МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 539.374

 А.Г. БАГДОЕВ, А.В. ШЕКОЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПУЧКА В ВЯЗКОУПРУГОМ, ДИСПЕРГИРУЮЩЕМ, НЕЛИНЕЙНОМ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННОМ СЛОЕ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Изученное волновое поле в слое нелинейной, вязкоупругой дисперсной, предварительно деформированной среды, где на одном торце задается возмущение в форме, которая создает в среде волновой пучок, а на другом торце имеется свободная поверхность. Для описания распространения квазипродольной волны выводятся эволюционные и модуляционные нелинейные уравнения. В рамках теории узких пучков получено аналитическое решение. Изучена бистабильность, имеющая место для достаточно интенсивных пучков.

В настоящее время опубликовано достаточно много работ о распространении нелинейных волн и пучков в бесконечных средах с различными физическими свойствами [1–5]. Для исследования ряда задач сейсмологии, приборостроения необходимо изучать особенности распространения и отражения от свободной границы нелинейных волновых пучков. Представляет интерес рассмотрение таких математических моделей среды, которые по возможности лучше отражают реальные свойства материалов. Иногда среда бывает предварительно деформированной, что может влиять на поведение нелинейной волны. Работы, учитывающие последние факторы, немногочисленны. Настоящая работа посвящена в какой-то степени заполнению указанного пробела.

Обычно нелинейные уравнения решают численным методом [3, 4]. В настоящей работе будут развиты аналитические методы. Основное предположение для получения аналитических решений – узость пучка.

1. Постановка задачи. Пусть имеется предварительно деформированный изотропный однородный слой среды. Среда имеет диссипацию и дисперсию.

Уравнение движения среды и связи между тензорами напряжений, деформаций, компонентами вектора смещения имеют следующий вид [6–8]:

$$\rho\partial^2 u_i^* / \partial t^2 = \partial\sigma_{ik} / \partial x_k, \quad u_i^* = u_i^0 + u_i \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} + a_1\delta_{ik}\dot{\sigma}_{ll} + a_2\dot{\sigma}_{ki} + a_2\dot{\sigma}_{ik} = \lambda\delta_{ik}\varepsilon_{ll} + 2\mu\varepsilon_{ik} + \\ + {}^1/_4 A[e_{li}(e_{lk} + e_{kl}) + e_{kl}(e_{li} + e_{il})] + \\ + {}^1/_2 B[e_{lm}(e_{lm} + e_{ml})\delta_{ik} + 2(e_{ki} + e_{ik})e_{ll}] + \\ + Ce_{ll}^2\delta_{ik} + b_1\dot{\varepsilon}_{ll}\delta_{ik} + 2b_2\dot{\varepsilon}_{ik} + d_1\delta_{ik}\ddot{\varepsilon}_{ll} + 2d_2\ddot{\varepsilon}_{ik} + n_1\delta_{ik}\dddot{\varepsilon}_{ll} + 2n_2\dddot{\varepsilon}_{ik}\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{ik} = {}^1\!/_2(e_{ik} + e_{ki} + e_{li}e_{lk}), \quad e_{ik} = \partial u_i / \partial x_k + \partial u_i^0 / \partial x_k \tag{1.3}$$

где ρ – начальная плотность среды, u_i^*, u_i^0 и u_i – соответственно компоненты полного, начального и возмущенного вектора смещения, ε_{ik} – компоненты тензора деформаций, x_k – лагранжевы координаты, σ_{ik} – компоненты лагранжева несимметричного тензора напряжений, a_1 и a_2 – времена релаксации, λ и μ – коэффициенты Ламе, A, B, C – нелинейные модули третьего порядка b_1, b_2, d_1, d_2, n_1 и n_2 – параметры внутренних осцилляторов, δ_{ik} – компоненты тензора Кронекера, u_i^0 считается известным, $\partial u_i^0 / \partial x_k$ – постоянная в пространстве и во времени и удовлетворяет уравнению (1.1) в невозмущенном случае.

Связь между σ_{ik} и ε_{ik}, имеющая вид (1.2), означает, что среда вязкоупругая, нелинейная, причем учитывают физическую и геометрическую нелинейности. В среде осциллирующие массы с диссипацией, наличие которых придает среде диспергирующие свойства. Если пренебречь физической нелинейностью и предварительной деформированностью, тогда выражение типа (1.2) в [8] использовано в качестве модели грунта. В некоторых задачах ее можно использовать в качестве математической модели композита и сплавов.

Координатная система выбирается следующим образом: оси x_1 и x_2 находятся в плоскости слоя, свободной от напряжений. Ось x_3 направлена в глубь среды. Предполагается, что в плоскости $x_3 = 0$ истинные напряжения – нули. Среда предварительно деформирована, причем предполагается, что начальные деформации малы, поэтому удовлетворяют линейным уравнениям без диссипации и дисперсии

$$\partial u_i^0 / \partial x_j = 0 \text{ при } i \neq j; \quad \partial u_i^0 / \partial x_j \neq 0 \text{ при } i = j \tag{1.4}$$

Соотношения (1.4) означают, что в предварительных деформациях имеют место только растяжение и сжатие.

Указанные допущения находятся в соответствии с граничными данными: при $x_3 = 0$, $\sigma_{31}^0 = \sigma_{32}^0 = \sigma_{33}^0 = 0$, где σ_{ik}^0 – предварительные напряжения, существующие в среде до распространения возмущения.

Из последних равенств при пренебрежении нелинейностью, вязкостью, дисперсией можно получить

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} = 0 \tag{1.5}$$

откуда следует, что $\partial u_1^0 / \partial x_1, \partial u_2^0 / \partial x_2, \partial u_3^0 / \partial x_3$ имеют одинаковые порядки. Условие (1.4) согласуется с граничными условиями.

Предполагается, что на некоторой глубине l образуется возмущение с гауссовым профилем. В плоскости, перпендикулярной оси x_3, где образуется возмущение, $u_3 \neq 0$, а $u_1 = u_2 = 0$, т.е. в среде образуется квазипродольное возмущение. Предполагается, что это возмущение распространяется вдоль оси x_3 в сторону плоскости $x_3 = 0$ и отражается от нее. Наша цель – изучить особенности образованного поля между плоскостями.

В среде типа (1.2) могут распространяться равновесные и замороженные волны. В настоящей работе будем ограничиваться рассмотрением равновесных волн. Через определенное время после генерации возмущения волновое поле приходит в равновесное динамическое состояние, которое именуют равновесным.

2. Вывод эволюционных уравнений. В равновесном состоянии в уравнении (1.2) главными членами считаются σ_{ik} и ε_{ik}, которые берутся за основу при упрощениях. Пользуясь известным методом в теории дифракции волн (см., например, [1, 5–7]), для возмущения принимаются следующие порядки: $u_3 \sim \delta^2, \partial / \partial x_i \sim \delta^{-1/2}$ ($i = 1,\ 2$), $a_1, a_2, b_1, b_2 \sim \delta^2$, $d_1, d_2 \sim \delta^3$, $n_1, n_2 \sim \delta^4$, $\partial u/\partial x_3 \sim \delta$. Принятые выше порядки для коэффициентов означают, что вязкость, дисперсии и диссипации считаются малыми.

Уравнение (1.1) удобно написать в перемещениях, поэтому исключают σ_{ik} и ε_{ik}, пользуясь выражениями (1.2) и (1.3). После чего уравнения упрощают с использованием выбранных порядков и учитывают, что в среде образована квазипродольная волна, т.е. основной величиной является продольная волна, а поперечные волны малы, поэтому уравнения для u_1 и u_2 упрощают до членов $\delta^{1/2}$, а в уравнении для u_3 – до δ. В результате они принимают следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = Q_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_j \partial x_3} + \mu_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_3^2} \tag{2.1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + 2a_2\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + F_1 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3 \partial t} + N_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + p_1' \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} +$$
$$+ p_1'' \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + G_1' \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + G_1'' \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + M_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} -$$
$$-(d_1 + d_2) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} - (n_1 + n_2) \frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3 \partial t^3} = 0 \tag{2.2}$$

$$F_1 = a_1(2\mu + 3\lambda) - b_1 - 2b_2, \quad M_1 = -\lambda - 2\mu - 2A - 6B - 2C$$

$$N_1 = -\lambda - 2\mu - (2A + 6B + 2C)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3} - 2B\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1}\right)$$

$$p_1' = -\lambda - \mu - \left(3B + 2C + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1} - B\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} - \left(3B + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

$$p_1'' = -\lambda - \mu - \left(3B + 2C + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} - \left(3B + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

$$G_1' = -\mu - \left(B + \frac{1}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1} - B\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} - \left(B + \frac{1}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

$$G_1'' = -\mu - B\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1} - \left(B + \frac{1}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} - \left(B + \frac{1}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

$$Q_1 = \mu + \lambda + \left(B + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1} + B\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} + \left(B + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

$$\mu_1 = \mu + \left(3B + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1} + B\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} + \left(2B + 2C + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

$$Q_2 = \mu + \lambda + B\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1} + \left(B + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} + \left(B + \frac{3}{4}A\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

$$\mu_2 = \mu + B\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1} + \left(3B + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2} + \left(\frac{A}{4} + 3B + 2C\right)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}$$

В уравнениях (2.1), (2.2) из-за больших значений нелинейных коэффициентов A, B, C начальные деформации дают вклад в коэффициентах уравнений, а из-за малости начальных деформаций добавки в коэффициентах уравнений (2.1) и (2.2), обусловленные геометрической нелинейностью, малы и поэтому отсутствуют.

Различие коэффициентов у членов уравнений (2.1) и (2.2), содержащих производные по координатам x_1 и x_2, означает, что начальное деформированное состояние нарушает изотропность среды, а именно нарушается осевая симметрия.

Из уравнений (2.1) и (2.2) следует, что в одномерном случае при отсутствии дисперсии и диссипации в среде распространяется продольная волна со скоростью v, где

$$v^2 = -N_1 / \rho \tag{2.3}$$

Из выражения (2.3) следует, что при выполнении неравенства

$$\lambda+2\mu<\left|(2A+6B+2C)\frac{\partial \overset{\circ}{u}_3}{\partial x_3}+2B\left(\frac{\partial \overset{\circ}{u}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \overset{\circ}{u}_1}{\partial x_1}\right)\right|$$

которое может выполняться при соответствующем выборе материалов и начальных деформаций, v будет мнимой, т.е. среда становится непроницаемой для распространения волны.

Волна, которая генерируется в плоскости $x_3 = l$, распространяется до свободной поверхности $x_3 = 0$ и отражается. Таким образом, между плоскостями $x_3 = l$ и $x_3 = 0$ существуют два волновых поля: падающее и отраженное.

Все функции в системе уравнений (2.1), (2.2) будут представлены в виде сумм двух величин, из которых с одним штрихом соответствует падающей волне, а с двумя – отраженной. Легко видеть, что линейные уравнения будут расщеплены на два новых независимых уравнения для падающей и отраженной волны. Согласно [7], [9, 10] нелинейные уравнения в первом приближении также можно расщепить на два новых нелинейных независимых уравнений. Таким образом, получаются две новые независимые системы уравнений типа (2.1)–(2.2) для падающей и отраженной волн. Это означает, что в среде образованы два независимых нелинейных пучка, распространяющихся друг другу навстречу, которые связаны через граничные условия.

В систему уравнений для функций с одним штрихом введем новую координату $\tau_1 = \tau_1' - t - lv^{-1}$, $\tau_1' = -x_3 v^{-1}$.

Исключая, как в [5–7], из системы уравнений функции u_1 и u_2, приравнивая нулю коэффициент при $(\rho - N_1 v^2)\partial^2 u_3' / \partial\tau_1^2$ для падающей продольной волны получаем следующее уравнение:

$$\frac{2N_1}{v}\frac{\partial^2 u_3'}{\partial x_3 \partial \tau_1'}-(2a_2\rho+Fv^{-2})\frac{\partial^3 u_3'}{\partial\tau_1^3}+\frac{M}{v^3}\frac{\partial u_3'}{\partial\tau_1}\frac{\partial^2 u_3'}{\partial\tau_1^2}+$$

$$+Q_n'\left(\frac{\partial^2 u_3'}{\partial x_1^2}+\frac{Q_n''}{Q_n'}\frac{\partial^2 u_3'}{\partial x_2^2}\right)-\frac{d_1+d_2}{v^2}\frac{\partial^4 u_3'}{\partial\tau_1^4}+\frac{n_1+n_2}{v^2}\frac{\partial^5 u_3'}{\partial\tau_1^5}=0 \tag{2.4}$$

$$Q_n' = G_1' + \frac{P_1'Q_1}{v^2 V_1},\quad Q_n'' = G_1'' + \frac{P_1'Q_2}{v^2 V_2},\quad V_1 = \rho - \frac{\mu_1}{v^2},\quad V_2 = \rho - \frac{\mu_2}{v^2}$$

В уравнении (2.4) сделаем следующие замены:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = v^{-1}\frac{\partial}{\partial t},\qquad x_1 = x_1$$

$$x_2 = [Q_n'(Q_n'')^{-1}]^{1/2}$$

и продифференцируем по τ_1, тогда для величины $\psi_1 = \partial u_3' / \partial\tau_1$ получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial\tau_1}-\frac{1}{2}L(\psi_1) = -v^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left[\Gamma\psi_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau_1}+D\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau_1^2}+d\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\tau_1^3}+n\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\tau_1^4}\right] \tag{2.5}$$

$$L = -Q_n' v^2 N_1^{-1}\Delta_\perp\psi_1,\quad \Gamma = \tfrac{1}{2}M_1 N_1^{-1},\quad D = -\tfrac{1}{2}(2a_2\rho + F_1 v^2)N_1^{-1}v^3$$

$$d = -\tfrac{1}{2}vN_1^{-1}(d_1+d_2),\quad n = \tfrac{1}{2}vN_1^{-1}(n_1+n_2)$$

$$\Delta_\perp \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$$

Считается, что $Q_n''(Q_n')^{-1} > 0$, что выполняется для не слишком больших начальных деформаций.

Уравнение (2.5) – это эволюционное уравнение для падающей волны. При отсутствии начальных деформаций $Q_n' = Q_n'' > 0$ среда допускает осевую симметрию.

Для системы уравнений с двумя штрихами, т.е. для отраженной волны, введем переменную $\tau_2 = \tau_2' - t + lv^{-1}$, где $\tau_2' = -\tau_1'$, которая от аналогичной переменной для падающей волны отличается знаком скорости волны. Аналогичными вычислениями легко получить уравнение типа (2.5) для отраженной волны, где ψ_1 следует заменить на $\psi_2 = -\partial u_3''/\partial\tau_2$ и τ_2 – на τ_2.

В уравнении (2.5) члены $D\partial^3\psi_{1,2}/\partial\tau_{1,2}^3$ и $n\partial^5\psi_{1,2}/\partial\tau_{1,2}^5$ обусловлены поглощением, причем, как видно из выражений для коэффициентов, первый член обусловлен вязкостью, а второй – осциллирующими массами, а член $\partial^4\psi_{1,2}/\partial_{1,2}^4$ обусловлен дисперсией. Интересный физический эффект: коэффициент Q_n' может менять знак в зависимости от выбранного материала и от соответствующей предварительной деформации, что приведет к изменению свойств среды; например, фокусирующая среда может стать дефокусирующей и наоборот.

3. Уравнение модуляции и уравнение ширины пучка. Наличие диссипации и дисперсии сглаживает пилообразную волну и в среде образовывается квазимонохроматическая волна, поэтому решение уравнения (2.5) можно искать в следующем виде:

$$\psi_{1,2} = \tfrac{1}{2}\{A_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[(-\nu+i\alpha)\tau_{1,2} - (\nu+i\omega)t] +$$
$$+B_{1,2}(\tau_{1,2},t)\exp[2(i\alpha-\nu)\tau_{1,2} - (\nu+i\omega)t] + \text{к. с}\} \tag{3.1}$$

где $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ – медленно меняющиеся амплитуды соответственно для первой и второй гармоники, причем индекс 1 соответствует падающей волне, а индекс 2 – отраженной, ν – коэффициент поглощения, а ω – приращение к основной частоте α.

Вычисляя производные от (3.1), подставляя в (2.5), приравняя к нулю коэффициенты у первой и второй гармоник, можно получить дифференциальные уравнения для амплитуд $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$.

Считается, что основной по порядку в (3.1) является $A_{1,2}$, а $B_{1,2}$ – малые более высокого порядка, которые появляются за счет нелинейностей. Приравнивая к нулю наивысшие по порядку недифференцируемые члены в уравнении для первой гармоники как для падающей, так и отраженной волны получим одинаковые уравнения линейной дисперсии и затухания:

$$\omega = -d\alpha^3/v, \quad \nu = \alpha^4 nv^{-1} - D\alpha^2 v^{-1} \tag{3.2}$$

Приравнивая следующие по порядку дифференцируемые члены в уравнениях для амплитуд, получим систему дифференциальных уравнений для функций $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$. При выполнении неравенств $\omega\tau_{1,2}' \gg 1$ и $\omega \ll \alpha$ в уравнениях для второй гармоники можно пренебречь производными, в результате получится алгебраическое уравнение. Исключая при помощи последнего уравнения функцию $B_{1,2}$, получим нелинейное уравнение Шредингера или нелинейное уравнение модуляции. Это уравнение будет изучено в стационарном случае, т.е. когда амплитуды постоянны во времени. В этом случае от координат t и $\tau_{1,2}$ переходят к медленной координате $\tau_{1,2}'$. После некоторых преобразований с учетом (3.2) получим следующее уравнение:

$$(3i\omega + i\alpha + \nu + 2n\alpha^4 v^{-1})\partial A_{1,2}/\partial\tau_{1,2}' - \tfrac{1}{2}L(A_{1,2}) =$$
$$= (4i\nu\alpha - 12\alpha\omega + 24in\alpha^5 v^{-1})^{-1}\alpha^4(2v)^{-1}(1+8i\alpha\nu)\Gamma^2\exp(\tau_{1,2}' + lv^{-1}) \tag{3.3}$$

В дальнейшем для получения решения предполагается, что в коэффициенте при $\partial A_{1,2} / \partial \tau'_{1,2}$ уравнения (3.3), можно пренебречь третьим и четвертым слагаемыми, что находится в согласии с условием $\omega \ll \alpha$, тем не менее слагаемые ω в указанном коэффициенте удерживаются, что не влияет на сложность решения.

Подставляя $A_{1,2} = a_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, где $\varphi_{1,2}$ – эйконал, а $a_{1,2}$ – действительная амплитуда в уравнение (3.3), отделяя мнимые и действительные части, и переходя к цилиндрическим координатам, получим уравнения для амплитуды и эйконала, которые представляются следующими выражениями:

$$a_{1,2} = b_{1,2} f_{1,2}^{-1} \exp[\tfrac{1}{2} r^2 (r_{1,2} f_{1,2})^{-2}], \quad \varphi_{1,2} = \sigma_{1,2}(\tau'_{1,2}) + \tfrac{1}{2} r^2 R_{1,2}^{-1}(\tau'_{1,2}) \tag{3.4}$$

где $f_{1,2}$ – безразмерная ширина пучка, $\sigma_{1,2}$ – набег фазы на оси пучка, $\upsilon\alpha^{-1}R_{1,2}$ – переменный радиус кривизны, $b_{1,2}$ и $r_{1,2}$ – амплитуды и ширины пучков на границах. Подставляя (3.4) в систему уравнений для $\varphi_{1,2}$ и $a_{1,2}$, выполняя аналогичные вычисления, как в [5–7], получим уравнение для $f_{1,2}$, $\sigma_{1,2}$ и $R_{1,2}$:

$$d\sigma_{1,2} / d\tau'_{1,2} = G f_{1,2}^{-2} \tag{3.5}$$

$$R_{1,2}^{-1} = \frac{\alpha}{2}(1-3\xi) L_1^{-1} f_{1,2}^{-1} \frac{df_{1,2}}{d\tau'_{1,2}} + \frac{\varkappa_2}{2} b_{1,2}^2 \alpha^{-1} f_{1,2}^{-2} \tag{3.6}$$

$$d^2 f_{1,2} / d\tau'_{1,2} = M f_{1,2}^{-3} + 2\nu b_{1,2}^2 f_{1,2}^{-1} \varkappa_2 \tag{3.7}$$

$$M = \alpha^2 (1-3\xi)^{-2} (L_1^2 r_{1,2}^4 + 4\varkappa_1^2 b_{1,2}^2 L_1 r^{-2} - \varkappa_2 b_{1,2}^4), \quad \xi = -\omega\alpha^{-1}$$

$$\varkappa_1 = \zeta(3\alpha\xi + 8\alpha^2\nu^2 + 48n\alpha^5\nu\upsilon^{-1}), \quad L_1 = Q'_n \upsilon^2 N_1^{-1}$$

$$\varkappa_2 = -\zeta(\alpha\nu + 6n\alpha^5\upsilon^{-1} + 24\upsilon\alpha^3\xi), \quad G = (-2L_1\alpha^{-1} r_{1,2}^{-2} - \varkappa_1 b_{1,2}\alpha^{-1})(1-3\xi)^{-1}$$

$$\zeta = \Gamma^2 (8\upsilon^2)^{-1} [9\xi^2 + (\nu\alpha^{-1} + 6n\alpha^3\upsilon^{-1})^2]^{-1} \exp[-2\nu(l\upsilon^{-1} + \tau'_{1,2})]$$

4. Граничные условия. Из постановки задачи ясно, что должно быть два граничных условия: одно в плоскости $x_3 = l$, а другие – в $x_3 = 0$. Предполагается, что в плоскости $x_3 = l$ задается возмущение с гауссовым профилем и выполняются следующие условия:

$$f_1(l) = 1, \quad \frac{df_1(l)}{d\tau'_1} = F, \quad \sigma_1(l) = 0, \quad F = \frac{2L_1\alpha^{-1}}{1-3\xi}\left[\frac{\varkappa_2}{2} b_1^2 - R_1^{-1}(l)\right] \tag{4.1}$$

Уравнения (3.5)–(3.7) следует записать с индексом один в соответствующих величинах и решить с условиями (4.1).

Второе граничное условие, заданное при $x_3 = 0$, заключается в том, что $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$. Будем ограничиваться наивысшими порядками в этих уравнениях, так как ограничиваемся изучением пучка квазипродольных волн. Следующие приближения требуют учесть также и поперечные волны. Напряжения σ_{31}, σ_{32}, σ_{33} состоят из двух слагаемых: постоянных, обусловленных начальными деформациями, и переменных, обусловленных волной. Когда переменные слагаемые – нули, т.е. волновой процесс еще не начался, то постоянные слагаемые тоже будут нулями, так как требуется, чтобы в плоскости $x_3 = 0$, напряжения были нулями. В наивысших порядках уравнения $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$ расщепляются, отделяются условия, которые относятся к поперечным и продольным волнам. Тогда в наивысшем порядке уравнение $\sigma_{33} = 0$ в перемещениях записываются в следующем виде:

$$\partial u_3 / \partial x_3 = 0 \tag{4.2}$$

В наивысшем порядке уравнения $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ удовлетворяются автоматически и противоречия не возникают.

Подставляя в (4.2) $u_3 = u_3' + u_3''$, переходя в выражениях $\psi_1 = \partial u_3' / \partial\tau_1$ и $\psi_2 = -\partial u_3'' / \partial\tau_2$ от координат τ_1 и τ_2 к x_3, можно получить следующее граничное условие:

$$\psi_1 = -\psi_2 \text{ при } x_3 = 0 \tag{4.3}$$

Подставив в (4.3) решение (3.1) при $\tau_{1,2}' = 0$, ограничиваясь первой гармоникой, можно получить $A_1 = -A_2$ при $\tau_{1,2}' = 0$. Подставляя в последнее равенство эйкональное решение, а потом соотношения (3.4), можно получить $\sigma_1(0) = \sigma_2(0)$, $f_1(0) = f_2(0)$, $R_1(0) = R_2(0)$.

Из последних двух равенств при учете выражения (3.6) для $R_{1,2}$ нетрудно видеть, что выполняется равенство $df_{1,2}(0)/d\tau_{1,2} = 0$, т.е. функция $f_{1,2}$ гладкая. Итак, граничные условия в плоскости $x_3 = 0$ следующие:

$$b_1 = -b_2, \ f_1(0) = f_2(0), \ R_1(0) = R_2(0), \ \sigma_1(0) = \sigma_2(0), \ df_{1,2}(0)/d\tau_{1,2}' = 0 \tag{4.4}$$

Уравнения (3.5)–(3.7) с индексами 2 следует решать с граничными условиями (4.4).

5. Решения для узких пучков. Система уравнений (3.5)–(3.7) содержит коэффициент $\exp[-2\nu(\tau_{1,2}' + lv^{-1})]$, что осложняет в общем случае нахождение решений. Для упрощения постановки задачи предположена малость диссипации на ширине области $\nu lv^{-1} \ll 1$, что обычно выполняется. Тогда в указанных уравнениях можно заменять экспоненту на единицу и второе слагаемое в правой части (3.7) отбросить. С другой стороны, при пренебрежении в уравнении второй гармоники производными по $\tau_{1,2}'$ предполагалось, что $\omega\tau_{1,2}' \gg 1$ и, считая в нелинейных членах диссипацию и дисперсию одного порядка, можно получить $\nu lv^{-1} \gg 1$, что дает малые значения $\exp[-2\nu(\tau_{1,2}' + lv^{-1})]$, и можно будет пользоваться линейной теорией.

При выполнении $\nu lv^{-1} \ll 1$ считается, что хотя дисперсия и диссипация малы, дисперсия больше диссипации. Уравнения (3.5)–(3.7) верны при всех ω и ν, которые удовлетворяют $\omega, \nu \ll \alpha$.

Решив уравнения (3.5)–(3.7) с граничными условиями (4.1), можно проверить, что это решение имеет следующий вид:

$$f_1^2 = [\tau_1' - l/v + F(F^2+M)^{-1}]^2 (F^2+M) + M(F^2+M)^{-1} \tag{5.1}$$

$$\sigma_1 = \frac{G}{M^{1/2}} \operatorname{arctg}\left\{\frac{F^2+M}{M^{1/2}}\left[\tau_1' - \frac{l}{v} + (F^2+M)^{-1}F\right]\right\} - \operatorname{arctg}(FM^{-1/2}) \tag{5.2}$$

Решения уравнения (3.5) и (3.7) с граничными условиями (4.4), имеют следующий вид:

$$f_2^2 = f_1(0) + Mf_1^2(0)\tau_2'^2 \tag{5.3}$$

$$\sigma_2 = GM^{-1/2} \operatorname{arctg}[M^{1/2} f_1^2(0)]\tau_2' + \sigma_1(0) \tag{5.4}$$

Условие $df_{1,2}(0)/d\tau_{1,2}'$ ограничивает расстояние l:

$$l = F(F^2+M)^{-1} v \tag{5.5}$$

Можно проверить, что при выполнении условия (5.5), выполняются равенства $f_1(\tau_1') = f_2(\tau_1')$, $\sigma_1(\tau_1') = \sigma_2(\tau_2')$, которые указывают на существование симметрии для падающих и отраженных пучков.

6. Бистабильность. Удерживая в соотношении (3.1) только первые гармоники, отделяя действительную часть, можно записать

$$\psi_1 = |\psi_1| \cos \Phi_1, \quad \psi_2 = -|\psi_2| \cos \Phi_2$$

$$\Phi_{1,2} = \mp\frac{\alpha}{v} x_3 - \alpha t - \omega t + \alpha l v^{-1} + \sigma_{1,2}$$

В фазе взяты значения на оси пучка. На границе $x_3 = l$, как в [11], задаются балансовые соотношения

$$|\psi_2|^2 = R|\psi_1|^2, \quad \psi_1 = K_0(1-R)^{1/2} - \psi_2 R^{1/2} \tag{6.1}$$

где R – квадрат коэффициента отражения, K_0 – значение интенсивности падающей на границе $x_3 = l$ волны вне слоя $K_0 = |K_0| \cos \alpha\tau$, $\tau = (\alpha + \omega)t$.

Пропускная способность имеет вид [11]:

$$P = |\psi_1|^2(1-R)|K_0|^{-2} \tag{6.2}$$

Осредняя выражение (6.1) по t в интервале $(0{,}2\pi\alpha^{-1})$, подставляя в (6.2), можно получить выражение для пропускной способности. Из выражений (5.2) и (5.5), требуя, чтобы $F = M^{1/2}$ [11], можно получить следующее выражение для пропускной способности:

$$\begin{gathered} P = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\right]^{-1} \\ \frac{1}{2}(\Phi_1 - \Phi_2) = -\alpha v^{-1} l + \frac{\pi}{4} G M^{-1/2} \end{gathered} \tag{6.3}$$

Пренебрегая диссипативной нелинейностью и вводя $x' = \varkappa_1 r_1^2 |\psi_1|^2 L_1^{-1}$ из (6.3) и (6.2) соответственно, можно получить уравнение

$$P \approx \left\{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left[-\frac{\alpha l}{v} + \frac{(2+x')\pi}{8(1+x')^{1/2}}\right]\right\}^{-1}, \quad P = \frac{L_1(1-R)}{\varkappa_1 r_1^2 |K_0|^2}$$

Графическое решение полученных уравнений для достаточно больших $|K_0|$ дает многозначное решение, т.е. начиная с некоторых значений величин падающей на слой волны происходит перескок решения на верхнюю ветвь и значение P намного возрастает, что соответствует явлению бистабильности. В частности, при $\alpha l v^{-1} \approx {}^3/_8\pi$, $L_1 \varkappa_1 r_1^{-1} |K_0|^{-2}(1-R) \approx 10^{-3}$ получается трехкратное пересечение и возрастание P примерно в 30 раз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1981. 307 с.
2. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
3. *Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А.* Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982. 174 с.
4. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984. 154 с.
5. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Нелинейные стационарные волны модуляции в пьезодиэлектриках с шариковыми включениями // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. Т. 40. № 5. С. 14–23.
6. *Шекоян А.В.* Отражение гауссовского пучка от свободной поверхности в нелинейной вязкоупругой среде с внутренними осцилляциями // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР. 1990. С. 283–287.

7. *Багдоев А.Г., Шекоян А.В.* Отражение квазимонохроматической нелинейной волны от свободной поверхности среды // Изв. АН Респ. Армения. Механика. 1991. Т. 44. № 1. С. 28–36.
8. *Николаевский В.Н.* К изучению волн в сейсмоактивных средах // Проблемы нелинейной сеймики. М.: Наука, 1987. С. 190–202.
9. *Hunter J.K., Keller J.B.* Weakly nonlinear high frequency waves // Communs on Pure and Appl. meth. 1983. V. 36. № 5. P. 547–569.
10. *Carbonaro P.* High frequency waves in quasilinear inviscid guasdynamics // ZAMP. 1986. V. 37. № 1. P. 43–52.
11. *Marburger J.H., Felber F.S.* Theory of lossless nonlinear Fabry – Perot interferometer // Phys. Rev. A. 1978. V. 17. № 1. P. 335–342.

Ереван

Поступила в редакцию
21.VI.1995