

**МЕХАНИКА  
ТВЕРДОГО ТЕЛА  
№ 6 • 1996**

УДК 539.3

© 1996 г. Г.А. ВАНИН

**ГРАДИЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ  
ВОЛН СДВИГА В ВОЛОКНИСТОЙ СРЕДЕ**

На основе градиентной теории композитов [1] рассмотрена задача о распространении коротких волн продольного сдвига, когда длина волны соизмерима с размерами элементарной ячейки структуры среды на выбранном масштабном уровне. Решение задачи для первого масштабного уровня построено без учета дифракционного рассеяния волн. Найдено влияние градиентного состояния среды на длины волн в ней, проявляющееся в росте длины волны с увеличением частоты. Рассмотрено распространение волн сдвига в двухуровневой регулярной среде с учетом дифракционного рассеяния на включениях второго масштабного уровня. Решение задачи найдено в виде функций, определяющих поле в явном виде как в отдельных ячейках среды, так и его изменение между ними.

1. Рассмотрим распространение волн продольного сдвига в линейно армированной среде с круговыми одинаковыми волокнами, оси которых расположены в узлах гексагональной сетки. Для объема  $V = hF$  согласно принципу Гамильтона [2] имеем

$$\delta \int_{t_0}^t \int_F dt dF (\hat{T} - \hat{U}) = 0 \quad (1.1)$$

Удельная потенциальная энергия сдвига в градиентной теории одноуровневых композитов известна [1]:

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \left[ \hat{\tau}_{1k} \hat{\gamma}_{1k} + \sum_{n=0}^N \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(n)} \hat{m}_{ik} \hat{x}_{ik} \right] \quad (1.2)$$

$$\hat{\tau}_{1k} = G_{12} \hat{\gamma}_{1k} = G_{12} \partial u / \partial x_k, \quad \hat{x}_{ik} = \varepsilon_k / 2 \partial^2 u / (\partial x_i \partial x_k)$$

$$\hat{m}_{ik}^{sm} = 4G_{12} \mu_{s+m+1} \hat{x}_{ik}^{sm} = 4G_{12} \mu_{s+m+1} \partial^{s+m} \hat{x}_{ik} / (\partial x^s \partial y^m)$$

$$\varepsilon_2 = -1, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad x_2 = x, \quad x_3 = y \quad (i, k = 2, 3)$$

где  $G_{12}$  – модуль упругости при продольном сдвиге волокнистой среды [3],  $\mu_p$  – постоянные, определяющие сопротивление материала при градиентных состояниях [1],  $u$  – продольные смещения среды. Удельная кинетическая энергия  $\hat{T}$  в принятом приближении будет (точка сверху обозначает производную по времени  $t$ ):

$$\hat{T} = \frac{1}{2F} \int_F \gamma u^2 dF, \quad \dot{u} = \exp(x \partial / \partial x + y \partial / \partial y) \ddot{u} \quad (1.3)$$

При вычислении  $\dot{u}^2$  в разложении (1.3) сохраняем члены равного порядка с учетом симметрии рассматриваемой структуры среды. Варьируя функции  $\hat{T}$  и  $\hat{U}$ , получим

$$\delta \hat{T} = -(\gamma_1 \ddot{u} - J_2 \gamma_2 \nabla^2 \ddot{u} + \gamma_4 J_4 \gamma_3 \nabla^4 \ddot{u} - \dots) \delta u + \dots$$

$$\delta \hat{U} = -G_{12} (\nabla^2 u - \mu_1 \nabla^4 u + \mu_2 \nabla^6 u - \dots) \delta u + \dots$$

Уравнения равновесия вытекают из (1.1):

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n [\mu_n \nabla^{2+2n} u - J_{2n} \rho_n^{-2} (n!)^{-2} \nabla^{2n} \ddot{u}] = 0 \quad (1.4)$$

$$\gamma_n = \gamma_a \zeta^n + \gamma(1 - \zeta^n), \quad J_{2n} = \frac{1}{F} \int_F x_k^{2n} dF$$

$$\nu_n^2 = G_{12} \gamma_{n+1}^{-1}, \quad \mu_n = -\frac{i G_{12}^n}{2 F G_{12} n! (n+1)!} \oint_L |z|^{2n} \bar{z} dz$$

$$G_{12}^n \approx G(1 + \zeta^n v_0)(1 - \zeta^n v_0)^{-1}, \quad v_0 = \zeta(1 - G/G_a)(1 + G/G_a)^{-1}$$

Здесь и везде в дальнейшем индексом  $a$  отмечаются величины, относящиеся к волокнам, без индекса – к матрице или ко всем компонентам одновременно,  $\zeta$  – относительное объемное содержание волокон,  $\gamma$  – плотность,  $F$  – площадь усреднения в ячейке среды,  $L$  – контур ячейки. При  $n = 0$  из (1.4) получаем уравнение распространения волн в классическом длинноволновом приближении. Каждому последующему  $n$  соответствует степень приближения по учету градиентного состояния среды. Усилия и моменты в первом и втором приближении определим через разрешающую функцию [1]:

$$T_{1n} = T_{1k} n_k = G_{12} \frac{\partial}{\partial n} \sum_n (-1)^n \mu_n \nabla^{2n} u$$

$$\left. \begin{aligned} M_n &= \partial^2 / \partial n^2 \\ M_s &= \partial^2 / (\partial s \partial n) - \rho_n^{-1} \partial / \partial s \end{aligned} \right\} G_{12} \sum_n (-1)^n \mu_{1+n} \nabla^{2n} u \quad (1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} M_n^1 &= -2 G_{12} \partial^3 / \partial n^3 \\ M_s^1 &= 2 G_{12} \partial^3 / (\partial n \partial s^2) \\ M_{ns}^1 &= 2 G_{12} \partial^3 / (\partial n^2 \partial s) \end{aligned} \right\} \mu_2 u + \dots$$

Естественные краевые условия задачи сформулированы на случай совершенного контакта двух сред и свободной граничной поверхности. Для первого случая при сохранении двух градиентных состояний

$$u^+ = u^-, \quad T_{1n}^+ = T_{1n}^-$$

$$(M_n - \partial M_{ns}^1 / \partial s)^+ = (M_n - \partial M_{ns}^1 / \partial s)^- \quad (1.6)$$

$$(M_s - \rho_n^{-1} M_{ns}^1)^+ = (M_s - \rho_n^{-1} M_{ns}^1)^-$$

$$(M_n^1)^+ = (M_n^1)^-, \quad (M_s^1)^+ = (M_s^1)^-$$

Для второго случая

$$T_{1n} - \partial / \partial s (M_s - \rho_n^{-1} M_{ns}^1 - 1/2 \partial M_s^1 / \partial s) = 0$$

$$M_n + (2 \rho_n)^{-1} M_s^1 - \partial M_{ns}^1 / \partial s = 0, \quad M_n^1 = 0 \quad (1.7)$$

Знаком плюс (минус) отмечены предельные значения функции слева (справа) от граничной поверхности,  $\partial/\partial n$  и  $\partial/\partial s$  – производные по нормали и дуге граничного контура,  $\rho_n$  и  $\rho_s$  – радиусы кривизны кривой по нормали и касательной к контуру.

2. Рассмотрим распространение плоских волн в неограниченной среде

$$u = u_0 \exp[i(k_1 x + k_2 y - \omega t)]$$

$$\sum_{n=0}^N k^{2n} [\mu_n k^2 - J_{2n} \nu_n^{-2} (n!)^{-2} \omega^2] = 0 \quad (2.1)$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

При сохранении членов с  $n = 0$  получаем известное решение задачи без учета градиентных состояний  $k^2 - \omega^2 \nu_0^{-2} = 0$ .

Полагая  $n = 0, 1, 2, \dots$ , получим уточненные соотношения для определения  $k$ . В первом приближении

$$k^2 (\mu_1 k^2 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2}) + k^2 - \omega^2 \nu_0^{-2} = 0$$

Сохраняя значения  $k$ , соответствующие незатухающим волнам при высоких частотах ( $1 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2} > 0$ ):

$$k^2 = (1 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2}) (4 J_2 G_{12}^1 / G_{12})^{-1} \{ -1 + [1 + 8 \omega^2 J_2 \nu_0^{-2} G_{12}^1 / G_{12} (1 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2})^{-2}]^{1/2} \} \quad (2.2)$$

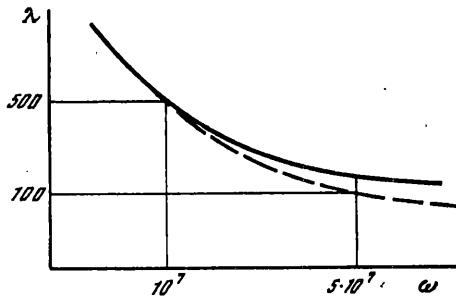
Наибольшее влияние градиентного состояния при продольном сдвиге линейно армированного композита [1] наблюдается в предельном случае пористой среды  $G_a = 0$ ,  $\gamma_a = 0$ . Для определенности в числовом примере рассмотрим волны в полимерной пористой среде с характеристиками  $\zeta = 0,65$ ,  $G/\gamma = 1,1183 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2$ ,  $\rho_a = 10^{-5} \text{ м}$ . Диаметр круга, равновеликого гексагональной ячейке структуры, равен  $\Phi = 2,48 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ . Числовые расчеты показывают, что учет градиентного состояния неоднородной среды приводит к росту длины волны  $\lambda$  в ней по сравнению с данными классической теории. Для рассматриваемого материала при частоте  $\omega = 10^7 \text{ с}^{-1}$  длина волны по сравнению с классической увеличивается всего на 0,15%. При частоте  $\omega = 5 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$  длина волны превышает классическую уже на 15% (фиг. 1). Дальнейшее уточнение результатов требует учета большего числа членов в уравнении (2.1), а также дифракционных явлений, так как длина волны становится сопоставимой с габаритными размерами элементарной ячейки структуры.

С учетом найденных значений параметров, рассмотрим распространение волн в неограниченной двухуровневой однотипной среде, образованной введением в рассмотренную пористую среду одинаковых цилиндрических пор больших диаметров. Центры последних размещаем в узлах регулярной сетки (фиг. 2), объемное содержание больших пор  $\zeta_1$ .

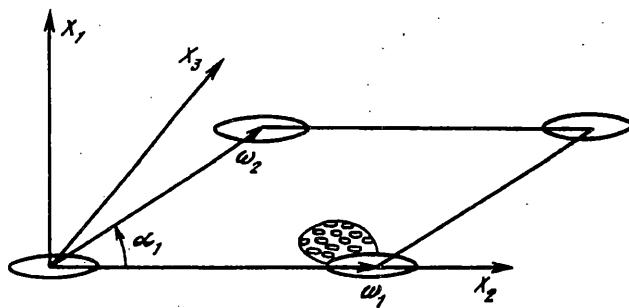
Отметим возможные с ростом частоты  $\omega$  предельные случаи распространения волн: а) низкочастотные волны (двууровневое длинноволновое приближение) характеризуются скоростью, зависящей от интегральных модулей упругости  $G_{12}$  и плотности  $\hat{\gamma}$ :

$$G_{12} \approx G(1 - \zeta)(1 - \zeta_1)(1 + \zeta)^{-1}(1 + \zeta_1)^{-1}, \quad \hat{\gamma} = \gamma(1 - \zeta)(1 - \zeta_1)$$

б) длинноволновые волны для первого масштабного уровня с учетом дифракционного рассеяния на включениях второго уровня, с) волновые явления с учетом градиентного состояния на первом уровне и дифракции на втором уровне, д) волны, зависящие от градиентных состояний на двух масштабных уровнях и дифракционных явлений на втором масштабном уровне, е) коротковолновые явления с учетом градиентных и дифракционных явлений на обоих уровнях. Последовательность предельных случаев



Фиг. 1



Фиг. 2

зависит от упаковки среды на двух уровнях, но для гексагональной структуры она определяется соотношениями между  $\zeta$  и  $\zeta_1$ . Случаи а) и в) рассматривались ранее [3].

Для определенности рассмотрим случай с), который согласно вышеупомянутым расчетам для рассматриваемой среды наблюдается при  $\omega > 10^7 \text{ c}^{-1}$ . Решение уравнения рассеяния волн на включениях второго уровня

$$\nabla^2 u - \nu_0^{-2} \ddot{u} - (\mu_1 \nabla^4 u - J_2 \nu_1^{-2} \nabla^2 u) + \dots = 0$$

$$u = \sum_{k=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{kn} H_n^{(1)}(p_k r) e^{in\theta - i\omega t}$$

где  $r, \theta$  – цилиндрические координаты с центром на оси включения второго уровня,

$H_n^{(1)}(pr) = H_n(pr)$  – функции Ханкеля первого рода:

$$p^2 - \omega^2 \nu_0^{-2} + (\mu_1 p^4 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2} p^2) + \dots = 0$$

Для  $N = 2, 1 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2} > 0$  решение для отдельного включения на втором уровне будет

$$u = u_0 \exp[i(k_1 x + k_2 y - \omega t)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{1n} H_n(p_1 r) + A_{2n} K_n(p_2 r)] e^{in\theta - i\omega t} \quad (2.3)$$

Здесь  $K_n(p_2 r)$  – функция Макдональда,  $k^2 = p_1^2$ :

$$p_{1,2}^2 = (1 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2}) (4 J_2 G_{12}^1 / G_{12})^{-1} \{[1 + 8 J_2 G_{12}^1 / G_{12} \omega^2 \nu_0^{-2} (1 - \omega^2 J_2 \nu_1^{-2})^{-2}]^{1/2} \pm 1\} \quad (2.4)$$

Краевые условия задачи в первом приближении вытекают из (1.7), если опустить в них  $M_n^1, M_s^1$  и  $M_{ns}^1$ . Общее поле двухуровневой среды составляем в виде суммы полей

$u = u_0 + u^*$ : Падающее поле  $u_0$  на  $m, n$ -е включение ищем в виде [3]:

$$u_0 = \sum_{s=-\infty}^{\infty} V_{mn}^s J_s(p_1 r_{mn}) \exp(is\theta_{mn} - i\omega t) \quad (2.5)$$

где  $X_{mn} + iY_{mn} = \omega_1(m + bne^{i\alpha_1})$  – «макроскопические» координаты центра  $mn$ -го включения второго уровня,  $b > 0$ ;  $m, n = 0, \pm 1, \dots \pm \infty$ ,  $J_s(p_1 r_{mn})$  – бесселева функция первого рода;  $r_{mn}$ ,  $\theta_{mn}$  – локальные полярные координаты с началом в точке  $mn$ ,  $V_{mn}^s$  – постоянные. Границные условия, выраженные через функцию смещения для полости  $r = a_1$ , свободной от напряжений будут

$$\partial / \partial r(u - \mu_1 \nabla^2 u) - \mu_1 \bar{a}_1^2 (\partial / \partial r - a_1^{-1}) \partial^2 u / \partial r^2 = 0, \quad \partial^2 u / \partial r^2 = 0$$

Дифракционное поле около отдельного включения второго уровня представим разложением

$$u = \sum_{s=-\infty}^{\infty} V_{mn}^s [J_s(p_1 r_{mn}) - U_s H_s(p_1 r_{mn}) - W_s K_s(p_2 r_{mn})] \exp(is\theta_{mn} - i\omega t) \quad (2.6)$$

$$U_s = (v_s \beta_s - q_s \rho_s) (\lambda_s \beta_s - \alpha_s \rho_s)^{-1}, \quad W_s = (\lambda_s q_s - v_s \alpha_s) (\lambda_s \beta_s - \alpha_s \rho_s)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} q_s \\ \alpha_s \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} J'_s \\ H'_s \end{pmatrix} + (x_1^2 - s^2) \begin{pmatrix} J_s \\ H_s \end{pmatrix}, \quad \beta_s = x_2 K'_s - (x_2^2 + s^2) K_s$$

$$\begin{pmatrix} v_s \\ \lambda_s \end{pmatrix} = x_1 (1 + \mu_1 p_1^2) \begin{pmatrix} J'_s \\ H'_s \end{pmatrix} + s^2 \mu_1 a_1^{-2} \begin{pmatrix} x_1 J'_s - J_s \\ x_1 H'_s - H_s \end{pmatrix}$$

$$\rho_s = x_2 (1 - \mu_1 p_2^2) K'_s + s^2 \mu_1 a_1^{-2} (x_2 K'_s - K_s)$$

$$x_k = p_k a_1, \quad J_s = J_s(x_1), \quad H_s = H_s(x_1), \quad K_s = K_s(x_2)$$

Падающее на каждую полость поле равно сумме отраженных волн от всех включений второго уровня, исключая выделенную ячейку. Переразложение цилиндрических функций в различных системах координат производим с помощью теорем сложения [4] вида

$$H_v(pr_{jq}) \exp(iv\theta_{jq}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} H_{v-s}(pR_{mn}^{jq}) J_s(pr_{mn}) (-1)^{s+v} \exp[is\theta_{mn} + i(v-s)\theta_{jq}] \quad (2.7)$$

где  $r_{mn}$ ,  $\theta_{mn}$  – системы параллельных цилиндрических координат с центрами на  $mn$ -м и  $jq$ -м полостях,  $R_{mn}^{jq}$ ,  $\theta_{mn}^{jq}$  – координаты центра  $jq$ -го включения

$$R_{mn}^{jq} = \omega_1 [(j-m)^2 + 2b(j-m)(q-n) \cos \alpha_1 + b^2(q-n)^2]^{1/2}$$

В формуле (2.6) последняя функция экспоненциально убывает при удалении от поверхности включения, поэтому влияние градиентного состояния оказывается через граничные условия и носит характер краевого эффекта. Приближенно суммирование отраженных волн для малых  $\zeta_1$  проводим с учетом только первых двух функций (2.6), поэтому коэффициенты  $V_{mn}^s$  определяются системой конечно-разностных соотношений вида

$$V_{mn}^s + \sum_{j \neq m} \sum_{q \neq n} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} V_{jq}^{\tau} U_{\tau} H_{\tau-s}(p_1 R_{mn}^{jq}) (-1)^{s+\tau} \exp[i(\tau-s)\theta_{mn}^{jq}] = 0 \quad (2.8)$$

Для двоякоперiodической структуры решение (2.8) ищем в виде бегущих волн

$$V_{mn}^s = C_s \exp\{i\lambda\omega_1[m \cos \Phi + bn \cos(\alpha_1 - \Phi)]\} \quad (2.9)$$

где  $\Phi$  – угол между направлением распространения волн и положительным направлением оси  $x$ ,  $\lambda$  – неизвестный параметр. Используя макроскопические координаты

$$X_{jq} - X_{mn} = R_{mn}^{jq} \cos \theta_{mn}^{jq}, \quad Y_{jq} - Y_{mn} = R_{mn}^{jq} \sin \theta_{mn}^{jq}$$

путем преобразования (2.8) получаем бесконечные системы алгебраических уравнений вида

$$C_s + \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C_{\tau} U_{\tau} G_{s\tau} = 0 \quad (2.10)$$

$$G_{s\tau} = (-1)^{s+\tau} \sum_{j \neq m} \sum_{q \neq n} H_{\tau-s}(p_1 R_{mn}^{jq}) \exp[i\lambda R_{mn}^{jq} \cos(\Phi - \theta_{mn}^{jq}) - i(s-\tau)\theta_{mn}^{jq}]$$

Из условия совместности систем вытекают дисперсионные уравнения для определения  $\lambda$ :

$$\|\delta_{s\tau} + U_{\tau} G_{s\tau}\| = 0 \quad (2.11)$$

где  $\delta_{s\tau}$  – символ Кронекера. Пусть  $\lambda_j$   $j$ -е вещественные корни бесконечного определителя (2.11). Соответствующие им постоянные  $C_{sj}$  с помощью системы (2.10) определяются через  $C_{s0}$ :

$$C_{sj} = g_s \lambda_j C_{s0} \quad (2.12)$$

На основании формул (2.6), (2.9) и (2.12) поле в регулярной двухуровневой среде описывается функциями, зависящими от «макроскопических» координат, и функциями, определяющими поле в отдельной ячейке. Решение уравнения (2.11) проводится методом последовательных приближений при сохранении в каждом приближении все большего числа членов определителя. Для низких частот ( $\omega < 10^7 \text{ c}^{-1}$ ), когда можно пренебречь влиянием градиентного состояния на первом масштабном уровне среды, возможно построение длинноволновых асимптотических решений [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (Грант N1 A 000).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванин Г.А. Градиентная теория сдвига многоуровневых композитов // Изв. АН. МТТ. 1995. № 3. С. 5–15.
2. Лич Дж. У. Классическая механика. М.: ИЛ, 1961. 174 с.
3. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Київ: Наук. думка, 1985. 302 с.
4. Батсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949. 798 с.

Москва

Поступила в редакцию  
23.III.1995