории гидродинамической устойчивости ньютоновских жидкостей могут служить образования тейлоровских вихрей и спиральных движений в плоском круговом течении Куэтта [9] и турбулентных пробок в пуазейлевом течении в круглой трубе.

3. Достаточные интегральные оценки устойчивости в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{(2)}$. Исследуем двумерные возмущения (v_1; v_3), накладываемые на плоское невозмущенное состояние $v_1^\circ = v_1^\circ(x_1,\ x_3,\ t)$, $v_2^\circ \equiv 0$, $v_3^\circ = v_3(x_1,\ x_3,\ t)$. Систему уравнений (1.2), (1.3) путем исключения p сведем к одному уравнению

$$\varepsilon_{im}(\mathrm{M}_0(\varepsilon_{il}\psi_{,jl} + \varepsilon_{jl}\psi_{,il}) + U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{ijkl}^\circ(\varepsilon_{kn}\psi_{,ln} + \varepsilon_{ln}\psi_{,kn}))_{,jm} =$$

$$= \frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \varepsilon_{jl}(\psi_{,l}\psi_{,jk}^\circ + \psi_{,l}^\circ\psi_{,jk})_{,k} \tag{3.1}$$

относительно функции тока ψ: $v_i = \varepsilon_{im}\psi_{,m}$, ε_{im} – двумерный символ Леви-Чивиты.

Кинематические граничные условия (1.4) примут вид $\mathbf{x} \in \Sigma$: grad $\psi = 0$ или в силу односвязности области Ω и определения ψ с точностью до константы

$$\mathbf{x} \in \Sigma:\ \psi = 0;\ \mathrm{grad}\ \psi = 0 \tag{3.2}$$

Для анализа линеаризованной краевой задачи (3.1), (3.2) воспользуемся методом интегральных соотношений. В последнее время этот метод нашел широкое применение при исследовании устойчивости сдвиговых течений идеальной и вязкой жидкости с учетом стратификации, электромагнитных свойств, рэлеевского трения и так далее (см. обзор [10]).

Пусть ψ (x_1, x_3, t) – элемент вещественнозначного гильбертова пространства $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{(2)}$ (Ω), являющегося замыканием множества $\mathbb{C}_0^{(\infty)}(\Omega)$ по метрике пространств $\mathbf{W}_2^{(2)}(\Omega)$ [11]. Эта метрика вводится скалярным произведением (J – мультиндекс)

$$(\psi_1,\ \psi_2)_{W_2^{(2)}} = \sum_{|J|\leqslant 2} \int_\Omega D^J\psi_1 D^J\psi_2 d\Omega,\ \ \psi_1,\ \psi_2 \in C_0^{(\infty)}(\overline{\Omega}) \tag{3.3}$$

$$|J| = j_1 + \ldots + j_N;\ \ D^J\psi \equiv \partial^{|J|}\psi / (\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_N^{j_N})$$

Умножим обе части (3.1) на ψ и проинтегрируем по неподвижной области Ω. Из условия несжимаемости основного течения следует, что интеграл от последнего слагаемого в правой части (3.1) равен нулю. С учетом граничных условий (3.2) получим

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}(I_1^2 + I_3^2) = \int_\Omega v_{i,j}^\circ \psi_{,i}\psi_{,j} d\Omega - \varepsilon_{im}\int_\Omega\ [\mathrm{M}_0(\varepsilon_{il}\psi_{,jl} + \varepsilon_{jl}\psi_{,il}) +$$

$$+ U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{ijkl}^\circ(\varepsilon_{kn}\psi_{,ln} + \varepsilon_{ln}\psi_{,kn})]\psi_{,jm} d\Omega \tag{3.4}$$

$$I_{j_1 \ldots j_N}^2(t) \equiv \int_\Omega\ (D^J\psi)^2 d\Omega$$

Оценим с помощью неравенства Шварца в $\mathbf{W}_2^{(2)}$ первый интеграл в правой части (3.4). Получим цепочку неравенств

$$\int_\Omega v_{i,j}^\circ \psi_{,i}\psi_{,j} d\Omega \leqslant \int_\Omega |v_{i,j}^\circ||\psi_{,i}||\psi_{,j}| d\Omega \leqslant q_{ij} I_i I_j \leqslant$$

$$\leqslant \left(q_{11} + \frac{q_{13} + q_{31}}{2}\right)(I_1^2 + I_3^2),\quad q_{ij}(t) \equiv \sup_\Omega |v_{i,j}^\circ| \tag{3.5}$$

Следуя далее [12], параметризуем кинематику основного движения

$$v_{11}^\circ = -v_{33}^\circ = \tfrac{1}{2} U^\circ \cos\beta,\quad v_{13}^\circ = \tfrac{1}{2} U^\circ \sin\beta \tag{3.6}$$

и введем дифференциальные операторы второго порядка $L_1 \equiv \partial^2 / \partial x_3^2 - \partial^2 / \partial x_1^2$, $L_2 \equiv 2\partial^2 / \partial x_1 \partial x_3$. После подстановки (3.5), (3.6) в (3.4) и некоторых преобразований получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln(I_1^2 + I_3^2) \leqslant q_{11} + \frac{q_{13}+q_{31}}{2} - \frac{1}{I_1^2+I_3^2}\int_\Omega [A(L_1\psi)^2 +$$

$$+ 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2]d\Omega \tag{3.7}$$

Здесь A ($\mathbf{x}$, t), B ($\mathbf{x}$, t), C ($\mathbf{x}$, t) – функции материала и невозмущенного движения, которые можно записать в одной из двух форм

$$A = \mathrm{M}_0 + U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet \sin^2\beta, \quad B = U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet \cos\beta\sin\beta, \quad C = \mathrm{M}_0 + U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet \cos^2\beta$$

$$A = \mathrm{M}_0\cos^2\beta + T_0^\bullet \sin^2\beta, \quad B = (T_0^\bullet - \mathrm{M}_0)\cos\beta\sin\beta, \quad C = \mathrm{M}_0\sin^2\beta + T_0^\bullet\cos^2\beta \tag{3.8}$$

Пусть функция Λ (t) такова, что при $t > 0$:

$$\int_\Omega [A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2]d\Omega \geqslant \Lambda^2(I_1^2 + I_3^2) \tag{3.9}$$

Тогда неравенство (3.7) перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}\ln(I_1^2 + I_3^2) \leqslant 2q_{11} + q_{13} + q_{31} - 2\Lambda^2 \tag{3.10}$$

Несложные рассуждения аналогичные приведенным в [13] доказывают, что из неравенства (3.10) следует теорема.

Теорема 2. Пусть F (t) – первообразная функции $(2\Lambda^2 - 2q_{11} - q_{13} - q_{31})(t)$. Тогда для устойчивости невозмущенного течения $\mathbf{v}^\circ$ ($\mathbf{x}$, t) в плоской односвязной области Ω достаточно одновременное выполнение условий

$$\inf_{t>0} F(t) > -\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty} F(t) = +\infty$$

Под устойчивостью здесь понимается классическое определение устойчивости по паре мер $\{(I_1^2 + I_3^2)(0);\ (I_1^2 + I_3^2)(t)\}$ [14].

Задачу нахождения оценивающего параметра Λ можно свести к задаче на собственные значения

$$L_1(AL_1\psi) + 2L_2(BL_1\psi) + L_2(CL_2\psi) + \lambda^2\Delta\psi = 0, \quad \psi \in \Omega \tag{3.11}$$

Кроме того ψ удовлетворяет граничным условиям (3.2). Умножая равенство (3.11) на ψ и интегрируя по Ω, получим, что Λ совпадает с минимальным ненулевым собственным числом $\lambda_{\min}$ задачи (3.11), (3.2).

4. Стационарное невозмущенное движение. В случае, когда поле скоростей $\mathbf{v}^\circ$ явно не зависит от времени, коэффициенты уравнения (3.1) суть функции только координат. Это позволяет искать решения ψ (x_1, x_3, t) в виде

$$\psi = \varphi(x_1,\ x_3)e^{\alpha t}, \quad \alpha = \alpha_* + i\alpha_{**} \in \mathbb{C} \tag{4.1}$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости будет, очевидно, неравенство $\alpha_* < 0$.

Подставляя (4.1) в (3.1) и (3.2), придем к обобщенной задаче Орра–Зоммерфельда, поставленной для произвольного нелинейного течения в области с заданной на границе кинематикой. При М (U) $\equiv \mu$ эта задача сводится к классической проблеме Орра–

Зоммерфельда (см., например, [1]), при $\mathrm{M}(U) = \mu + \tau_s/U$ она исследована в [15–18] для случаев одномерного сдвига (комбинированные течения Куэтта и Пуазейля, движение по наклонной плоскости в поле силы тяжести и так далее).

Комплексная амплитуда $\varphi(\mathbf{x})$ теперь является элементом комплекснозначного гильбертова пространства $\overline{\mathbf{H}}_2(\Omega)$ со стандартной в нем нормой [11]. Техника получения оценок устойчивости с помощью метода интегральных соотношений здесь принципиально не отличается от описанной в п. 3. Отметим лишь общую последовательность действий и приведем конечное утверждение:

домножение обеих частей уравнения

$$\varepsilon_{im}(\mathrm{M}_0(\varepsilon_{il}\varphi_{,jl} + \varepsilon_{jl}\varphi_{,il}) + U^\circ \mathrm{M}_0^\bullet V_{ijkl}^\circ(\varepsilon_{kn}\varphi_{,\mathrm{ln}} + \varepsilon_{\mathrm{ln}}\varphi_{,kn}))_{,jm} =$$

$$= \alpha\Delta\varphi + \varepsilon_{jl}(\varphi_{,l}\psi^\circ_{,jk} + \psi^\circ_{,l}\varphi_{,jk})_{,k}$$

на комплексно-сопряженную функцию $\bar{\varphi}$ и интегрирование по Ω с учетом граничных условий $\mathbf{x} \in \Sigma$: $\varphi = 0$, $\operatorname{grad}\varphi = 0$;

выделение действительных и мнимых частей в получившемся интегральном равенстве и нахождение α_* и α_{**};

оценка сверху частотного параметра α_* с помощью различных неравенств для квадратичных функционалов в $\overline{\mathbf{H}}_2(\Omega)$.

Сохраним обозначения п. 3. и предположим, что Λ таково, что выполнено неравенство (3.9), в котором теперь

$$I^2_{j_1 \dots j_N} \equiv \int_\Omega (D^J|\varphi|)^2 d\Omega$$

Тогда справедливо утверждение, естественно, являющееся частным случаем теоремы 2. Поэтому сформулируем его как

Следствие. Для устойчивости стационарного течения $\mathbf{v}^\circ(\mathbf{x})$ в плоской односвязной области Ω достаточно выполнения условия

$$2q_{11} + q_{13} + q_{31} \leqslant 2\Lambda^2, \quad q_{ij} \equiv \sup_\Omega v^\circ_{i,j} \tag{4.2}$$

5. Минимизация квадратичных функционалов и оценка параметра $\Lambda(t)$. Определение оценивающей функции $\Lambda(t)$ эквивалентно проблеме минимизации квадратичного функционала, стоящего в левой части (3.9). Для неотрицательной определенности соответствующей квадратичной формы необходимо выполнение двух условий: $A + C \geqslant 0$ и $AC \geqslant B^2$ или согласно (3.8) $\mathrm{M}_0 + T_0^\bullet \geqslant 0$ и $\mathrm{M}_0 T_0^\bullet \geqslant 0$. Следовательно, необходимо, чтобы $T_0^\bullet \geqslant 0$, то есть в точках с абсциссами $U^\circ(\mathbf{x}, t)$ диаграмма $T(U)$ не являлась падающей.

Найдем всевозможные пары функций $\{K_1(\mathbf{x}, t);\ K_2(\mathbf{x}, t)\}$ такие, что для любой функции $\psi \in \mathbf{W}_2^{(2)}(\Omega)$:

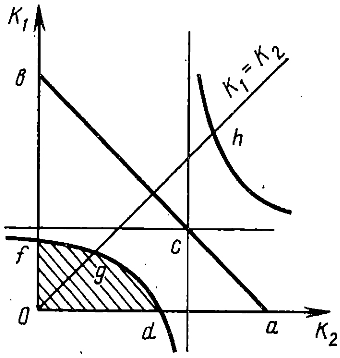
$$A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2 \geqslant K_1(L_1\psi)^2 + K_2(L_2\psi)^2 \tag{5.1}$$

т.е. матрица $\begin{Vmatrix} A - K_1 & B \\ B & C - K_2 \end{Vmatrix}$

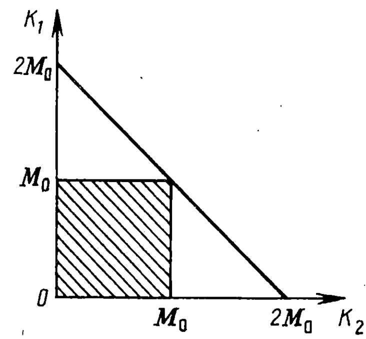
неотрицательно определена. Это в свою очередь равносильно системе неравенств

$$K_1 + K_2 \leqslant \mathrm{M}_0 + T_0^\bullet, \quad K_1K_2 - CK_1 - AK_2 + \mathrm{M}_0 T_0^\bullet \geqslant 0 \tag{5.2}$$

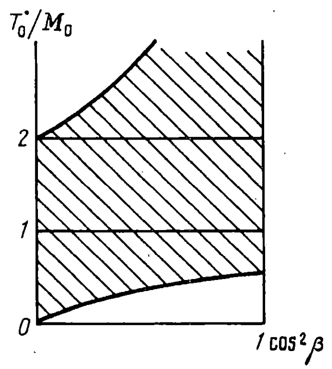
На фиг. 2 на плоскости $(K_1; K_2)$ заштрихована область, точки которой удовлетворяют системе (5.2) при $T_0^\bullet \neq \mathrm{M}_0$. Координаты отмеченных на фиг. 2 точек сле-



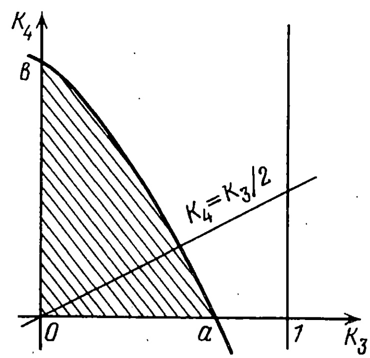
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

дующие: $a=(\mathrm{M}_0+T_0^\bullet;\ 0)$, $b=(0;\ \mathrm{M}_0+T_0^\bullet)$, $c=(\mathrm{M}_0\sin^2\beta+T_0^\bullet\cos^2\beta;\ \mathrm{M}_0\cos^2\beta+$ $+T_0^\bullet\sin^2\beta)$, $d=(\mathrm{M}_0T_0^\bullet/(\mathrm{M}_0\sin^2\beta+T_0^\bullet\cos^2\beta);\ 0)$, $f=(0;\ \mathrm{M}_0T_0^\bullet/(\mathrm{M}_0\cos^2\beta+T_0^\bullet\sin^2\beta))$, $g=(\min\{\mathrm{M}_0,\ T_0^\bullet\},\ \min\{\mathrm{M}_0,\ T_0^\bullet\})$; $h=(\max\{\mathrm{M}_0,\ T_0^\bullet\},\ \max\{\mathrm{M}_0,\ T_0^\bullet\})$.

При $T_0^\bullet=\mathrm{M}_0$ (ньютоновская жидкость) заштрихованная на фиг. 2 область вырождается в квадрат (фиг. 3).

В силу условий (3.2) имеем

$$\int_\Omega (K_1(L_1\psi)^2+K_2(L_2\psi)^2)d\Omega \geqslant \inf K_1(\mathbf{x},\ t)\int_\Omega\left((\psi_{,33}-\psi_{,11})^2+\frac{4K_2}{K_1}\psi_{,13}^2\right)d\Omega=$$

$$=\inf K_1(\mathbf{x},\ t)\left(I_{11}^2+2I_{13}^2+I_{33}^2+4\int_\Omega (K_2/K_1-1)\psi_{,13}^2 d\Omega\right) \tag{5.3}$$

Здесь и далее везде нижняя грань берется по всем $\mathbf{x}\in\Omega$.

Выбирая на криволинейном отрезке (fgd) (фиг. 2) произвольную точку с ординатой K_1, найдем для нее угловой коэффициент K_2/K_1 и подставим в (5.3). В результате получится вполне определенная оценка снизу левой части (3.9). Все такие оценки независимы. В частности, если взять точку g, то будем иметь

$$\int_\Omega (A(L_1\psi)^2+2B(L_1\psi)(L_2\psi)+C(L_2\psi)^2)d\Omega \geqslant \inf\min\{\mathrm{M}_0,\ T_0^\bullet\}$$

$$(I_{11}^2+2I_{13}^2+I_{33}^2)\geqslant \Lambda_\Omega^2 \inf\min\{\mathrm{M}_0,\ T_0^\bullet\}(I_1^2+I_3^2)$$

Последнее неравенство следует из вспомогательного утверждения.

Утверждение. Если область Ω можно заключить в прямоугольник $[h_1, H_1] \times [h_3, H_3]$ (фиг. 1) либо в полосу $[h_\alpha; H_\alpha]$, то $I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2 \geqslant \Lambda_\Omega^2(I_1^2 + I_3^2)$, где

$$\Lambda_\Omega^2 = \frac{\pi^2}{(H_1 - h_1)^2} + \frac{\pi^2}{(H_3 - h_3)^2} \quad \text{либо} \quad \Lambda_\Omega^2 = \frac{\pi^2}{(H_\alpha - h_\alpha)^2} \tag{5.4}$$

Доказательство утверждения следует из неравенств Фридрихса для функций с компактным носителем в Ω [11].

Следовательно, в качестве одной из возможных функций $\Lambda^2(t)$, входящей в неравенство (3.9), а также в условия теоремы 2 и следствия из нее, можно взять

$$\Lambda^2(t) = \Lambda_\Omega^2 \inf \min\{\mathrm{M}_0(\mathbf{x},\ t),\ T_0^\bullet(\mathbf{x},\ t)\} \tag{5.5}$$

6. Другая оценка параметра Λ (t). Другой независимый от рассмотренного в п. 5 способ оценки Λ (t) связан не с (5.1), а с цепочкой неравенств

$$\int_\Omega (A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2)d\Omega \geqslant \inf A(\mathbf{x},\ t)\int_\Omega \Big((\psi_{,33} - \psi_{,11})^2 +$$

$$+\frac{4B}{A}(\psi_{,33} - \psi_{,11})\psi_{,13} + \frac{4C}{A}\psi_{,13}^2\Big)d\Omega = \inf A(\mathbf{x},\ t)\int_\Omega \Pi_{ij}\xi_i\xi_j d\Omega \times$$

$$\times \inf A(\mathbf{x},\ t)\int_\Omega (K_3\psi_{,11}^2 + 4K_4\psi_{,13}^2 + K_3\psi_{,33}^2)d\Omega \tag{6.1}$$

$$\Pi = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -B/A \\ 0 & 1 & B/A \\ -B/A & B/A & C/A - 1/2 \end{Vmatrix}, \qquad \xi = \begin{Vmatrix} \psi_{,11} \\ \psi_{,33} \\ 2\psi_{,13} \end{Vmatrix}$$

Матрица Π квадратичной формы неотрицательно определена, если $2AC - A^2 - 4B^2 \geqslant 0$. Подставляя сюда A, B, C из (3.8), получим возможную область изменения отношения $T_0^\bullet / \mathrm{M}_0$:

$$\frac{\cos^2\beta}{1+\cos^2\beta} \leqslant \frac{T_0^\bullet}{\mathrm{M}_0} \leqslant \frac{1+\sin^2\beta}{\sin^2\beta} \tag{6.2}$$

Эта область на плоскости ($\cos^2\beta$; $T_0^\bullet / \mathrm{M}_0$) заштрихована на фиг. 4. Как видно, неравенству (6.2) независимо от β удовлетворяют ньютоновские жидкости ($T_0^\bullet \equiv \mathrm{M}_0$) и другие материалы, у которых $|\log_2(T_0^\bullet / \mathrm{M}_0)| \leqslant 1$.

Существование неотрицательных оценивающих функций K_3 ($\mathbf{x}$, t) и K_4 ($\mathbf{x}$, t), входящих в (6.1), равносильно неотрицательной определенности матрицы $\Pi - \mathrm{diag}\{K_3;\ K_3;\ K_4\}$, т.е. выполнению системы неравенств

$$0 \leqslant K_3 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant K_4 \leqslant \frac{C}{A} - \frac{1}{2} - \frac{2B^2}{A^2(1-K_3)} \tag{6.3}$$

На фиг. 5 на плоскости (K_3; K_4) заштрихована область, точки которой удовлетворяют системе (6.3). Координаты отмеченных на фиг. 5 точек следующие: $a = ((2AC - A^2 - 4B^2)/(2AC - A^2);\ 0)$, $b = (0;\ (2AC - A^2 - 4B^2)/(2A^2))$, $c = (c_1;\ c_1/2)$, причем

$c_1 = [\mathrm{M}_0 + (\mathrm{M}_0 - T_0^\bullet)\sin^2\beta]/A$ для материалов с жесткой характеристикой ($T_0^\bullet > \mathrm{M}_0$), $c_1 = [T_0^\bullet + (T_0^\bullet - \mathrm{M}_0)\cos^2\beta]/A$ для материалов с мягкой характеристикой ($T_0^\bullet < \mathrm{M}_0$) и $c_1 = 1$ при $T_0^\bullet = \mathrm{M}_0$.

Выбирая на криволинейном отрезке (bca) (фиг. 5) произвольную точку и подставляя ее координаты (K_3; K_4) в (6.1), получим вполне определенную оценку снизу левой части (3.9). В частности, если взять точку c, то будем иметь

$$\int\limits_\Omega (A(L_1\psi)^2 + 2B(L_1\psi)(L_2\psi) + C(L_2\psi)^2)d\Omega \geqslant \inf A(\mathbf{x},\ t)\inf c_1(\mathbf{x},\ t)\times$$

$$\times(I_{11}^2 + 2I_{13}^2 + I_{33}^2) \geqslant \Lambda_\Omega^2 \inf A(\mathbf{x},\ t)\inf c_1(\mathbf{x},\ t)(I_1^2 + I_3^2)$$

где Λ_Ω^2 определяется выражениями (5.4).

Следовательно, другой, отличной от (5.5) возможной функцией $\Lambda^2(t)$, входящей в неравенство (3.9), а также в условия теоремы 2 и ее следствия, является $\Lambda^2(t) = \Lambda_\Omega^2 \inf A(\mathbf{x},\ t)\inf c_1(\mathbf{x},\ t)$.

Полученные в данной работе интегральные оценки устойчивости (для ньютоновских жидкостей – критические числа Рейнольдса) достаточны, поэтому возможные дальнейшие результаты связаны с выяснением того, насколько они необходимы в случае различных определяющих соотношений (1.1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 96-01-01233).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Betchov R., Criminale W.O.* Stability of Parallel Flows. L.; N.Y.: Acad. Press, 1967. 330 p.
2. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред. М.: Изд-во МГУ, 1971. 114 с.
3. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
4. *Магомедов О.Б., Победря Б.Е.* Некоторые задачи вязкоупругопластического течения // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 4. С. 152–169.
5. *Георгиевский Д.В.* Линеаризованная задача устойчивости вязкопластических тел с произвольным скалярным соотношением // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1992. № 6. С. 65–67.
6. *Squire H.B.* On the stability of three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1933. V. 142. № 847. P. 621–628.
7. *Гарифуллин Ф.А., Галимов К.З.* О гидродинамической устойчивости неньютоновских сред // Приклад. механика. 1974. Т. 10. № 8. С. 3–25.
8. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость двумерных и трехмерных вязкопластических течений и обобщенная теорема Сквайра // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 117–123.
9. *Coles D.* Transition in circular Couette Flow // J. fluid Mech. 1965. V. 21. Pt. 3. P. 385–425.
10. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ. 1991. Т. 25. С. 3–89.
11. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Sciencs and Engineering. Dordrecht: Reidel Publ. Co., 1980. 571 p.
12. *Ильюшин А.А.* Деформация вязкопластичных тел // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. № 39. С. 3–81.
13. *Георгиевский Д.В.* Оценки устойчивости нестационарного деформирования вязкопластических тел в плоских областях // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 4. С. 471–473.

14. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. № 6. С. 988–1001.
15. *Hanks R.W., Christiansen E.B.* The laminar – turbulent transition in nonisothermal flow of pseudoplastic fluids in tubes // AICE Journal. 1962. V. 8. № 4. P. 467–471.
16. *Павлов К.Б., Романов А.С., Симхович С.Л.* Гидродинамическая неустойчивость пуазейлева течения неньютоновской вязкопластической жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 6. С. 152–154.
17. *Георгиевский Д.В.* Достаточные интегральные оценки устойчивости вязкопластического сдвига // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 124–131.
18. *Frigaard I.A., Howison S.D., Sobey I.J.* On the stability of Poiseuille flow of a Bingham fluid // J. Fluid Mech., 1994. V. 263. P. 133–150.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.1995