МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 539.374

© 1996 г. В.А. ПЕЛЕШКО

ДЕФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЕФОРМАЦИОННО-АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Большинство металлов в начальном состоянии (после выплавки или отжига) вполне изотропны. Однако пластическое деформирование, которому подвергаются перед эксплуатацией детали машин и конструкций для придания им нужных размеров и свойств, вызывает появление анизотропии упругопластических характеристик. В настоящей работе строится модель, пригодная для расчета конструкций в случае предварительного и повторного нагружений, близких к простым. Для такого вида нагружений целесообразно использовать определяющие соотношения конечного, а не дифференциального типа.

Предложены определяющие соотношения деформационного (конечного) типа для класса процессов простого нагружения материалов, анизотропных вследствие предварительного простого пластического деформирования с полной разгрузкой. При этом девиатор напряжений представлен в виде аддитивного ортогонального разложения по девиатору деформаций и девиатору векторной анизотропии. Коэффициентами этого разложения являются две материальные функции от интенсивности деформаций на этапе повторного нагружения и от угла между направлениями предварительного и повторного деформирования. Получены условия на материальные функции, при которых решение краевой задачи (в обобщенной постановке) существует и единственно; предложен итерационный метод (типа упругих решений) для его нахождения. Для идентификации модели достаточно знать диаграммы "напряжение – деформация" в двух простейших опытах на одноосное нагружение: активное – из начального изотропного состояния и обратное – после этого предварительного нагружения. Показано хорошее согласие с экспериментами из рассматриваемого класса процессов для мало- и среднеуглеродистых сталей, хромоникелевой стали, латуни, алюминиевого сплава. Обсуждаются обобщения на случаи произвольной величины предварительной деформации и разгрузки в состояние с ненулевым напряжением.

1. Определяющие соотношения. В соответствии с применяемым обычно в теории упругопластических процессов [1,2] подходом, разделим объемные и сдвиговые свойства материала. Относительно первых будем считать справедливым линейный закон связи между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций:

$$\sigma_{mm} = 3K\varepsilon_{mm} \tag{1.1}$$

где K – модуль объемной упругости.

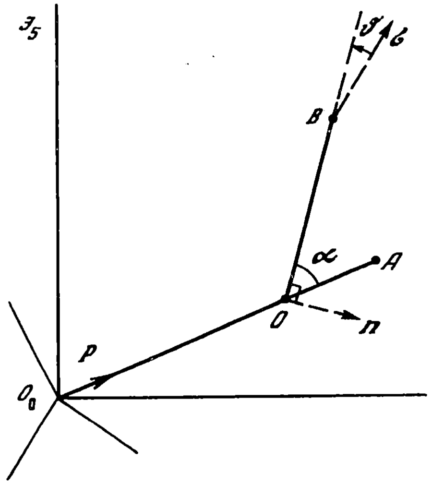
Сдвиговые свойства материала удобно исследовать в пятимерном изображающем пространстве $Э_5$ А.А. Ильюшина [2]. Определим основной класс процессов деформации Q для последующего изучения (см. фиг. 1): пропорциональное активное деформирование O_0A из начального изотропного состояния O_0 в пластическое состояние A, разгрузка AO, пропорциональное деформирование OB из нового начального состояния O. Свойства материала будем считать склерономными (не зависящими от скорости деформаций).

Отправной точкой для построения теории повторного простого нагружения явилось представление [2] вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в плоскости векторов деформации $\mathbf{э} = \overrightarrow{OB}$ и предварительного нагружения $\mathbf{p} = \overrightarrow{O_0A}/|O_0A|$:

$$\boldsymbol{\sigma} = N\mathbf{э} + L\mathbf{p} \tag{1.2}$$

где N, L – материальные функции от геометрических характеристик процесса O_0AOB (в частности, инвариантов векторов **э** и **p**, в том числе совместных). Математические аспекты соотношения (1.2) исследованы в работе [3].

Следует отметить, что в случае близости направлений **э** и $\pm$**p** разложение (1.2) становится плохо обусловленным: коэффициенты N, L чувствительны к малым изменениям угла α при α близких к 0 или π. Кроме того, при таких α величина L перестает быть малой по сравнению с N. С практической точки зрения представляется целесообразным модифицировать соотношение (1.2), заменив его ортогональным разложением $\boldsymbol{\sigma}$ в плоскости (**э**, **p**):



Фиг. 1

$$\boldsymbol{\sigma} = \Phi \mathbf{э}/э + \Psi \mathbf{n} \qquad (1.3)$$

где $э \equiv |\mathbf{э}|$; **n** – единичный вектор, лежащий в плоскости (**э**, **p**) ортогонально к **э** и под острым углом к **p** (см. фиг. 1). Указанными свойствами единственным образом определяется вектор

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}/\sin\alpha - \mathbf{э}/э/\mathrm{tg}\alpha \qquad (1.4)$$

Негативное влияние математической особенности при $\alpha = 0$; π перенесено теперь с коэффициентов разложения N, L, которые подлежат экспериментальному определению, на базисный вектор **n**, вычисляемый по формуле (1.4). Если положить $\Psi = 0$ при значениях α внутри небольших отрезков, расположенных на краях интервала [0; π] – области изменения угла $\alpha \equiv \arccos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{э}/э)$, то неопределенность выражения (1.4) при $\alpha = 0$; π не отразится на соотношении (1.3): при α близких к 0; π соотношение (1.3) будет иметь вид $\boldsymbol{\sigma} = \Phi\mathbf{э}/э$. Как показано далее, это предположение относительно Ψ оправдано экспериментально.

Найденные из опытов компоненты ортогонального разложения (1.3) таковы, что величина Ψ мала по сравнению с Φ, поэтому $\sigma \equiv |\boldsymbol{\sigma}| = (\Phi^2 + \Psi^2)^{1/2} \approx \Phi$, то есть Φ определяет скалярные свойства (модуль вектора напряжений σ). В свою очередь, функция Ψ определяет векторные свойства: $\Psi = \sigma\sin\vartheta$, где $\vartheta \equiv \alpha - \beta$ – угол между векторами $\boldsymbol{\sigma}$ и **э**; $\beta \equiv \arccos(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}/\sigma)$. Укажем также, что компоненты разложений (1.2) и (1.3) связаны простыми соотношениями $N = \Phi - \Psi\mathrm{ctg}\alpha$, $L = \Psi/\sin\alpha$, и зная Φ, Ψ, можно найти N, L.

Установим общую структуру коэффициентов Φ, Ψ. Согласно постулату изотропии [2], в классе процессов Q они являются функциями параметров внутренней геометрии траектории деформации:

$$\Phi = \Phi(э_0, \Delta э_0, э, \alpha), \quad \Psi = \Psi(э_0, \Delta э_0, э, \alpha) \qquad (1.5)$$

где $э_0 = |O_0A|$ – предварительная деформация; $\Delta э_0 = -|AO|$ – деформация, полученная на этапе разгрузки. Перенесем в п. 4 настоящей статьи исследование зависимостей (1.5) от двух первых параметров, предполагая, что значение предварительной деформации $э_0$ задано и составляет $\sim 10^{-2}$ (то есть находится в области упрочнения), а разгрузка AO является полной (до нуля по напряжениям в точке O). Тогда закон связи векторов напряжений и деформаций примет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \Phi(э, \alpha)\mathbf{э}/э + \Psi(э, \alpha)\mathbf{n} \qquad (1.6)$$

Выбор пары $(э, \alpha)$ среди всех возможных (исходя из постулата изотропии) пар геометрических характеристик звена OB обусловлен удобством разделения скалярных и векторных параметров (α = const в течение процесса из класса Q) и опытом подобных исследований [4, 5].

2. Исследование математической корректности краевой задачи. Пусть под действием массовых и поверхностных сил $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{T}(t, \mathbf{x})$ в каждой точке тела $\mathbf{x} \in \Omega \subset R^3$ реализуется упругопластический процесс из класса Q (обсуждение этого предположения будет дано в п. 4). Будем считать, что из решения краевой задачи теории малых упругопластических деформаций [1] об активном предварительном нагружении и краевой задачи о разгрузке (в линейной [1] или, при необходимости, в физически нелинейной [6, 7] постановке) известно поле девиатора остаточной деформации $Э^r_{ij}(\mathbf{x})$, а следовательно и поле направляющего девиатора предварительного нагружения $P_{ij}(\mathbf{x}) = Э^r_{ij}(\mathbf{x})/э^r(\mathbf{x})$, где $э^r \equiv (Э^r_{mn}Э^r_{mn})^{1/2}$. Тогда система уравнений краевой задачи о повторном нагружении при использовании определяющих соотношений (1.6), (1.1) имеет вид

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad S_{ij} = \Phi(э,\alpha)Э_{ij}/э + \Psi(э,\alpha)N_{ij}, \quad \sigma_{mm} = 3K\varepsilon_{mm}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{mm}\delta_{ij}/3, \quad Э_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{mm}\delta_{ij}/3, \quad э = (Э_{mn}Э_{mn})^{1/2}$$

$$\alpha = \arccos(P_{mn}Э_{mn}/э), \quad N_{ij} = P_{ij}/\sin\alpha - Э_{ij}/э/\operatorname{tg}\alpha \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad u_i|_{\Sigma_1} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = T_i$$

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega, \quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \phi, \quad \Sigma_1 \neq \phi$$

Традиционным способом перейдем к обобщенной постановке краевой задачи (2.1) в виде нелинейного операторного [8] уравнения

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A}\colon H(\Omega) \to H^*(\Omega), \quad \mathbf{f} \in H^*(\Omega)$$

$$\langle \mathbf{Au}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega [S_{ij}(\mathbf{u}) + \sigma_{mm}(\mathbf{u})\delta_{ij}/3]\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})d\Omega \tag{2.2}$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_\Omega X_m v_m d\Omega + \int_{\Sigma_2} T_m v_m d\Sigma_2, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\Omega)$$

Здесь $H(\Omega)$ – гильбертово пространство, образованное замыканием множества вектор-функций $\{u_i \in C^2(\Omega);\ u_i|_{\Sigma_1} = 0\}$ в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega [2GЭ_{ij}(\mathbf{u})Э_{ij}(\mathbf{v}) + K\varepsilon_{mm}(\mathbf{u})\varepsilon_{mm}(\mathbf{v})]d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H(\Omega)$$

При этом предполагается, что функции $\Phi(э, \alpha)/э$ и $\Psi(э, \alpha)/э$ непрерывны и ограничены, а внешние нагрузки удовлетворяют условиям

$$X_i(t, \mathbf{x}) \in L^p(\Omega) \ \ (p > 6/5), \quad T_i(t, \mathbf{x}) \in L^q(\Sigma_2) \ \ (q > 4/3) \tag{2.3}$$

Если выполнено неравенство

$$\Phi(э,\alpha)/э \geqslant \delta = \text{const} > 0, \quad \forall (э,\alpha) \in (0;+\infty) \times [0;\pi] \tag{2.4}$$

то оператор $\mathbf{A}$ (2.2) коэрцитивен

$$\langle \mathbf{Au}, \mathbf{u} \rangle = \int_\Omega [\Phi(э,\alpha)э + K(\varepsilon_{mm})^2]d\Omega \geqslant \min\{\delta/(2G); 1\}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in H(\Omega)$$

Следующие условия:

$$\Phi(э,\alpha) - \Psi(э,\alpha)\operatorname{ctg}\alpha > 0, \quad \forall (э,\alpha) \in (0;+\infty) \times (0;\pi) \tag{2.5}$$

$$W \equiv \Phi(э_1,\alpha_1)[э_1 - э_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)] + \Phi(э_2,\alpha_2)[э_2 - э_1\cos(\alpha_2 - \alpha_1)] +$$

$$+\Psi(э_1,\alpha_1)э_2[\cos\alpha_1\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos\alpha_2]/\sin\alpha_1+$$
$$+\Psi(э_2,\alpha_2)э_1[\cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)-\cos\alpha_1]/\sin\alpha_2>0,$$
$$\forall(э_1,\alpha_1),(э_2,\alpha_2)\in(0;+\infty)\times(0;\pi),\quad (э_1,\alpha_1)\neq(э_2,\alpha_2) \tag{2.6}$$

обеспечивают строгую монотонность оператора **A**:

$$\langle \mathbf{Au}_1-\mathbf{Au}_2,\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\rangle=\int_\Omega [S_{ij}(\mathbf{u}_1)-S_{ij}(\mathbf{u}_2)][Э_{ij}(\mathbf{u}_1)-Э_{ij}(\mathbf{u}_2)]d\Omega+$$
$$+K\int_\Omega [\varepsilon_{mm}(\mathbf{u}_1)-\varepsilon_{mm}(\mathbf{u}_2)]^2 d\Omega\geqslant\int_\Omega W d\Omega>0,\quad \forall\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in H(\Omega),\quad \mathbf{u}_1\neq\mathbf{u}_2$$

Радиальная непрерывность оператора **A** следует из непрерывности функций $\Phi(э,\alpha)$ и $\Psi(э,\alpha)$.

Из установленных свойств оператора **A** следует [8]:

Теорема. Пусть непрерывные и ограниченные функции $\Phi(э,\alpha)/э$ и $\Psi(э,\alpha)/э$ удовлетворяют условиям (2.4)–(2.6), а внешние нагрузки – условиям (2.3). Тогда обобщенное решение $\mathbf{u}\in H(\Omega)$ краевой задачи (2.1) существует и единственно.

Для решения задачи (2.1) можно предложить следующий итерационный метод:

$$2GЭ^{(k+1)}_{ij,j}+K\varepsilon^{(k+1)}_{mm,i}+X^{(k)}_i=0 \tag{2.7}$$
$$[2GЭ^{(k+1)}_{ij}n_j+K\varepsilon^{(k+1)}_{mm}n_i]_{\Sigma_2}=T^{(k)}_i,\quad u^{(k+1)}_i|_{\Sigma_1}=0\quad (k=0,1,2,\ldots)$$
$$X^{(k)}_i\equiv-2GЭ^{(k)}_{ij,j}-K\varepsilon^{(k)}_{mm,i}+$$
$$+\gamma_k\{X_i+[\Phi(э^{(k)},\alpha^{(k)})Э^{(k)}_{ij}/э^{(k)}+\Psi(э^{(k)},\alpha^{(k)})N^{(k)}_{ij}]_{,j}+K\varepsilon^{(k)}_{mm,i}\}$$
$$T^{(k)}_i\equiv[2GЭ^{(k)}_{ij}n_j+K\varepsilon^{(k)}_{mm}n_i]_{\Sigma_2}+$$
$$+\gamma_k\{T_i-[\Phi(э^{(k)},\alpha^{(k)})Э^{(k)}_{ij}/э^{(k)}+\Psi(э^{(k)},\alpha^{(k)})N^{(k)}_{ij}]n_j-K\varepsilon^{(k)}_{mm}n_i\}_{\Sigma_2},\quad \gamma_k\in(0;1]$$

На каждом итерационном шаге следует решить краевую задачу линейной теории упругости с фиктивными внешними нагрузками $\mathbf{X}^{(k)}$, $\mathbf{T}^{(k)}$, определенными из решения задачи на предыдущем шаге. В качестве нулевого приближения можно взять $\mathbf{u}^{(0)}\equiv 0$, тогда на первом шаге будем иметь задачу теории упругости с реальными нагрузками **X, T** (при $\gamma_0=1$). В практических расчетах можно положить $\gamma_k\equiv 1$ и лишь в случае неустойчивости процесса сходимости необходимо скорректировать γ_k в сторону приближения к нулю.

Заметим, что при выполнении условий теоремы соотношение (1.6) устанавливает взаимнооднозначное и непрерывное соответствие между векторами $\boldsymbol{\sigma}$ и **э**: если задан **э**, то $\boldsymbol{\sigma}$ находится в явном виде; если задан $\boldsymbol{\sigma}$, то **э** однозначно находится из решения алгебраической системы, например, итерационным методом

$$\mathbf{э}^{(k+1)}=\mathbf{э}^{(k)}-\gamma_k[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{э}^{(k)})-\boldsymbol{\sigma}]/(2G)\quad (k=0,1,2,\ldots;\ \gamma_k\in(0;1])$$

Несколько замечаний о физическом смысле условий теоремы. Так как функция $\Phi(э,\alpha)$ определяет величину σ, то условие (2.4) и условие строгой монотонности $\Phi(э,\alpha)$ по аргументу $э$ при любом фиксированном α (частный случай условия (2.6) при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$) выделяют класс материалов, упрочняющихся при повторном пропорциональном деформировании. Отметим, что в экспериментах даже те металлы, которые имеют площадку текучести при деформировании из начального изотропного состояния (мало- и среднеуглеродистые стали), при повторном пропорциональном нагружении в любом фиксированном направлении обнаруживают положительное упрочнение [9, 10].

Условие (2.5) также имеет ясный физический смысл: в разложении (1.2) компонента $N=\Phi-\Psi\mathrm{ctg}\alpha$ положительна. Это означает, что проекции векторов $\boldsymbol{\sigma}$ и **э** на вектор, ортогональный к **p** и лежащий в плоскости (**э**, **p**), должны быть одного знака (например, если **p** соответствует кручению, то при повторной пропорциональной комбинации деформаций осевого растяжения и кручения не может возникнуть сжимающее осевое напряжение), что подтверждается экспериментами [9–12].

Второе из условий монотонности **A** – условие (2.6) – сложным образом связывает две пары переменных и, за исключением уже рассмотренного частного случая $\alpha_1 = \alpha_2$, не допускает простой физической интерпретации. Оно должно быть просто проверено (например, каким-либо численным методом), если найдены экспериментальные аппроксимации функций $\Phi(э, \alpha)$, $\Psi(э, \alpha)$.

3. Аппроксимации материальных функций и экспериментальная проверка определяющих соотношений. Систематическое экспериментальное исследование пропорционального повторного нагружения проведено в работе [9]. Отожженные тонкостенные трубчатые образцы из малоуглеродистой стали S10C испытаны по двум сериям программ: a) предварительное кручение до деформации 2 или 4%, затем полная разгрузка и повторное нагружение комбинацией растяжения и кручения в плоскости ($\sigma_1 = \sqrt{2/3}\sigma_{11}$, $\sigma_3 = \sqrt{2}\sigma_{12}$) под углом $\beta_0 = (j-1)\pi/6$, $j = 1, 2, \ldots, 7$ к предварительному нагружению; b) – аналогично a), но в качестве предварительного нагружения выбрано растяжение[1].

На фиг. 2, *a*; 2, *b* сплошными линиями представлены экспериментальные зависимости σ и ϑ от $э$, вычисленные[2] по данным [9] для программ серии a) в случае 4% – предварительной деформации (на фиг. 2 и 6 напряжения даны в кГ/мм^2, деформации – в процентах, угол ϑ – в градусах). Номер каждой кривой совпадает со значением j в формуле, задающей β_0. В остальных группах опытов [9] результаты аналогичны и поэтому в данной работе не приводятся.

Рассмотрим вначале скалярные свойства как более простые в описании. Так как кривые $\sigma \sim э$ при всех $\beta_0 \in (0; \pi)$ монотонно расположены между кривыми *1* ($\beta_0 = 0$) и *7* ($\beta_0 = \pi$), то функцию скалярных свойств $\Phi(э, \alpha)$ удобно искать в виде

$$\Phi(э, \alpha) = F_1(э)\cos^2\varphi(\alpha) + F_2(э)\sin^2\varphi(\alpha) \qquad (3.1)$$

где $F_1(э)$ и $F_2(э)$ – функции прямого и обратного нагружения, определяемые кривыми *1* и *7* соответственно. Исходя из конкретного расположения кривых $\sigma \sim э$ на фиг. 2, *a*, можно предложить следующую аппроксимацию для вспомогательного угла φ (фиг. 3):

$$\varphi(\alpha) = [(\alpha - \pi/6)h(\alpha - \pi/6) + (\alpha - 5\pi/6)h(\alpha - 5\pi/6)]/2 \qquad (3.2)$$

где $h(x)$ – функция Хевисайда. Тогда, в частности,

$$\Phi(э, 0) = \Phi(э, \pi/6) = F_1(э), \quad \Phi(э, \pi/3) = 0{,}93F_1(э) + 0{,}07F_2(э)$$

$$\Phi(э, \pi/2) = 0{,}75F_1(э) + 0{,}25F_2(э), \quad \Phi(э, 2\pi/3) = [F_1(э) + F_2(э)]/2$$

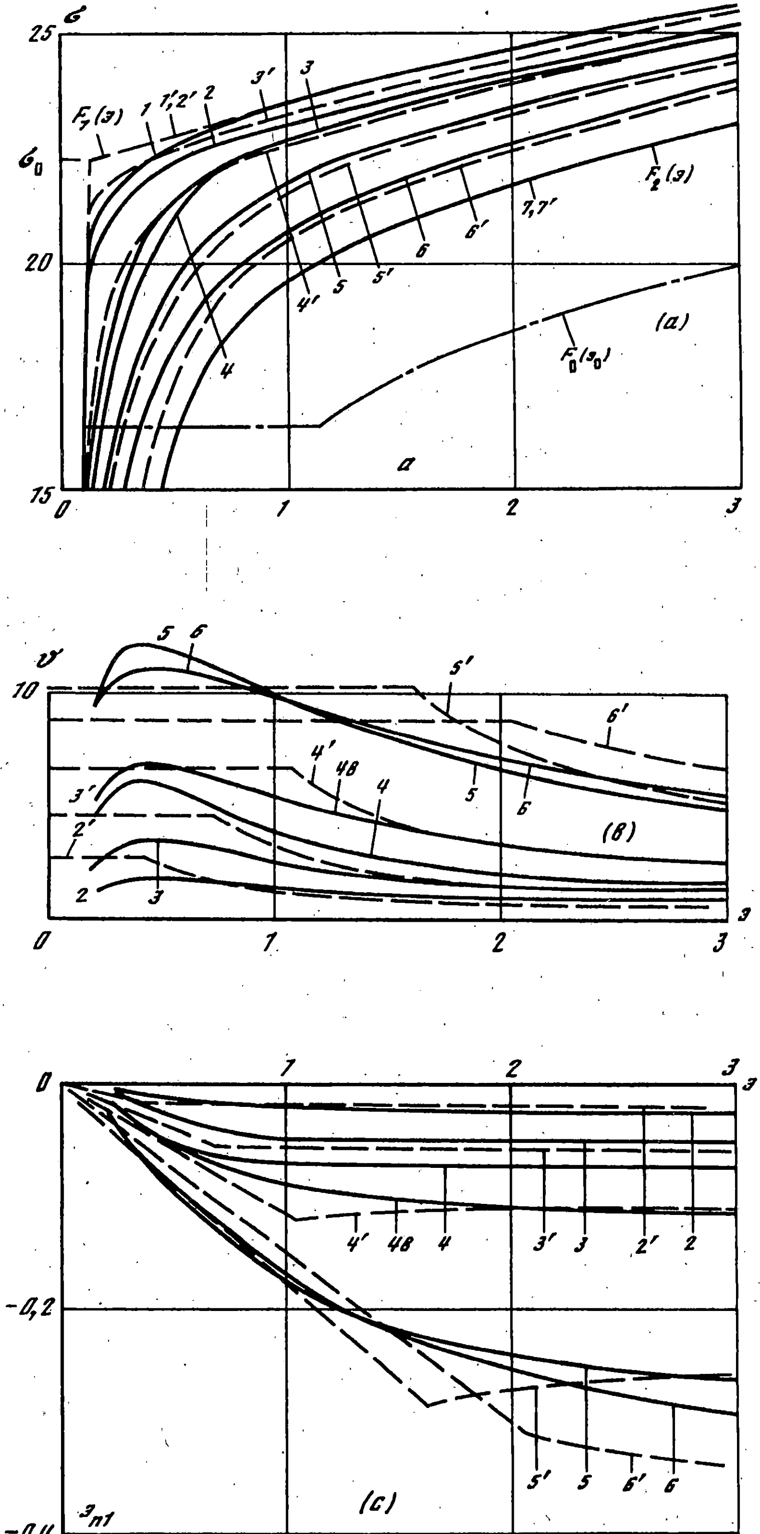
$$\Phi(э, 5\pi/6) = 0{,}25F_1(э) + 0{,}75F_2(э), \quad \Phi(э, \pi) = F_2(э)$$

Функцию $F_1(э)$ можно аппроксимировать линейно-упругим участком при $\sigma \leqslant \sigma_0$ и

---

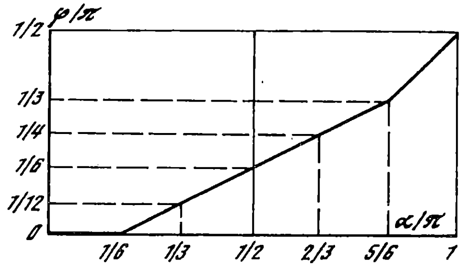
[1] Строго говоря, указанные программы нагружения не принадлежат к первоначально выделенному классу Q: по виду они аналогичны процессам из класса Q, но в пространстве напряжений Σ_5, а не в пространстве деформаций $Э_5$. Однако в силу малости [9–12] угла ϑ в таких опытах вполне приемлемо для целей аппроксимации материальных функций и проверки определяющих соотношений использовать процессы повторного пропорционального нагружения. Класс таких процессов обозначим через Q_1.

[2] Пространство напряжений (σ_1, σ_3) модифицировано [9]: $(\sigma_1^* = q_1\sigma_1, \ \sigma_3^* = \sigma_3)$. Для стали S10C в области упрочнения $(э_0 \sim 10^{-2})$ $q_1 \approx \mathrm{const} = 0{,}92$. При такой модификации напряжений (σ_1, σ_3) (звездочку здесь и далее опустим) для любого пропорционального нагружения комбинацией растяжения и кручения из начального изотропного состояния O_0 с высокой точностью векторы $\boldsymbol{\sigma}_0$ и $\mathbf{э}_0$ сонаправлены, а диаграмма скалярных свойств $\sigma_0 \sim э_0$ не зависит от коэффициента пропорциональности между σ_1 и σ_3.

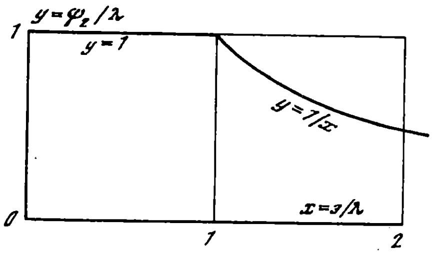


25
20
15
σ
σ_0
$F_1(э)$
1
1', 2'
2
3'
3
4
4'
5
5'
6
6'
7, 7'
$F_2(э)$
$F_0(э_0)$
(a)
a
0
1
2
3
ϑ
10
5
6
5'
6'
4'
48
4
3'
2'
1
2
3
(в)
э
0
1
2
3
0
-0,2
-0,4
$э_{п1}$
4'
48
4
3'
3
2'
2
5'
5
6'
6
(с)

Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

продолжением кривой упрочнения при $\sigma \geqslant \sigma_0$ (см. фиг. 2 *a*):

$$F_1(э) = 2Gэh(\sigma_0 / (2G) - э) + F_0(э_0^p + э)h(э - \sigma_0 / (2G)) \tag{3.3}$$

Изучению функции обратного нагружения $F_2(э)$ посвящена обширная литература (см., например, [6]). Не останавливаясь на этом вопросе, будем считать $F_2(э)$ известной из опыта на обратное нагружение.

Установить закономерности поведения векторных свойств, исходя непосредственно из зависимостей $\vartheta \sim э$, затруднительно. Картина проясняется, если построить графики $э_{n1} \sim э$ (фиг. 2, *c*), где $э_{n1} = -э\sin\vartheta$ – проекция вектора **э** на вектор $\mathbf{n}_1$, лежащий в плоскости ($\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\sigma}$) ортогонально к $\boldsymbol{\sigma}$ и под острым углом к $\mathbf{p}$. Накопление деформации $э_{n1}$ происходит в основном на начальном участке $э \leqslant \lambda(\alpha)$ ($\lambda(\alpha)$ – деформация, при которой σ достигает своего предварительного значения σ_0), а при дальнейшем продолжении процесса величина $э_{n1}$ изменяется мало. Такое поведение $э_{n1} \sim э$ аппроксимирует следующая простая схема: линейная зависимость при $э \leqslant \lambda(\alpha)$ непрерывно переходит в константу при $э \geqslant \lambda(\alpha)$. Так как $\Psi = \Phi\mathrm{tg}\vartheta \approx \Phi\sin\vartheta = -\Phi э_{n1}/э$, то функцию векторных свойств $\Psi(э, \alpha)$ будем искать в виде

$$\Psi(э, \alpha) = a\psi_1(\alpha)\psi_2(э, \lambda(\alpha))\Phi(э, \alpha) \tag{3.4}$$

Функция ψ_2 реализует указанную схему поведения зависимости $э_{n1} \sim э$ при данном α (фиг. 4):

$$\psi_2(э, \lambda(\alpha)) = \lambda(\alpha)[h(\lambda(\alpha) - э) + \lambda(\alpha)/э h(э - \lambda(\alpha))] \tag{3.5}$$

Для функции $\lambda(\alpha)$ целесообразна билинейная аппроксимация

$$\lambda(\alpha) = [b + (c - b)2\alpha/\pi]h(\pi/2 - \alpha) + [c + (d - c)(2\alpha/\pi - 1)]h(\alpha - \pi/2) \tag{3.6}$$

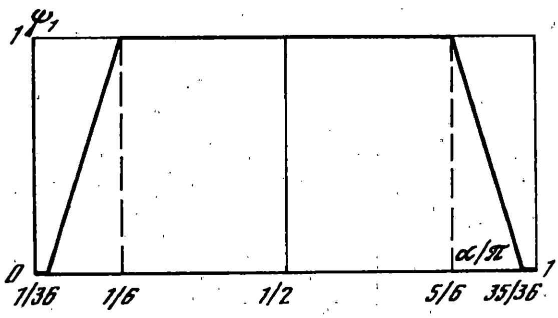
где $b \equiv \lambda(0) = \sigma_0/(2G)$, $c \equiv \lambda(\pi/2)$ – корень уравнения $0{,}75F_1(c) + 0{,}25F_2(c) = \sigma_0$, $d \equiv \lambda(\pi)$ – корень уравнения $F_2(d) = \sigma_0$.

Функция ψ_1 служит для обращения в нуль функции Ψ на краях интервала $[0; \pi]$, что устраняет неопределенность (1.4) при $\alpha = 0; \pi$ и имеет экспериментальное обоснование: $э_{n1} = 0$ при $\alpha = \beta_0 = 0; \pi$ [9–12]. С учетом требования непрерывности функция $\psi_1(\alpha)$ имеет вид, представленный на фиг. 5, или в аналитическом виде

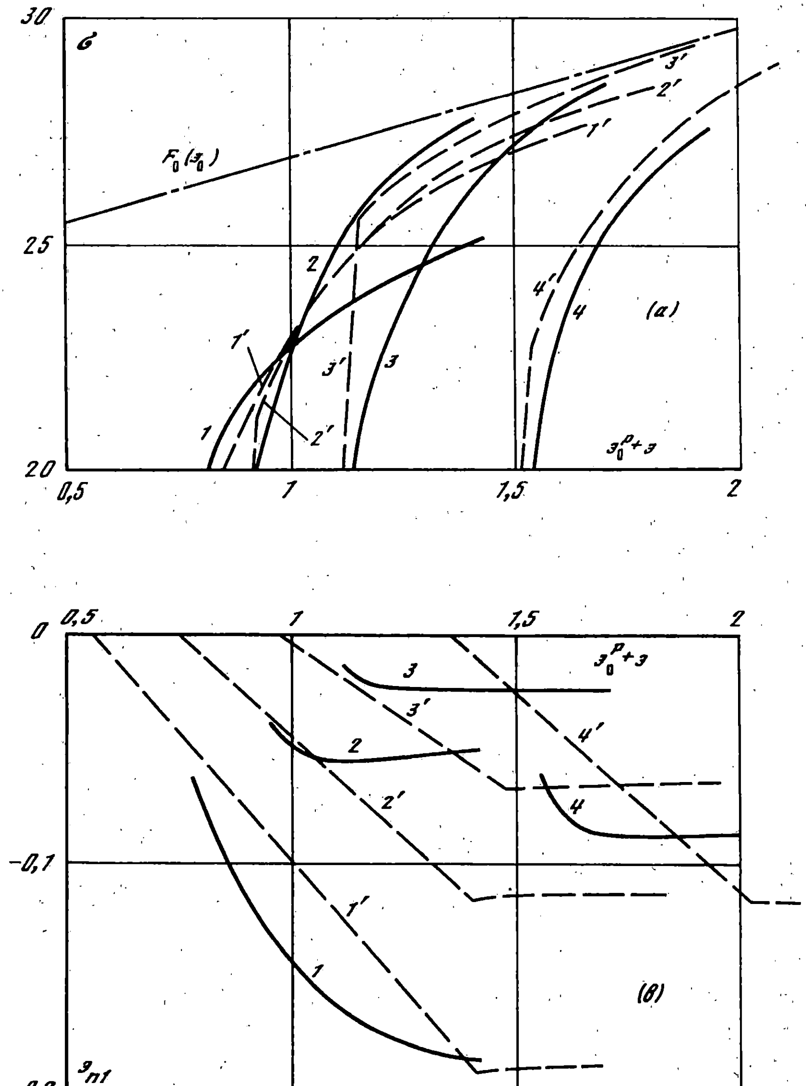
$$\psi_1(\alpha) = \{(\alpha - \pi/36)h(\alpha - \pi/36) - (\alpha - \pi/6)h(\alpha - \pi/6) -$$
$$-(\alpha - 5\pi/6)h(\alpha - 5\pi/6) + (\alpha - 35\pi/36)h(\alpha - 35\pi/36)\}36/(5\pi) \tag{3.7}$$

Для определения значения a в (3.4) будем исходить из величины $э_{n1}$ в опытах с $\beta_0 = \pi/2$ при $э \geqslant \lambda(\pi/2)$. Кривые *4*, *4b* на фиг. 2, *c* (кривая *4b* соответствует опыту с $\beta_0 = \pi/2$ в серии *b*)) показывают, что эту величину можно считать константой $a_1 = -0{,}001$. Тогда при $э = \lambda(\pi/2)$ получим $-a_1/\lambda(\pi/2) = \Psi(\lambda(\pi/2), \pi/2)/\sigma_0$, откуда

$$a = -a_1/[\lambda(\pi/2)]^2, \quad a_1 = -0{,}001 \tag{3.8}$$


ψ1
1
0
1/36
1/6
1/2
5/6
35/36
α/π
1

Фиг. 5


30
25
20
σ
F0(э0)
1
2
3
4
1'
2'
3'
4'
(a)
э0p+э
0,5
1
1,5
2
0
−0,1
−0,2
эп1
(в)

Фиг. 6

Результаты расчетов по соотношению (1.6) с функциями Ф, Ψ вида (3.1)–(3.8) представлены на фиг. 2 штриховыми линиями.

Обширное исследование повторного нагружения проведено В.П. Дегтяревым [10]. Тонкостенные трубчатые образцы (из сталей марок 1Х18Н10Т, 45, 30ХГСА) были испытаны по программам нагружения из класса Q_1 с помощью осевого растяжения и внутреннего давления. На фиг. 6 представлены экспериментальные и теоретические кривые (соответственно сплошными и штриховыми линиями) скалярных и векторных свойств в четырех опытах с нержавеющей сталью 1Х18Н10Т: *1* – $\beta_0 = 2\pi/3$, *2, 4* – $\beta_0 = \pi/2$, *3* – $\beta_0 = \pi/3$. Так как предварительная деформация $э_0$ была различной в разных опытах, то все данные представлены относительно общей (суммарной с $э_0^p$) деформации. Теоретические кривые получены с использованием (1.6), (3.1)–(3.8), причем значение a_1 взято равным –0,001, как и для стали S10C. Примечательно, что экспериментальные значения деформации $э_{n1}$ в опытах с $\beta_0 = \pi/2$ при $э \geqslant \lambda(\pi/2)$, которые определяют значение a_1, близки к –0,001 также для сталей 45 и 30ХГСА [10], латуни BSBM1 [11], алюминиевого сплава 5056 (аналог АМг5) [12]. Поэтому целесообразно использовать значение $a_1 = -0{,}001$ как универсальное приближение для всех металлов, вполне изотропных в начальном состоянии O_0.

Численно проверено, что функции Ф, Ψ вида (3.1)–(3.8), найденные из опытов [9–12] для исследованных в них металлов, удовлетворяют математическим условиям (2.4)–(2.6).

Таким образом, аппроксимации (3.1)–(3.8) относительно просто и в согласии с экспериментальными данными и условиями математической корректности определяют материальные функции Ф, Ψ, входящие в соотношение (1.6). Экспериментальному нахождению подлежат лишь две функции – активного простого начального нагружения $F_0(э_0)$ и обратного нагружения $F_2(э)$, причем оба опыта являются одноосными.

Для упрощенных расчетов можно предложить инженерный вариант теории, в котором Ψ тождественно равно нулю: $\boldsymbol{\sigma} = \Phi(э, \alpha)\mathbf{э}/э$, $\Phi(э, \alpha)$ имеет вид (3.1)–(3.3). Этот вариант сохраняет описание анизотропии скалярных свойств, пренебрегая менее существенной и более сложной анизотропией векторных свойств. Сходное по форме соотношение предложено в работе [13], где функция Ф определяется с помощью некоторой процедуры пересчета экспериментальных данных.

4. Дальнейшие уточнения и обобщения. *1*. Область упругих деформаций, относящаяся к начальному этапу повторного нагружения, имеет свою специфику. Известно, что предварительное пластическое деформирование приводит к уменьшению модулей упругости, причем не только в направлении предварительного деформирования, но и в любом другом. Для сталей это уменьшение составляет от 2–8% [14, 15] до 10–20% [16] (разница в цифрах во многом связана со способом вычисления модулей: выделение начального линейного участка на реально нелинейной диаграмме $\sigma \sim э$ весьма условно). Величина уменьшения модулей слабо зависит от величины предварительной деформации $э_0$, если $э_0 \sim 10^{-2}$, но вследствие некоторой вязкости существенно зависит от времени отдыха материала между предварительным и повторным нагружениями: уже через несколько недель модули упругости практически восстанавливаются [16].

Величины модулей упругости определяют анизотропию скалярных упругих свойств материала. Исследование анизотропии векторных упругих свойств представляет более трудную задачу, так как требует изучения упругих деформаций в направлении, ортогональном к основному направлению процесса, то есть деформаций, на порядок меньших упругих в основном направлении. Экспериментальные данные [9, 10] представлены в терминах пластических составляющих деформаций, поэтому с достаточной точностью восстановить упругие участки экспериментальных кривых на фиг. 2, 6 невозможно. Констатируя необходимость дальнейшего изучения деформационной анизотропии упругих свойств металлов, укажем здесь ее двустороннюю оценку: с одной стороны – изотропная упругость с начальными модулями, с другой стороны – уменьшение модулей упругости на 20% (скалярная анизотропия), а также наличие угла ϑ

между σ и э (фиг. 1), задаваемого соотношением (1.6) с функцией Ψ вида (3.4)–(3.8): $\mathrm{tg}\vartheta = a\psi_1(\alpha)\lambda(\alpha)$ и составляющего +(0–10)° (векторная анизотропия).

2. Рассмотрим вопрос о зависимости функций Φ, Ψ (1.5) от величины предварительной деформации $э_0$. Для этого целесообразно разбить область возможных значений $э_0$ на три интервала в соответствии с порядком $э_0$: 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}. Как показывают эксперименты [9–12], при $э_0 \sim 10^{-2}$ поведение скалярных и векторных свойств материала можно считать не зависящим от $э_0$ (что является проявлением общего свойства стабилизации пластических свойств металлов после деформаций порядка 10^{-2}). Чтобы перейти в аналитических аппроксимациях (3.1)–(3.8) от фиксированного $э_0$ к переменному, надо лишь учесть зависимость $F_2(э)$ от параметра $э_0$. Так как в области значений $э_0 \sim 10^{-2}$ величина $\sigma_0 = F_0(э_0)$ изменяется относительно мало (обычно на 20–40%), то в первом приближении $F_2(э, э_0) = qF_2(э, э_{0*})$, $q = [F_0(э_0)/F_0(э_{0*})+1]/2$, где $э_{0*} \sim 10^{-2}$ – некоторое фиксированное значение предварительной деформации, при котором экспериментально найдена функция обратного нагружения $F_2(э, э_{0*})$. Функцию $\lambda(\alpha)$ можно считать не зависящей от $э_0$, поэтому вид функций (3.1)–(3.8) останется неизменным. Такое обобщение на случай переменного $э_0$ использовано в расчетах, относящихся к серии опытов [10] (фиг. 6).

Область значений $э_0 \sim 10^{-3}$ является переходной от упругого предварительного деформирования, не вызывающего анизотропии, к уже рассмотренному развитому пластическому предварительному деформированию. В первом приближении связь $\sigma \sim$ э в этом случае можно получить линейной комбинацией соотношения $\sigma/F_0(э) =$ э$/э$ (простое нагружение из начального состояния O_0) и соотношения (1.6). Область больших предварительных деформаций $э_0 \sim 10^{-1}$ требует дальнейшего изучения, но можно ожидать, что отличие от случая $э_0 \sim 10^{-2}$ будет невелико.

3. Актуальной проблемой является исследование зависимости функций Φ, Ψ (1.5) от длины участка разгрузки $|AO|$. За исключением случая однородного напряженного состояния, после снятия внешних нагрузок в теле возникает поле остаточных напряжений, то есть разгрузка в любой материальной точке в общем случае не будет полной. В литературе описаны лишь единичные опыты на повторное нагружение после частичной разгрузки [17, 18]. Качественно их результаты наводят на мысль о построении функций Φ, Ψ в случае неполной разгрузки с помощью комбинации (в первом приближении линейной – вида $\eta x + (1-\eta)y$, где η – отношение реальной разгрузки к полной) функций (3.1)–(3.8), относящихся к случаю полной разгрузки, и соответствующих функций в случае двузвенного деформирования без разгрузки в точке излома, которые хорошо изучены [14, 19] в теории двузвенных процессов. Для продвижения в вопросе о неполной разгрузке необходимы систематические экспериментальные исследования типа "веера траекторий" при различных $\Delta э_0$, причем не только $|\Delta э_0| < \sigma_0/(2G)$, но и $|\Delta э_0| > \sigma_0/(2G)$.

4. Первоначальный класс процессов Q может быть расширен за счет включения близких (в том же смысле, что и в теории малых упругопластических деформаций [1, 2]) к Q процессов. К ним, в частности, можно отнести процессы класса Q_1. Кроме того, учитывая свойство пластической памяти металлов [20], можно расширить понятие предварительного нагружения: оно может быть не только однократным, но и многократным, если все предыдущие нагружения, независимо от их направлений, имели меньшую интенсивность, чем последнее предварительное нагружение, направление которого и будет задавать вектор **p**.

Условия изменения во времени внешних нагрузок, при выполнении которых в каждой точке тела реализуется процесс из класса Q или близкий, установить трудно, но можно предположить, что это произойдет при пропорциональном возрастании внешних нагрузок, затем аналогичном их убывании и последующем пропорциональном возрастании с иными, чем на первом этапе, коэффициентами пропорциональности.

Автор благодарен профессору Быкову Д.Л. за постановку задачи и научное руководство работой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-01212а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
3. *Краева О.Д.* Об одном варианте деформационно-анизотропной теории пластичности // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1989. № 3. С. 97–99.
4. *Пелешко В.А.* Условия математической корректности варианта дифференциально-нелинейных соотношений пластичности и методы решения краевых задач // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1990. № 6. С. 37–43.
5. *Пелешко В.А.* Экспериментальное исследование варианта теории упругопластического деформирования металлов при сложных нагружениях // Пробл. прочности. 1990. № 12. С. 48–53.
6. *Москвитин В.В.* Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
7. *Пелешко В.А.* К теории разгрузки упругопластических тел // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1993. № 1. С. 84–89.
8. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
9. *Ohashi Y., Kawashima K., Nagahiko S.* Precise experimental results and an analytical formulation of the subsequent plastic deformation of mild steel subjected to pre-stressing // Bull. JSME. 1975. V. 18. No. 125. P. 1218–1225.
10. *Дегтярев В.П.* Деформации и разрушение в высоконапряженных конструкциях. М.: Машиностроение, 1987. 105 с.
11. *Yoshida F., Ikegami K., Shiratori E.* Stress-strain relation of the material completely unloaded after plastic deformation in the combined reloading // J. Jap. Soc. Technol. Plasticity. 1977. V. 18. No. 198. P. 525–532.
12. *Ohashi Y., Kawashima K.* Effect of prestrain on plastic behaviour after corner on some loading paths // Trans. JSME. 1978. V. 44. No. 379. P. 882–893.
13. *Шевченко Ю.Н., Бастун В.Н.* К построению зависимостей между напряжениями и деформациями с учетом анизотропного упрочнения материала // Прикл. механика. 1978. Т. 14. № 6. С. 3–8.
14. *Ленский В.С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 58–82.
15. *Шишмарев О.А., Кузьмин Е.Я.* О зависимости упругих постоянных металла от пластических деформаций // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. № 3. С. 167–169.
16. *Жуков А.М.* Упругие свойства пластически деформированного металла и сложное нагружение // Инж. сб. 1960. Т. 30. С. 3–16.
17. *Kaneko K., Ikegami K., Shiratori E.* Plastic deformation behavior of metal for complex loading paths // Bull. JSME. 1975. V. 18. No. 125. P. 1209–1217.
18. *Khan A.S., Wang X.* On non-proportional infinitesimal plastic deformation after finite plastic prestraining and partial unloading // J. Mech. Phys. Solids. 1988. V. 36. No. 5. P. 519–535.
19. *Васин Р.А.* Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971. Вып. 1. С. 59–126.
20. *Miastkowski J.* Analysis of the memory effect of plastically prestrained material // Arch. Mech. Stos. 1968. V. 20. No. 3. P. 261–277.

Москва

Поступила в редакцию
10.VII.1995