

УДК 539.214; 539.374

© 1996 г. А.М. ВАСИЛЬЕВА, Д.Д. ИВЛЕВ, М.В. МИХАЙЛОВА

**О РАСТЯЖЕНИИ ПОЛОСЫ И БРУСА
ПЕРЕМЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ
ИЗ ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

В [1] А.Ю. Ишлинский рассмотрел напряженное состояние растягиваемой полосы из изотропного идеальнопластического материала при произвольных малых возмущениях границы.

Ниже решение А.Ю. Ишлинского [1] распространяется на случай анизотропного идеальнопластического материала. Рассматривается также пространственное течение бруса переменного прямоугольного поперечного сечения при условиях полной пластичности и условии пластичности Мизеса [2].

Отметим, что задача о растяжении плоского образца, ослабленного выточками, другим методом рассмотрена в [3].

1. Рассмотрим пластическое состояние растягиваемой полосы из анизотропного идеального жесткопластического материала, ослабленной выточками (фиг. 1):

$$y = \pm(h + \delta f(x)), \quad h - \text{const}, \quad \delta \ll 1 \quad (1.1)$$

Условие пластичности для материала, свойства которого не зависят от гидростатического давления, запишем в виде

$$F(\sigma_x - \sigma_y, \tau_{xy}) = 0 \quad (1.2)$$

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^o + \delta \sigma'_{ij}, \quad \sigma_y^o = \tau_{xy}^o = 0, \quad F(\sigma_x^o, 0) = 0 \quad (1.3)$$

где индекс штрих приписан компонентам возмущенного состояния.

Согласно (1.2), (1.3) получим

$$\sigma'_x - \sigma'_y + 2k\tau'_{xy} = 0, \quad 2k = \left(\frac{\partial F^o}{\partial \tau_{xy}} \right) / \left(\frac{\partial F^o}{\partial (\sigma_x - \sigma_y)} \right) \quad (1.4)$$

где индекс градус наверху означает, что производные взяты при значениях напряжений в исходном невозмущенном состоянии: $\sigma_x^o, \sigma_y^o = \tau_{xy}^o = 0$.

Уравнениям равновесия удовлетворим, полагая

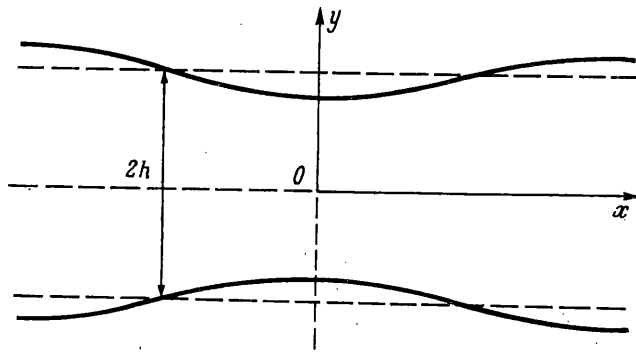
$$\sigma'_x = \partial^2 U / \partial y^2, \quad \sigma'_y = \partial^2 U / \partial x^2, \quad \tau'_{xy} = -\partial^2 U / \partial x \partial y \quad (1.5)$$

Из (1.4), (1.5) будем иметь

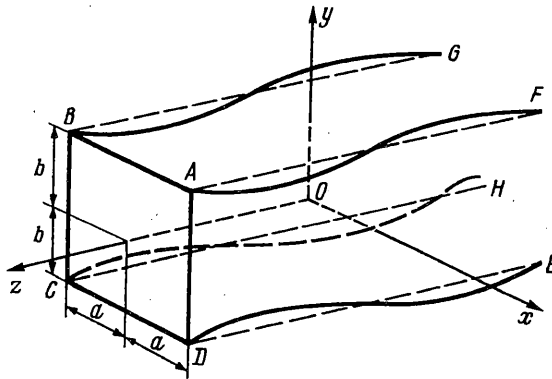
$$\partial^2 U / \partial y^2 - \partial^2 U / \partial x^2 - 2k \partial^2 U / \partial x \partial y = 0 \quad (1.6)$$

Решение уравнения (1.6) запишем в виде

$$U = A \cos m(ky + x) \cos m\sqrt{1 + k^2} y, \quad A = \text{const} \quad (1.7)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Из (1.5), (1.7) найдем

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= -Am^2[(2k^2 + 1) \cos m(x + ky) \cos m\sqrt{k^2 + 1}y - \\ &- k\sqrt{k^2 + 1} \sin m(x + ky) \sin m\sqrt{k^2 + 1}y] \\ \sigma'_y &= -Am^2 \cos m(x + ky) \cos m\sqrt{k^2 + 1}y \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \tau'_{xy} &= Am^2[k \cos m(x + ky) \cos m\sqrt{k^2 + 1}y - \\ &- \sqrt{k^2 + 1} \sin m(x + ky) \sin m\sqrt{k^2 + 1}y] \end{aligned}$$

Линеаризированные граничные условия, аналогично [1], имеют вид

$$\sigma'_y = 0 \quad \text{при } y = \pm h \quad (1.9)$$

$$\sigma'_x df(x)/dx - \tau'_{xy} = 0 \quad \text{при } y = \pm h \quad (1.10)$$

Из (1.8), (1.9) найдем

$$\cos m\sqrt{k^2 + 1}h = 0, \quad m = \frac{\pi(2n+1)}{2h\sqrt{1+k^2}}, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (1.11)$$

Согласно (1.8), (1.10) имеем

$$-Am^2\sqrt{k^2 + 1} \sin m(x + kh)(-1)^n - \varphi(x) = 0, \quad \varphi(x) = \sigma'_x \frac{df}{dx} \quad (1.12)$$

Положим $\varphi(x) = B \sin m(x + kh)$, тогда из (1.12) получим

$$A = (-1)^{n+1} B / (m^2 \sqrt{k^2 + 1}) \quad (1.13)$$

Из (1.8), (1.11), (1.13) найдем компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \frac{B(-1)^n}{\sqrt{k^2 + 1}} \left[(2k^2 + 1) \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h\sqrt{1+k^2}} (x + ky) \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h} y - \right. \\ &\quad \left. - k\sqrt{k^2 + 1} \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h\sqrt{1+k^2}} (x + ky) \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h} y \right] \\ \sigma'_y &= \frac{B(-1)^n}{\sqrt{k^2 + 1}} \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h\sqrt{1+k^2}} (x + ky) \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h} y \\ \tau'_{xy} &= \frac{B(-1)^{n+1}}{\sqrt{k^2 + 1}} \left[k \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h\sqrt{1+k^2}} (x + ky) \cos \frac{\pi(2n+1)}{2h} y - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{k^2 + 1} \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h\sqrt{1+k^2}} (x + ky) \sin \frac{\pi(2n+1)}{2h} y \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

При $k = 0$, получаем результаты А.Ю. Ишлинского [1].

2. Возьмем брус прямоугольного сечения, ось z направим вдоль оси бруса, длины сторон вдоль осей x, y обозначим соответственно через $2a, 2b$ (фиг. 2).

Рассмотрим пластическое течение бруса под действием растягивающей силы, действующей вдоль оси z .

Уравнения сторон бруса представим в виде

$$x = \pm(a + \delta f_1(y, z)) \quad (2.1)$$

$$y = \pm(b + \delta f_2(x, z)) \quad (2.2)$$

Считая материал бруса идеально жесткопластическим, запишем условия предельного состояния для главных компонент напряжений σ_i в виде [2]:

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_3 - \sigma_1 = f(\sigma), \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.3)$$

Ребро призмы Треска, интерпретирующей в пространстве главных напряжений условие постоянства максимального касательного напряжения, имеет место при $f(\sigma) = \text{const}$.

Условия связи главных компонент напряжений в декартовой системе координат хуз записываются в виде

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2, \quad \tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \quad (2.4)$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (123) \quad (xyz)$$

где l_i, m_i, n_i – направляющие косинусы; недостающие соотношения получаются круговой перестановкой индексов (123), (xyz).

Из (2.3), (2.4) найдем

$$(\sigma_x - \sigma + \frac{1}{3} f(\sigma))(\sigma_y - \sigma + \frac{1}{3} f(\sigma)) - \tau_{xy}^2 = 0 \quad (2.5)$$

$$(\sigma_x - \sigma + \frac{1}{3} f(\sigma))\tau_{yz} - \tau_{xy}\tau_{xz} = 0 \quad (xyz)$$

Решение будем искать в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \delta \sigma'_x, \dots \quad (2.6)$$

Невозмущенное состояние ($\delta = 0$) примем в виде

$$\sigma_z^0 = \text{const}, \quad \sigma_z^0 - f(\sigma_z^0/3) = 0, \quad \sigma_x^0 = \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = 0 \quad (2.7)$$

Линеаризируя соотношения (2.5), учитывая (2.7), получим

$$\sigma'_x = \sigma'_y, \quad \sigma'_z = K\sigma'_x, \quad \tau'_{xy} = 0 \quad (2.8)$$

$$K = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\partial f^0}{\partial \sigma}\right) / \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\partial f^0}{\partial \sigma}\right)$$

где индекс градус у производной $\partial f/\partial \sigma$ означает ее значение при $\sigma = \sigma^0$.

Из уравнений равновесия и (2.8) будем иметь

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 - K \partial^2 U / \partial z^2 = 0, \quad \tau'_{xy} = 0$$

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \partial U / \partial z, \quad \sigma'_z = K \partial U / \partial z \quad (2.9)$$

$$\tau'_{xz} = -\partial U / \partial x, \quad \tau'_{yz} = -\partial U / \partial y$$

Отметим, что для условия пластичности Треска $\partial f^0/\partial \sigma = 0$, $K = 1$. В дальнейшем ограничимся случаем гиперболичности уравнения (2.9) и положим $K = \mu^2$. Тогда уравнение (2.9) примет вид

$$\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 - \mu^2 \partial^2 U / \partial z^2 = 0 \quad (2.10)$$

Решение уравнения (2.10) представим в виде

$$U = C \cos mx \cos ny \sin(\lambda / \mu)z, \quad \lambda = \pm \sqrt{m^2 + n^2}, \quad C = \text{const} \quad (2.11)$$

Согласно (2.9), (2.11) будем иметь

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \mu^{-2} \sigma'_z = (C\lambda / \mu) \cos mx \cos ny \cos(\lambda / \mu)z$$

$$\tau'_{xz} = Cm \sin mx \cos ny \sin(\lambda / \mu)z \quad (2.12)$$

$$\tau'_{yz} = Cn \cos mx \sin ny \sin(\lambda / \mu)z$$

$$\tau'_{xy} = 0$$

Предположим, что боковые грани свободны от напряжений, тогда граничные условия на (2.1), (2.2) запишутся в виде

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0$$

$$\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 0 \quad (2.13)$$

$$\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n = 0$$

где l, m, n – направляющие косинусы нормали к граням бруса.

Рассмотрим грань (2.1). В этом случае нормаль к невозмущенной грани совпадает с осью x . После линеаризации согласно (2.1) будем иметь

$$l = 1, \quad m = -\delta \partial f_1 / \partial y, \quad n = -\delta \partial f_1 / \partial z \quad (2.14)$$

Из граничных условий (2.13), учитывая (2.4), (2.6), (2.7), получим

$$\sigma'_x = 0, \quad \tau'_{xz} - \sigma_z^0 \partial f_1 / \partial z = 0 \quad \text{при } x = a \quad (2.15)$$

Аналогично для грани (2.2):

$$\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{yz} - \sigma_z^0 \partial f_2 / \partial z = 0 \quad \text{при } y = b \quad (2.16)$$

Из (2.15) найдем

$$\cos ma = 0, \quad \partial f_1 / \partial z = (-1)^k (Cm / \sigma_z^0) \cos ny \sin(\lambda / \mu) z \quad (2.17)$$

Отсюда

$$ma = \frac{1}{2} \pi (2k + 1), \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (2.18)$$

$$f_1 = (-1)^{k+1} (Cm\mu / \sigma_z^0 \lambda) \cos ny \cos(\lambda / \mu) z + D(y)$$

В дальнейшем, не умаляя общности, положим $D = 0$. Аналогично из (2.16) найдем

$$nb = \frac{1}{2} \pi (2k + 1) \quad (2.19)$$

$$f_2 = (-1)^{k+1} (Cn\mu / \sigma_z^0 \lambda) \cos mx \cos(\lambda / \mu) z$$

Максимальная длина выточки будет при $k = 0$, тогда согласно (2.18), (2.19) получим

$$ma = nb = \pi/2, \quad m = \pi/(2a), \quad n = \pi/(2b) \quad (2.20)$$

Согласно (2.12), (2.20) определим искомое напряженное состояние для компонент возмущений

$$\sigma'_x = \sigma'_y = \mu^{-2} \sigma'_z = (C\lambda / \mu) \cos \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{2b} y \cos \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\mu} z$$

$$\tau'_{xz} = C \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{\pi}{2b} y \sin \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\mu} z \quad (2.21)$$

$$\tau'_{yz} = C \frac{\pi}{2b} \cos \frac{\pi}{2a} x \sin \frac{\pi}{2b} y \sin \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\mu} z, \quad \tau'_{xy} = 0$$

Соотношения (2.1), (2.2) соответственно запишутся в виде

$$x = \pm \left(a + C_1 \cos \frac{\pi}{2b} y \cos \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\mu} z \right) \quad (2.22)$$

$$y = \pm \left(b + C_2 \cos \frac{\pi}{2a} x \cos \frac{\pi \sqrt{a^2 + b^2}}{2ab\mu} z \right) \quad (2.23)$$

$$C_1 = Cm\mu / (\lambda \sigma_z^0), \quad C_2 = Cn\mu / (\lambda \sigma_z^0)$$

В общем случае решение следует искать в виде бесконечной суммы

$$U = \sum_{ij} c_{ij} \cos m_i x \cos n_j y \sin(\lambda_{ij} / \mu) z \quad (2.24)$$

Согласно (2.9), (2.24) могут быть определены компоненты напряжений. Если функция $f_1(y, z)$ определена, то из граничного условия (2.15), (2.9) и (2.24) получим

$$\sigma_z^0 \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z} = \sum_{ij} c_{ij} m_i \sin m_i x \cos n_j y \sin(\lambda_{ij} / \mu) z \quad (2.25)$$

Из (2.25) можно найти c_{ij} . Тем самым все компоненты напряжений будут определены. В этом случае из граничного условия (2.16) и выражения для τ'_{yz} можно получить значение функции $f_2(x, z)$. Таким образом, произвольно может быть задано уравнение одной боковой выточки.

3. Соотношения теории идеальной пластичности при условии пластичности Мизеса запишем в виде [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \lambda(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z - \partial f / \partial \sigma), & \varepsilon_{xy} &= 3\lambda\tau_{xy}, & \lambda &\geq 0 \\ \varepsilon_y &= \lambda(2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x - \partial f / \partial \sigma), & \varepsilon_{xz} &= 3\lambda\tau_{xz} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \lambda(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y - \partial f / \partial \sigma), & \varepsilon_{yz} &= 3\lambda\tau_{yz} \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) &= 6f(\sigma) \\ \sigma &= 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \dots; \varepsilon_x, \varepsilon_{xy}, \dots$ – соответственно компоненты напряжений и скоростей деформации в декартовой системе координат x, y, z .

Имеют место формулы Коши

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial v / \partial y, \quad \varepsilon_z = \partial w / \partial z \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

где u, v, w – компоненты скорости перемещения вдоль осей x, y, z .

Рассмотрим брус квадратного поперечного сечения (фиг. 2). Уравнения поверхностей боковых граней представим в виде (2.1), (2.2) при $b = a$.

Брус растягивается вдоль оси z , боковые грани свободны от напряжений. Граничные условия на боковых поверхностях удовлетворяют условиям (2.13).

На грани $ADEF$ (рис. 2), аналогично $BCHE$, согласно (2.1) направляющие косинусы нормали с точностью до малых высшего порядка примут вид (2.14).

Решение будем искать в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} + \delta\sigma'_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\circ} + \delta\varepsilon'_{ij}, \quad u = u^{\circ} + \delta u', \dots, \quad \lambda = \lambda^{\circ} + \delta\lambda' \quad (3.4)$$

$$\sigma_z^{\circ} = \sqrt{3f(\sigma^{\circ})}, \quad \sigma_x^{\circ} = \sigma_y^{\circ} = \tau_{xy}^{\circ} = \tau_{xz}^{\circ} = \tau_{yz}^{\circ} = 0, \quad \sigma^{\circ} = \frac{1}{3}\sigma_z^{\circ} > 0$$

Согласно (2.13), (2.14), (3.4) получим

$$\sigma'_x = 0, \quad \tau'_{xy} = 0, \quad \tau'_{xz} \mp \sigma_z^{\circ} \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \quad x = \pm a \quad (3.5)$$

Аналогично для граней $ABGF, DCHE$ (фиг. 2) будем иметь

$$l = -\delta\partial f_2 / \partial x, \quad m = 1, \quad n = -\delta\partial f_2 / \partial z \quad (3.6)$$

$$\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} = 0, \quad \tau'_{yz} \mp \sigma_z^{\circ} \partial f_2 / \partial z = 0, \quad y = \pm a \quad (3.7)$$

Удовлетворим уравнениям равновесия при помощи формул Максвелла [5] для компонент напряжений

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \partial^2 X_3 / \partial y^2 + \partial^2 X_2 / \partial z^2, & \tau'_{xy} &= -\partial^2 X_3 / \partial x \partial y \\ \sigma'_y &= \partial^2 X_1 / \partial z^2 + \partial^2 X_3 / \partial x^2, & \tau'_{xz} &= -\partial^2 X_2 / \partial x \partial z \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\sigma'_z = \partial^2 X_2 / \partial x^2 + \partial^2 X_1 / \partial y^2, \quad \tau'_{yz} = -\partial^2 X_1 / \partial y \partial z$$

где X_i – функции напряжений.

Решение будем искать при предположениях

$$X_1 = -X_2 = X, \quad X_3 = 0 \quad (3.9)$$

Из (3.9), (3.8) получим

$$\sigma'_x = -\sigma'_y = -\partial^2 X / \partial z^2, \quad \sigma'_z = 0, \quad \tau'_{xy} = 0. \quad (3.10)$$

$$\tau'_{xz} = \partial^2 X / \partial x \partial z, \quad \tau'_{yz} = -\partial^2 X / \partial y \partial z$$

Согласно (3.10) в плоскости xy для компонент возмущения имеет место напряженное состояние чистого сдвига: $\sigma'_x = -\sigma'_y$, $\tau'_{xy} = 0$.

Линеаризируя условие пластичности (3.2), используя (3.4), получим

$$\sigma_z^\circ (2\sigma'_z - \sigma'_x - \sigma'_y) - k_0 (\sigma'_z + \sigma'_x + \sigma'_y) = 0, \quad k_0 = \partial f^\circ / \partial \sigma \quad (3.11)$$

Согласно (3.10) условие (3.11) тождественно удовлетворяется.

Из (3.1) и (3.4) получаем

$$\varepsilon_x^\circ = \varepsilon_y^\circ = -\lambda^\circ (\sigma_z^\circ + k_0)$$

$$\varepsilon_z^\circ = \lambda^\circ (2\sigma_z^\circ - k_0), \quad \lambda^\circ = \frac{\varepsilon_z^\circ}{2\sigma_z^\circ - k_0} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{xy}^\circ = \varepsilon_{xz}^\circ = \varepsilon_{yz}^\circ = 0, \quad u^\circ = -\lambda^\circ (\sigma_z^\circ + k_0)x$$

$$v^\circ = -\lambda^\circ (\sigma_z^\circ + k_0)y, \quad w^\circ = \lambda^\circ (2\sigma_z^\circ - k_0)z$$

Согласно (3.12), (3.10), (3.3), (3.1) будем иметь

$$\partial u' / \partial x = \lambda^\circ (2\sigma'_x - \sigma'_y) - \lambda' \sigma_z^\circ$$

$$\partial v' / \partial y = \lambda^\circ (2\sigma'_y - \sigma'_x) - \lambda' \sigma_z^\circ$$

(3.13)

$$\partial w' / \partial z = 2\lambda' \sigma_z^\circ$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x} = 6\lambda^\circ \tau'_{xz}, \quad \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} = 6\lambda^\circ \tau'_{yz}$$

Положим

$$u' = \partial \psi / \partial x, \quad v' = -\partial \psi / \partial y, \quad w' = \lambda' = 0 \quad (3.14)$$

Согласно (3.10), (3.13), (3.14) будем иметь

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -3\lambda^\circ \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 6\lambda^\circ \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -3\lambda^\circ \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} = 6\lambda^\circ \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z}$$

Искомое решение представим в виде

$$X = P \cos px \cos py e^{-\mu z}, \quad \mu = \sqrt{2}p = \text{const} \quad (3.16)$$

$$\Psi = Q \cos px \cos py e^{-\mu z}, \quad Q = 6\lambda^\circ P = \text{const}$$

Согласно (3.10), (3.14), (3.15), (3.16) найдем

$$\sigma'_x = -\sigma'_y = -2Pp^2 \cos px \cos py e^{-\sqrt{2}pz}, \quad \sigma'_z = 0, \quad \tau'_{xy} = 0$$

$$\tau'_{xz} = \sqrt{2}Pp^2 \sin px \cos py e^{-\sqrt{2}pz}$$

$$\tau'_{yz} = -\sqrt{2}Pp^2 \cos px \sin py e^{-\sqrt{2}pz}$$

$$u' = -6\lambda^\circ P p \sin px \cos py e^{-\sqrt{2}pz} \quad (3.17)$$

$$v' = 6\lambda^\circ P p \cos px \sin py e^{-\sqrt{2}pz}, \quad w' = 0$$

$$\varepsilon'_x = -\varepsilon'_y = -6\lambda^\circ P p^2 \cos px \cos py e^{-\sqrt{2}pz}, \quad \varepsilon'_{xy} = 0, \quad \varepsilon'_z = 0$$

$$\varepsilon'_{xz} = 6\sqrt{2}\lambda^\circ P p^2 \sin px \cos py e^{-\sqrt{2}pz}$$

$$\varepsilon'_{yz} = -6\sqrt{2}\lambda^\circ P p^2 \cos px \sin py e^{-\sqrt{2}pz}$$

Из граничных условий (3.5), (3.7) и условий (3.17) получим

$$p = \frac{\pi(1+2k)}{2a}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$f_1(y, z) = -\frac{P_k}{\sigma'_z} \frac{\pi(1+2k)}{2a} (-1)^k \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z} \quad (3.18)$$

$$f_2(x, z) = \frac{P_k}{\sigma'_z} \frac{\pi(1+2k)}{2a} (-1)^k \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

$$P_k = \text{const}$$

Тогда выражения (3.17) примут вид

$$\sigma'_x = -\sigma'_y = -P_k \frac{\pi^2(1+2k)^2}{2a^2} \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

$$\sigma'_z = 0, \quad \tau'_{xy} = 0$$

$$\tau'_{xz} = P_k \frac{\pi^2(1+2k)^2}{2\sqrt{2}a^2} \sin \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

$$\tau'_{yz} = -P_k \frac{\pi^2(1+2k)^2}{2\sqrt{2}a^2} \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \sin \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z} \quad (3.19)$$

$$u' = -3\lambda^\circ P_k \frac{\pi(1+2k)}{a} \sin \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

$$v' = 3\lambda^\circ P_k \frac{\pi(1+2k)}{a} \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \sin \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

$$w' = 0$$

$$\varepsilon'_x = -\varepsilon'_y = -3\lambda^\circ P_k \frac{\pi^2(1+2k)^2}{2a^2} \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

$$\varepsilon'_z = 0, \quad \varepsilon'_{xy} = 0$$

$$\varepsilon'_{xz} = 3\lambda^\circ P_k \frac{\pi^2(1+2k)^2}{\sqrt{2}a^2} \sin \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

$$\varepsilon'_{yz} = -3\lambda^\circ P_k \frac{\pi^2(1+2k)^2}{\sqrt{2}a^2} \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x \sin \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2}a} z}$$

Решения (3.18), (3.19) могут быть просуммированы по k .

Уравнения поверхностей боковых граней бруса (2.1), (2.2) согласно (3.18) запишутся

соответственно в виде

$$\begin{aligned}
 x &= \pm \left(a - \delta \frac{P_k}{\sigma_z^0} \frac{\pi(1+2k)}{2a} (-1)^k \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} y e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2a}} z} \right) \\
 y &= \pm \left(a + \delta \frac{P_k}{\sigma_z^0} \frac{\pi(1+2k)}{2a} (-1)^k \cos \frac{\pi(1+2k)}{2a} x e^{-\frac{\pi(1+2k)}{\sqrt{2a}} z} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Согласно [4] условие пластичности для анизотропного материала записывается в виде

$$A(\sigma_x - \sigma_y)^2 + B(\sigma_y - \sigma_z)^2 + C(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(D\tau_{xy}^2 + E\tau_{xz}^2 + F\tau_{yz}^2) = 6f(\sigma)
 \tag{3.21}$$

$A, B, \dots = \text{const}$

Полученные результаты могут быть распространены на случай анизотропного материала при $B = C, E = F$.

Авторы выражают признательность А.Ю. Ишлинскому за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-00207).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. 1958. № 1. С. 12–15.
2. *Ивлев Д.Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
3. *Онат Е., Прагер В.* Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца // Механика. Сб. перев. и обзоров иностр. период. лит. 1955. № 4. С. 93–97.
4. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
5. *Лав А.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
22.VIII.1995