МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. В.В. КОПАСЕНКО, Н.И. МИНАКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОВЯЗКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КОЛЛОКАЦИОННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

Развивается новый численный метод решения нелинейных краевых задач, основанный на аппроксимациях коллокационного типа, на примере задачи устойчивости упруговязкой сферической оболочки. Указанный подход позволил существенно упростить процедуру арифметизации дифференциальных выражений с последующей эффективной реализацией алгоритма на ЭВМ. При этом обеспечивается высокая степень точности вычислений. Оценка эффективности новой численной схемы была получена на основе сравнения результатов расчетов с [1], где моделирование упруговязкой системы выполнялось на основе метода конечных разностей.

1. Общие уравнения прогиба сферического упруговязкого купола были получены из уравнений, описывающих процесс выпучивания упругой оболочки на основе принципа соответствия и имеют вид [1]:

$$x^2\Phi'' + x\Phi' - \Phi = \varkappa(\tau)x\Theta(x+\Theta/2) \tag{1.1}$$

$$\varkappa(\tau)\zeta^{-1}(\tau)(x^2\Theta'' + x\Theta' - \Theta) = x\Phi(x+\Theta) + p_0x^3/2 \tag{1.2}$$

Жесткой заделке соответствуют граничные условия

$$\Theta = 0, \quad w = 0, \quad \Phi' = \nu(\tau)\Phi/x \quad \text{при} \quad x = \lambda \tag{1.3}$$

$$\Theta = 0, \quad \Phi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{1.4}$$

Здесь безразмерные величины введены при помощи соотношений

$$\Theta = \frac{\partial w}{\partial r}(0{,}5\lambda a/H), \qquad x = \lambda r/a$$

$$\Phi = \psi 12a(1-\nu_0^2)/(\lambda E_0 h^3)$$

$$\lambda = 2[3(1-\nu_0^2)]^{1/4}(H/h)^{1/2}$$

$$\varkappa(\tau) = E(\tau)/E_0, \quad p_0 = 4q/q_0$$

$$q_0 = 32E_0H^3h/(\lambda^2a^4), \quad (\ )' = \partial/\partial x(\ )$$

$$\zeta(\tau) = (1-\nu^2(\tau))/(1-\nu_0^2)$$

где H – высота в центре оболочки, a – радиус основания, h – толщина оболочки, w – вертикальный прогиб оболочки, ψ – функция напряжения, $E(\tau)$ – модуль Юнга, $\nu(\tau)$ – коэффициент Пуассона, E_0, ν_0 – постоянные. Свойства материала описываются $\varkappa(\tau)$,

$\zeta(\tau)$, а $\tau = kt$ – безразмерное время. Операторы $\varkappa(\tau)$, $\zeta(\tau)$, $\nu(\tau)$ могут быть представлены в дифференциальной форме

$$\varkappa(\tau) = (p+\beta)/(p+1), \qquad \beta = 1-\gamma$$

$$\zeta(\tau) = (p^2 + a_1 p + b_1)/(p^2 + 2p + 1)$$

$$a_1 = 2(1-\delta\nu_0^2)/(1-\nu_0^2) \tag{1.5}$$

$$b_1 = (1-\delta^2\nu_0^2)/(1-\nu_0^2), \qquad \delta = \beta + \gamma/(2\nu_0)$$

$$\nu(\tau) = \nu_0(p+\delta)/(p+1), \qquad (p \equiv \partial/\partial\tau)$$

Прогиб в центре оболочки $w(0, \tau)$ определяется следующим выражением:

$$w(0,\tau) = -\int_0^\lambda \Theta(x,\tau)dx \tag{1.6}$$

Критическое время τ_* будем определять из условия [2]

$$dw/d\tau|_{\tau=\tau_*} = \infty \tag{1.7}$$

2. Уравнения (1.1), (1.2) являются нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными. Интегрирование данной системы требует задания начальных данных $\Theta(x, 0)$, $\Theta^\cdot(x, 0)$, $\Phi(x, 0)$, $\Phi^\cdot(x, 0)$. Рационально $\Theta(x, 0)$, $\Phi(x, 0)$ выбирать после решения следующей краевой задачи

$$L\Phi = -x\Theta(x+\Theta/2)$$

$$L\Theta = x\Phi(x+\Theta) + p_0 x^3/2$$

$$\Theta(\lambda, 0) = 0, \qquad \Phi'(\lambda, 0) = \nu_0\Phi(\lambda, 0)/\lambda$$

$$w(\lambda, 0) = 0, \quad \Theta(0,0) = 0, \quad \Phi(0,0) = 0 \tag{2.1}$$

$$L \equiv x^2\partial^2/\partial x^2 + x\partial/\partial x - 1, \qquad (\ )^\cdot \equiv \partial/\partial\tau(\ )$$

Заметим, что состояние длительного равновесия оболочки ($\varkappa(\tau) \to \beta$, $\zeta(\tau) \to 1-d-g$, $\nu(\tau) \to \nu_0\delta$) может быть рассчитано с помощью следующей системы дифференциальных уравнений [1]:

$$L\Phi = -\beta x\Theta(x+\Theta/2)$$

$$L\Theta = x\Phi(x+\Theta)(1-d-g)/\beta + p_0x^3(1-d-g)/(2\beta) \tag{2.2}$$

$$d = 2f\nu_0^2/(1-\nu_0^2), \quad g = f^2\nu_0^2/(1-\nu_0^2)$$

$$f = \gamma(1-2\nu_0)/(2\nu_0)$$

с граничными условиями

$$\Theta(\lambda,\infty) = 0, \quad \Phi'(\lambda,\infty) = \nu_0(1+f)\Phi(\lambda,\infty)/\lambda$$

$$w(\lambda,\infty) = 0$$

3. Сведем краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с частными производными (1.1)–(1.4) к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений. Применим коллокационную аппроксимацию неизвестных функций Θ, Φ.

Предварительно в (1.1)–(1.4), положим

$$x = \lambda(1+u)/2, \quad -1 \leqslant u \leqslant 1 \tag{3.1}$$

В результате получим

$$(1+u)^2\Phi'' + (1+u)\Phi' - \Phi = \varkappa(\tau)\lambda[\lambda(1+u)^2\Theta/2 + (1+u)\Theta^2/2]/2 \tag{3.2}$$

$$\varkappa(\tau)\zeta^{-1}(\tau)[(1+u)^2\Theta'' + (1+u)\Theta' - \Theta] = \tag{3.3}$$

$$= \lambda[(1+u)^2\Phi + (1+u)\Theta\Phi]/2 + \lambda^3(1+u)^3 p_0/16$$

$$\Phi' = \nu(\tau)\Phi/(1+u)$$

$$\Theta = 0 \text{ при } u = 1 \tag{3.4}$$

$$\Theta = 0,\ \Phi = 0 \text{ при } u = -1 \tag{3.5}$$

Представление (2.1) с учетом (3.1) может быть получено из (3.2)–(3.5), при условии $\varkappa(\tau) \to 1$, $\zeta(\tau) \to 1$, $\nu(\tau) \to \nu_0$, когда $\tau \to 0$. Аналогично представление (2.2) с учетом (3.1) вытекает из (3.2)–(3.5) при условии $\varkappa(\tau) \to \beta$, $\zeta(\tau) \to 1-d-g$, $\nu(\tau) \to \nu_0\delta$, когда $\tau \to \infty$.

Далее строим для функций Θ, Φ многочленную аппроксимацию коллокационного типа по нормальной системе базисных функций l_i относительно системы точек u_j $(i, j = 1, \ldots, 2N+1)$, называемых точками аппроксимаций

$$\Theta(u,\tau) = \sum_{i=1}^{2N+1} \Theta_i l_i(u), \quad \Theta_i = \Theta(u,\tau) \tag{3.6}$$

$$\Phi(u,\tau) = \sum_{i=1}^{2N+1} \Phi_i l_i(u), \quad \Phi_i = \Phi(u,\tau), \quad l_i(u_j) = \delta_{ij}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Пусть имеют место алгебраические базисные функции. Тогда, как известно

$$l_i(u) = \frac{\omega_{2N+1}(u)}{\omega'_{2N+1}(u_i)(u-u_i)} \tag{3.7}$$

а аппроксимирующие функции (3.6) являются многочленами Лагранжа. В качестве $\omega_{2N+1}(u)$ выберем полиномы Чебышева

$$T_{2N+1}(u) = \cos[(2N+1)\arccos u] \tag{3.8}$$

Необходимо отметить, что выбор корней полинома Чебышева

$$u_k = \pi(2k-1)/(4N+2), \quad k = 1, \ldots, 2N+1$$

в качестве узлов коллокации является рациональным с точки зрения уменьшения абсолютной погрешности аппроксимационных формул. Заметим, что эти узлы не являются равноотстоящими, а сгущаются около концов отрезка.

Получим формулы для аппроксимации производных по x функций Θ и Φ:

$$\Theta^{(s)}(u,\tau) = \sum_{i=1}^{2N+1} \Theta_i l_i^{(s)}(u), \quad \Phi^{(s)}(u,\tau) = \sum_{i=1}^{2N+1} \Phi_i l_i^{(s)}(u) \tag{3.9}$$

Очевидно, основная задача состоит в вычислении $l_i^{(s)}(u)$. Однако, известно, что система базисных функций, представленная степенными, тригонометрическими, показательными функциями, инвариантна по отношению к операции дифференцирования, т.е. производные $l_i^{(s)}(u)$ системы $2N + 1$ базисных функций $l_i(u)$ точно представимы многочленом вида (3.6) тех же базисных функций

$$l_i'(u) = \sum_{m=1}^{2N+1} l_i'(u_m) l_m(u) \tag{3.10}$$

Тогда

$$l_i''(u) = \sum_{m=1}^{2N+1} l_i'(u_m) l_m'(u)$$

Учитывая (3.10), получим

$$l_i''(u) = \sum_{m=1}^{2N+1} \sum_{r=1}^{2N+1} l_i'(u_m) l_m'(u_r) l_r(u) \qquad (i = 1, \ldots, 2N+1) \tag{3.11}$$

Аналогично, могут быть определены производные любого порядка. Подставляем (3.6)–(3.11) в уравнения (3.2), (3.3) и краевые условия (3.4), (3.5), затем фиксируем переменную u в узловых точках u_k и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{gathered}
\varkappa(\tau)\zeta^{-1}(\tau)\left[(1+u_k)^2 \sum_{i=1}^{2N+1} \Theta_i B2_{ik} + (1+u_k) \sum_{i=1}^{2N+1} \Theta_i B1_{ik} - \Theta_k\right] = \\
= \lambda[\lambda(1+u_k)^2 \Phi_k + (1+u_k)\Phi_k\Theta_k]/2 + \lambda^3(1+u_k)^3 p_0/16 \qquad (k = 2, \ldots, 2N) \\
(1+u_k)^2 \sum_{i=1}^{2N+1} \Phi_i B2_{ik} + (1+u_k) \sum_{i=1}^{2N+1} \Phi_i B1_{ik} - \Phi_k = \\
= -\varkappa(\tau)\lambda[\lambda(1+u_k)^2\Theta_k + (1+u_k)\Theta_k^2]/2 \qquad (k = 2, \ldots, 2N+1) \\
\Theta_1 = 0, \quad \Theta_{2N+1} = 0, \quad \Phi_{2N+1} = 0, \quad \sum_{i=1}^{2N+1} \Phi_i B1_{i1} = \Phi_1 \nu(\tau)/(1+u_1)
\end{gathered} \tag{3.12}$$

$$B1_{ik} = l_i'(u_k), \qquad B2_{ik} = \sum_{m=1}^{2N+1} l_i'(u_m) l_m'(u_k) \qquad (i, k = 1, \ldots, 2N+1) \tag{3.13}$$

Из (3.7) легко показать, что

$$l_i'(u_k) = \begin{cases} 0{,}5u_k/(1-u_k^2), & k = i \\ (-1)^{k-i}\sqrt{1-u_i^2}/(u_k-u_i)\sqrt{1-u_k^2}, & k \neq i \end{cases}$$

$$(k, i = 1, \ldots, 2N+1)$$

4. Численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по времени (3.12)–(3.13) может быть выполнено, например, методом Рунге – Кутта. Начальные данные при $\tau = 0$ для Θ_i, Φ_i определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений (3.12)–(3.13) при $\varkappa(\tau) = 1$, $\zeta(\tau) = 1$, $\nu(\tau) = \nu_0$.

Если задана величина давления p_0, то решение системы нелинейных алгебраических уравнений определяется с помощью метода нелинейной релаксации [1]. Применение метода нелинейной релаксации с использованием метода последовательных нагружений позволило подробно исследовать мгновенно-упругое состояние оболочки. Кривая нагружения $p_0 - w_0$, соответствующая состоянию длительного равновесия оболочки, рассчитывалась с помощью (3.12)–(3.13) при $\varkappa(\tau) = \beta$, $\zeta(\tau) = 1 - d - g$, $\nu(\tau) = \nu_0\delta$.

5. Рассмотрим результаты расчетов. Как и в [1] примем $\nu_0 = 0{,}341$, $\gamma = 0{,}15$, $k = 9{,}76$ с$^{-1}$, $E_0 = 0{,}4516 \cdot 10^{10}$ Н/м^2.

В данной работе было установлено, что решения для Θ и Φ устойчивы и сходятся, если $N = \lambda$. В случае метода конечных разностей [1] для обеспечения устойчивости и сходимости решения задачи полагалось $N = 2\lambda$.

Здесь λ параметр пологости оболочки. Таким образом, порядок системы уравнений дискретной модели, полученной на основе метода коллокаций в два раза меньше, чем в случае метода конечных разностей. Кроме того, обнаружена большая скорость сходимости итерационных процессов при обеспечении высокой степени точности результатов решения. Кривые нагружения были рассчитаны для начально-упругих характеристик материала ($\tau = 0$) и для состояния длительного равновесия оболочки для $\lambda = 3{,}636$ при количестве узлов равном 7 и $\lambda = 7$ при количестве узлов равном 14. Далее подробно исследовалось вязко-упругое поведение оболочки при различных значениях внешней нагрузки с помощью (3.12)–(3.13) при $\varkappa(\tau)$, $\zeta(\tau)$, $\nu(\tau)$, представленных в дифференциальной форме (1.5).

Результаты исследования, полученные в данной работе, полностью совпали с результатом работы [1]. Верхнее критическое значение равномерной распределенной постоянной нагрузки для оболочки из вязкоупругого материала необходимо рассчитывать по предельноупругому состоянию, если оболочка должна работать существенно длительное время. Если требуется ограниченная по времени эксплуатация оболочки, то оболочка может работать без хлопка при нагрузках, превышающих критическое значение, соответствующее состоянию длительного равновесия. В этом случае нагрузка должна назначаться в зависимости от времени, в течение которого должна иметь место эксплуатация оболочки, если известно, что критическое время изменяется монотонно от ∞ до 0 при возрастании нагрузки от критического значения состояния длительного равновесия до критического значения мгновенноупругого состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Минакова Н.И.* Численное исследование задачи устойчивости пологих сферических вязкоупругих оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 144–150.
2. *Ворович И.И., Минакова Н.И., Шепелева В.Г.* Некоторые вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем на примере фермы Мизеса // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 120–132.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
10.I.1996