МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. И.А. БРИГАДНОВ

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛАСТОСТАТИКИ ДЛЯ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается вариационная постановка краевых задач эластостатики для гиперупругих (потенциальных) материалов. В соответствии с известным подходом под решением понимается сохраняющее ориентацию отображение, сообщающее глобальный минимум полной энергии системы.

Обсуждается существование указанного решения для стандартных внешних воздействиий при самых общих предположениях о потенциале. Известное условие поливыпуклости каратеодориевого потенциала заменяется на более общее требование квазивыпуклости по тензору дисторсии (градиенту отображения), существенно ослабляется соответствующее условие коэрцитивности – требуется лишь сверхлинейный рост по модулю тензора дисторсии. Для сжимаемых материалов потенциал доопределяется непрерывным образом до бесконечности вне множества сохранения ориентации.

Приводятся примеры неулучшаемости условия коэрцитивности. А именно, для потенциалов, имеющих линейный рост по модулю тензора дисторсии (например, модель высокоэластичности Бартенева–Хазановича) показывается отсутствие устойчивых к конечным вариациям решений для некоторых внешних сил (существование предельной нагрузки), а также существование решения с разрывом типа проскальзывания.

Введение. Решение краевых задач эластостатики имеет большое значение как для теории, так и для практики. В настоящее время существует множество феноменологических моделей нелинейной упругости [1–3]. Адекватность и область применения каждой модели могут быть установлены только путем сопоставления экспериментальных данных и решений соответствующих краевых задач. Поэтому анализ математической корректности краевых задач эластостатики [3–6] и разработка эффективных численных методов их решения [7, 8] являются актуальными.

Пусть твердое тело в отсчетной недеформированной конфигурации занимает область $\Omega \subset R^3$ с границей Γ. В деформированной конфигурации каждая точка $x = \{x_i\} \in \Omega$ переходит в положение $u(x) = \{u^\alpha(x)\} \in R^3$. Здесь и далее используются материальные лагранжевые координаты, нижние латинские и верхние греческие индексы i, $\alpha = 1, 2, 3$ соответствуют отсчетной и актуальной конфигурациям соответственно. Рассматриваются обратимые и сохраняющие ориентацию отображения $u: \Omega \to R^3$ с градиентом (тензором дисторсии) $Q = \nabla u = \{\partial_i u^\alpha\} : \Omega \to R^{3\times 3}$ такие, что $\det(Q) > 0$ в Ω, где $\partial_i = \partial/\partial x_i$ (в декартовых координатах); $R^{3\times 3}$ – пространство вещественных матриц 3×3.

Конечная деформация упругих материалов характеризуется энергетической парой (Q, Σ), где $\Sigma = \{\Sigma_i^\alpha\}$ – первый тензор напряжений Пиола–Кирхгоффа [2]. Известно, что тензор истинных напряжений Коши $\sigma = \{\sigma^{\alpha\beta}\}$ имеет компоненты $\sigma^{\alpha\beta} = (\det(Q))^{-1}\Sigma_i^\alpha Q_i^\beta$ [1–3]. Упругий материал описывается тензор-функцией реакции (определяющим соотношением) $\Sigma = S(Q)$. Для несжимаемых материалов $\det(Q) = 1$ и для сжимаемых $|S(Q)| \to \infty$ если $\det(Q) \to +0$ (т. е. для сжатия объема в точку необходимо бесконечное усилие) [1–3].

Особенностью гиперупругих материалов является существование скалярной функции (потенциала) $W: \Omega \times R^{3\times 3} \to R$ такой, что $S_i^\alpha(x, Q) = \partial W(x, Q)/\partial Q_i^\alpha$ для всех $Q \in$

$\in R^{3\times 3}$ [1–3]. Для изотропных материалов потенциал является функцией главных инвариантов тензора Коши–Грина $G = \{Q_i^\alpha Q_j^\alpha\}$ – $W(x, Q) = \Pi(x, I_1, I_2, I_3)$ [1] или собственных чисел тензора кратностей удлинений $\Lambda = G^{1/2}$ – $W(x,Q) = \Phi(x,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ [2]. Оба описания абсолютно эквивалентны. В любом случае потенциал необходимо удовлетворяет принципу материальной индифферентности [1]. Если материал является однородным, тогда функции S, W = const(x). В п. 1 рассматривается вариационная постановка краевой задачи эластостатики для гиперупругого материала, формулируются и обсуждаются теоремы существования для сжимаемых и несжимаемых материалов при самых общих предположениях о потенциале (теоремы 1.1 и 1.2 соответственно). Рассматриваются каратеодориевые потенциалы, для которых известное условие поливыпуклости [3–5] заменяется на более общее требование квазивыпуклости по тензору дисторсии [9, 10], существенно ослабляется условие коэрцитивности – требуется лишь сверхлинейный рост потенциала по модулю тензора дисторсии. При учете сжимаемости потенциал непрерывным образом доопределяется до бесконечности вне множества сохранения ориентации.

В п. 2 приводятся примеры неулучшаемости условия коэрцитивности, опирающиеся на известные результаты вариационного исчисления для интегральных функционалов линейного роста [11–15]. В этом случае возможно либо отсутствие решения, устойчивого к конечным вариациям, в силу неограниченности снизу функционала энергии на множестве кинематически допустимых отображений (примеры 2.1, 2.2 – существование предельной нагрузки [6]), либо появление решений с разрывами типа проскальзывания по аналогии с задачами о непараметрической минимальной поверхности [12, 13] и идеальной упругопластичности [14, 15] (пример 2.3).

В приложении приводятся необходимые сведения из теории функции матричного аргумента.

1. Вариационная постановка краевой задачи эластостатики. Рассматривается следующая краевая задача. К телу прикладываются квазистатические воздействия: в Ω – массовая сила с плотностью f, на части границы Γ^2 – поверхностная сила с плотностью F, а также задается отображение u_γ части границы Γ^1, причем $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma$, $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \varnothing$, area$(\Gamma^1) > 0$.

В общем случае слабое решение краевой задачи эластостатики находится как решение вариационного уравнения: для любой $v \in V$ отображение $u \in V$ удовлетворяет принципу стационарности [1, 16]:

$$\int_\Omega S_i^\alpha(x,\nabla u)\partial_i(u^\alpha - v^\alpha)dx = \int_\Omega f^\alpha(u^\alpha - v^\alpha)dx + \int_{\Gamma^2} F^\alpha(u^\alpha - v^\alpha)d\gamma \tag{1.1}$$

где $V = \{u : \Omega \to R^3;\ u(x) = u_\gamma(x),\ x \in \Gamma^1\}$ – множество кинематически допустимых отображений. Для несжимаемых материалов вместо V рассматривается множество $V_1 = \{u \in V : \det(\nabla u(x)) = 1, x \in \Omega\}$.

Если ограничиться рассмотрением "мертвых" сил f, F = const(u, ∇u) [1, 3], тогда в соответствии с известным подходом [3–7] под слабым решением краевой задачи эластостатики для гиперупругого материала понимается отображение, сообщающее глобальный минимум полной энергии системы

$$u^* = \arg(\inf\{I(u) : u \in V\}) \tag{1.2}$$

$$I(u) = \int_\Omega W(x,\nabla u)dx - L(u), \quad L(u) = \int_\Omega f^\alpha u^\alpha dx + \int_{\Gamma^2} F^\alpha u^\alpha d\gamma$$

где $L(u)$ – работа внешних сил при отображении u (с точностью до константы $L(x)$).

Физическая корректность постановки краевой задачи эластостатики для гиперупругого материала в вариационной форме (1.2) обсуждается в работах [3, 4]. В рамках этого подхода решение задачи (1.1) является функцией, сообщающей стационарное значение полной энергии системы, т. е. слабой локальной экстремалью функционала

$I(u)$. Например, известное свойство неединственности равновесного состояния можно трактовать следующим образом. Глобальный минимум (если он существует) является энергетически самым "выгодным". Локальные экстремали с большей энергией могут быть устойчивы по отношению к малым вариациям, однако неустойчивы к конечным возмущениям.

Относительно потенциала W, области Ω и функций f, F, u_γ сделаем следующие предположения (все необходимые сведения приведены в приложении):

(H1) $W : \Omega \times R^{3\times 3} \to [0, \infty]$ – каратеодориевая функция;

(H2) $W(x, Q) \to +\infty$ при $\det(Q) \to +0$ и $W(x, Q) \equiv +\infty$ если и только если $\det(Q) \le 0$;

(H3) Существуют постоянные $p > 1$, $a_1 > 0$ и функция $a_0 \in L^1(\Omega)$ такие, что для любой $Q \in R^{3\times 3}$ выполняется условие коэрцитивности $W(x, Q) \ge a_1 |Q|^p + a_0(x)$, где $|Q| = (Q_i^\alpha Q_i^\alpha / 3)^{1/2}$;

(H4) $W(x, Q)$ квазивыпуклая по Q;

(H5) Ω связная ограниченная область в R^3 с липшицевой границей Γ;

(H6) $f \in L^r(\Omega, R^3)$ с $r > 3p/(4p-3)$ для $1 < p < 3$ и $r \ge 1$ для $p \ge 3$;

(H7) $F \in L^t(\Gamma^2, R^3)$ с $t \ge 2p/(3p-3)$ для $1 < p < 3$ и $t \ge 1$ для $p \ge 3$;

(H8) $u_\gamma \in L^p(\Gamma^1, R^3)$.

Определим множество кинематически допустимых отображений для сжимаемого и несжимаемого случаев соответственно

$$V = \{u \in W^{1,p}(\Omega, R^3) \ : \ u(x) = u_\gamma(x), \ \ x \in \Gamma^1\}$$

$$V_1 = \{u \in V \ : \ \det(\nabla u) = 1 \ \text{ почти всюду в } \Omega\}$$

Теорема 1.1. Если в предположениях (H1)–(H8) существует функция $u^1 \in V$ такая, что $I(u^1) < +\infty$, тогда задача (1.2) разрешима на V, причем минимизирующее отображение сохраняет ориентацию почти всюду в Ω.

Теорема 1.2. Если в предположениях (H1)–(H8) без (H2) существует функция $u^1 \in V_1$ такая, что $I(u^1) < +\infty$, тогда задача (1.2) разрешима на V_1.

Анализ математической корректности вариационной задачи (1.2) опирается на обобщенную теорему Вейерштрасса [17–20]: если функционал секвенциально слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен на рефлексивном банаховом пространстве, тогда он ограничен снизу и достигает своей нижней грани на любом непустом слабо замкнутом подмножестве этого пространства.

Гипотезы (H1), (H3) и (H4) обеспечивают секвенциально слабую полунепрерывность снизу и коэрцитивность главной части функционала $I(u)$ на банаховом пространстве $W^{1,p}(\Omega, R^3)$ [9, 17, 21–23]. Для $p > 1$ пространство $W^{1,p}(\Omega, R^3)$ является рефлексивным [17, 20].

Из предположений (H5)–(H7), теоремы вложения Соболева и теоремы о следах [3] следует, что функционал $u \mapsto L(u)$ является линейным и непрерывным, а значит и секвенциально слабо непрерывным на $W^{1,p}(\Omega, R^3)$ (по определению слабой сходимости [17–20]).

Из предположения (H8) и теоремы о следах [3] следует, что V является линейным аффинным многообразием (а значит непустым слабо замкнутым множеством [19]) в рефлексивном банаховом пространстве $W^{1,p}(\Omega, R^3)$ с $p > 1$.

Гипотезы (H1), (H2) гарантируют сохранение ориентации минимизирующего отображения почти всюду в Ω в силу очевидной леммы.

Лемма 1.3. Пусть для некоторой ограниченной области $\Omega \subset R^3$ функция $W : \Omega \times R^{3\times 3} \to [0, +\infty]$ удовлетворяет ограничениям (H1) и (H2).

Тогда для произвольной измеримой функции ξ: $\Omega \to R^{3\times 3}$ справедлива импликация

$$\int_\Omega W(x, \xi(x))dx < \infty \Rightarrow \det(\xi) > 0 \ \text{ почти всюду в } \Omega$$

Замечание 1.4. Самыми общими ограничениями, накладываемыми на потенциал, являются следующие: $W(x, Q) \geq 0$ – по физическому смыслу и $W(x, Q) \to +\infty$ при $|Q| \to \infty$ или $\det(Q) \to +0$ (для сжимаемых материалов), т. е. сингулярным отображениям соответствует бесконечно большая энергия [24]. Указанные требования учитываются в гипотезах (H1)–(H3), причем для сжимаемых материалов в (H2) потенциал непрерывным образом доопределяется по тензору дисторсии до бесконечности вне множества сохранения ориентации.

Замечание 1.5. Пусть вместо (H3) потенциал удовлетворяет более сильному условию коэрцитивности.

(H3′) Существуют постоянные $a_1 > 0, p > 1, r \geq 1$ и функция $a_0 \in L^1(\Omega)$ такие, что для любой $Q \in R^{3\times3}$ справедлива оценка $W(x, Q) \geq a_1(|Q|^p + |\det(Q)|^r) + a_0(x)$.

В этом случае минимизирующее отображение будет обладать дополнительным свойством $\det(\nabla u^*) \in L^r(\Omega)$.

Во многих моделях гиперупругости, изначально построенных для несжимаемых материалов, учет сжимаемости осуществляется в следующем виде [2, 25, 26]:

$$W(x, Q) = W_1(x, Q) + h(x, \det(Q))$$

Используя теоремы п.2 и п.4, легко убедиться, что для выполнения условий (H1)–(H4) достаточно, чтобы функция $W_1(x, Q) \geq 0$ была каратеодориевой, квазивыпуклой по Q и удовлетворяла условию коэрцитивности (H3), а функция $h(x, t) \geq 0$ была каратеодориевой, выпуклой по t, а также $h(x, t) \to +\infty$ при $t \to +0$ и $h(x, t) = +\infty$ если и только если $t \leq 0$. Для выполнения дополнительного свойства $\det(\nabla u^*) \in L^r(\Omega)$ достаточно, чтобы функция $h(x, t)$ удовлетворяла условию коэрцитивности $h(x, t) \geq b_1 t^r + b_0(x)$ для любого $t > 0$ с некоторыми постоянными $b_1 > 0$, $r \geq 1$ и функцией $b_0 \in L^1(\Omega)$.

Замечание 1.6. В работах [3–5] на потенциал накладываются более жесткие ограничения, а именно, функция $W(x, Q) \geq 0$ является каратеодориевой, поливыпуклой по Q и удовлетворяет соответствующему усиленному условию коэрцитивности $W(x, Q) \geq a_1(|Q|^p + |\mathrm{Cof}Q|^q + |\det(Q)|^r) + a_0$ для любой $Q \in R^{3\times3}$ с некоторыми постоянными $a_1 > 0$, $p \geq 2$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$, $a_0 \in R$. Здесь и далее $\mathrm{Cof}Q$ обозначает матрицу алгебраических дополнений матрицы Q [3].

Сформулированные теоремы обобщают результаты этих работ на случай $V, V_1 \subset W^{1,p}(\Omega, R^3)$ с $1 < p < 2$.

Рассмотрим, например, потенциал однородного изотропного сжимаемого материала [2–5]:

$$\Phi = 2\mu p^{-2}(\lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p - 3) + h(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \tag{1.3}$$

где μ – модуль сдвига, $\lambda_k > 0$ – собственные числа матрицы $(Q_i^\alpha Q_j^\alpha)^{1/2}$ (кратности главных удлинений); функция $h(t) \geq 0$ непрерывная и выпуклая. По теореме п.3 функция $W(Q) = \Phi(\lambda_k(Q))$ является квазивыпуклой. Если дополнительно функция $h(t)$ удовлетворяет условиям, перечисленным в замечании 1.5, тогда согласно теореме 1.2 вариационная проблема (1.2) для этого потенциала имеет решение на $V \subset W^{1,p}(\Omega, R^3)$ с $1 < p < 2$.

Пример 1.7. Рассмотрим сферически симметричное кинематическое деформирование единичного шара, описываемое в отсчетных сферических координатах следующими соотношениями

$$u(r, \theta, \varphi) = x(R(r), \theta, \varphi)$$

$$\nabla u = Q(R) = \begin{pmatrix} R' & 0 & 0 \\ 0 & R/r & 0 \\ 0 & 0 & R/r \end{pmatrix}, \quad r \in [0,1], \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi)$$

В этом случае задача (1.2) принимает вид

$$R^* = \arg(\inf\{I(R)\ :\ R \in V\}),\ \ I(R) = \int_0^1 W(Q(R))r^2 dr$$

$$V = \{R \in W^{1,p}(0,1)\ :\ R(0) = 0,\ \ R(1) = \lambda > 0\}$$

Известно, что в одномерном случае все виды выпуклости эквивалентны между собой [4, 10, 23]. Необходимым условием разрешимости краевой задачи эластостатики является выпуклость по рангу 1 потенциала W (эллиптичность по Лежандру–Адамару акустического тензора) [1, 3]. Поэтому в рассматриваемой одномерной задаче интегранд функционала $I(R)$ является выпуклым по R'. Более того, в случае сильной выпуклости по рангу 1 потенциала W (сильной эллиптичности по Лежандру–Адамару акустического тензора) интегранд функционала $I(R)$ является сильно выпуклым по R'. Дополнительное условие коэрцитивности (H3) с $p > 1$ обеспечивает существование единственного решения задачи о шаре на $W^{1,p}(0, 1)$ [18–20]. Согласно эквивалентному определению пространства $W^{1,p}(0, 1)$ [20] решение является абсолютно непрерывным на [0, 1].

Например, для потенциала (1.3) с гладкой функцией $h(t)$ необходимое и достаточное условие глобального минимума сводится к краевой задаче

$$2\mu p^{-1}(2r(R/r)^{p-1} - (r^2(R')^{p-1})') - R^2 h''(R'R^2/r^2)(R'R^2/r^2)' = 0$$

$$R(0) = 0, \quad R(1) = \lambda$$

решением которой при $p > 1$ является линейная функция $R(r) = \lambda r$ для любого $\lambda > 0$. В работе [5] отмечается, что в задаче о шаре при $1 \le p < 3$ возможен *эффект кавитации* – образование полости в центре шара для $\lambda \ge \lambda_* > 0$. Последнее, очевидно, противоречит полученному результату. Более того, в задаче о шаре образование полости невозможно даже при $p = 1$ в силу выпуклости функции $h(t)$. Легко убедиться, что если $h''(t) = 0$ для $t \in [t_1, t_2]$, тогда при $p = 1$ имеется континиум решений. В общем случае появление разрывных решений в краевых задачах эластостатики возможно только при нарушении условия эллиптичности акустического тензора [1] или, как будет показано далее, при $p = 1$.

Замечание 1.8. Дальнейшее ослабление ограничений на потенциал возможно только за счет гипотезы (H4), а именно, в случае решения проблемы Морри [9, 10] об эквивалентности свойств квазивыпуклости и выпуклости по рангу 1. Отметим, что в настоящее время не построено ни одного рационального контрпримера.

2. Неулучшаемость условия коэрцитивности ($p > 1$). *Пример 2.1.* Рассмотрим следующую задачу. Пусть в абсолютно твердом теле имеется сквозное круглое отверстие длины l и радиуса b ($l \gg b$), в которое коаксиально вставлен абсолютно твердый стержень меньшего радиуса a. Свободное пространство отверстия заполнено деформируемым материалом, жестко прикрепленным по всей длине к стержню и внутренней поверхности отверстия. Стержень выдвигается вдоль оси заданной силой P. Если наполнитель однороден и изотропен, тогда в силу осевой симметрии задачи в рамках модели антиплоского сдвига [2] его деформированная конфигурация описывается следующими соотношениями в отсчетных цилиндрических координатах

$$u(\rho, \varphi, z) = x(r(\rho), \varphi, z + w(\rho))$$

$$\nabla u = Q(r, w) = \begin{pmatrix} r' & 0 & w' \\ 0 & r/\rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Предположим, что наполнитель описывается потенциалом (1.3) с $p = 1$ (т. е. подчиняется сжимаемому варианту модели высокоэластичности Бартенева– Хазановича [2, 27]).

Вариационная задача (1.2) принимает вид

$$(r^*, w^*) = \arg(\inf\{I(r, w) : (r, w) \in V\})$$

$$I(r,w) = \int_a^b [((\rho r)'^2/\rho^2 + w'^2)^{1/2} + h(r'r/\rho)]\rho d\rho - qaw(a)$$

$$V = \{(r,w) \in (W^{1,1}(a,b))^2 \ : \ r(a) = a, \ r(b) = b, \ w(b) = 0\}$$

где $q = P/(4\pi\mu a l)$ – плотность приведенной касательной силы, действующей на единицу длины по поверхности контакта стержня и наполнителя.

Взяв $q > 1$ и последовательность допустимых отображений, например, вида $r_m(\rho) \equiv \equiv \rho$, $w_m(\rho) = m(b - \rho)^m/(b - a)^m$ ($m \in N$) легко убедиться, что функционал энергии неограничен снизу на V, т. е. $I(r_m, w_m) \to -\infty$ при $m \to +\infty$. Это означает, что отсутствует отображение, устойчивое к конечным вариациям.

Пример 2.2. Рассмотрим деформирование круглого стержня конечных размеров на жесткой разрывной машине. Очевидно, что осесимметричное деформирование стержня описываются следующими соотношениями в отсчетных цилиндрических координатах (для четверти осевого сечения)

$$u(a\rho, \varphi, lz) = x(ar(\rho, z), \varphi + \psi(\rho, z), lz + lw(\rho, z)),$$

$$\nabla u = Q(r,\psi,w) = \begin{pmatrix} \partial r/\partial\rho & r\partial\psi/\partial\rho & \eta\partial w/\partial\rho \\ 0 & r/\rho & 0 \\ \eta^{-1}\partial r/\partial z & \eta^{-1}r\partial\psi/\partial z & 1+\partial w/\partial z \end{pmatrix},$$

где $\rho \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in [0, 1]$, a и l – радиус сечения и полудлина стержня соответственно, $\eta = l/a$.

Стержень изготовлен из однородного изотропного сжимаемого материала, описываемого потенциалом $W(Q) = 3\mu p^{-1}(|Q|^p - 1) + h(\det(Q))$, где функция $h(t)$ удовлетворяет требованиям, перечисленным в замечании 1.5.

Задача (1.2) принимает следующий вид:

$$(r^*, \psi^*, w^*) = \arg(\inf\{I(r, \psi, w) : (r, \psi, w) \in V\})$$

$$I(r,\psi,w) = \frac{1}{\mu}\int_0^1\int_0^1 W(Q(r,\psi,w))\rho d\rho dz - D_\varphi\psi(0,1) - D_z w(0,1)$$

$$V = \{(r,\psi,w) \in (W^{1,p}((0,1)\times(0,1)))^3 \ : \ r(0,z) = 0, \ \psi(\rho,0) = 0$$

$$w(\rho,0) = 0, \ r(\rho,1) = \rho, \ \psi(p,1) = \psi(0,1), \ w(\rho,1) = w(0,1)\}$$

где $D_\varphi = M_z/(2\mu\pi a^2 l)$, $D_z = P_z/(2\mu\pi a^2)$, M_z и P_z – крутящий момент и продольная сила, приложенные к торцам стержня. Закрепление стержня в жесткой разрывной машине учтено в краевых условиях на торцах (в множестве V при $z = 1$).

Взяв $p = 1$, $|D_\varphi| > 3^{-1/2}\eta^{-1}$, $D_z = 0$ и последовательность допустимых отображений, например, вида $r_m \equiv \rho$, $\psi_m \equiv mz$, $w_m \equiv 0$ ($m \in N$) легко убедиться, что функционал энергии неограничен снизу на V, т. е. $I(r_m, \psi_m, w_m) \to -\infty$ при $m \to +\infty$. Это означает, что отсутствует отображение, устойчивое к конечным вариациям.

Пример 2.3. Пусть в примере 2.1 задан кинематический сдвиг стержня вдоль оси на величину w_0. Предположим, что наполнитель подчиняется модели высокоэластичности Бартенева–Хазановича [2, 27] (т. е. описывается потенциалом (1.3) с $p = 1$ при условии несжимаемости $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$).

С учетом осевой симметрии задачи в рамках модели антиплоского сдвига условие несжимаемости выполняется при отображении

$$u(\rho, \varphi, z) = x(\rho, \varphi, z + w(\rho))$$

$$\nabla u = Q(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариационная задача (1.2) принимает вид

$$w^* = \arg(\inf\{I(w) \ : \ w \in V_1\}), \quad I(w) = \int_a^b (4 + w'^2)^{1/2} \rho d\rho$$

$$V_1 = \{w \in W^{1,1}(a, b) : w(a) = w_0, w(b) = 0\}$$

В силу выпуклости задачи как по функционалу, так и по множеству допустимых функций, локальная экстремаль (если она существует) совпадает с минимизирующей функцией [19].

Из необходимого условия стационарности $I(w)$ находим локальную экстремаль

$$w^*(\rho) = 2C[\operatorname{arch}(b/C) - \operatorname{arch}(\rho/C)] \qquad (2.1)$$

где постоянная C определяется из условия $w^*(a) = w_0$. Последнее разрешимо только для $w_0 \le w_0^* = 2a\operatorname{arch}(b/a)$. При $w_0 > w_0^*$ экстремаль не удовлетворяет краевым условиям. В этом случае вариационная задача не имеет непрерывных решений, хотя функционал очевидно ограничен снизу.

Функционал $I(w)$ с точностью до констант соответствует задаче о непараметрической минимальной поверхности. Известно, что решение этой задачи принадлежит пространству $BV[a, b]$ функций ограниченной вариации, которое наряду с непрерывными содержит и функции, имеющие разрывы типа проскальзывания как внутри области, так и на границе. Понятие обобщенного решения и обоснование его математической и физической корректности для задачи о непараметрической минимальной поверхности дано во многих работах (см., например, [13]). Обобщенное решение этой задачи совпадает с решением расширенной вариационной задачи, известной как задача Де Джорджи [19]:

$$w^{**} = \arg(\inf\{I^*(w) : w \in W^{1,1}(a, b)\})$$

$$I^*(w) = I(w) + a|w(a) - w_0| + b|w(b)|$$

Такое решение построено в [28] и имеет следующий вид: при $w_0 \le w_0^*$ оно совпадает с классическим решением (2.1), а при $w_0 > w_0^*$:

$$w^{**}(\rho) = 2a[\operatorname{arch}(b/a) - \operatorname{arch}(\rho/a)]$$

т. е. материал проскальзывает по поверхности стержня ($w^{**}(a) = w_0^* < w_0$).

Отметим, что в рамках модели Бартенева–Хазановича в некоторых случаях возможно образование полостей в сплошном теле [29].

Приложение. Основные свойства многомерного интегрального функционала определяются алгебраическими свойствами интегранда как функции матричного аргумента. Напомним основные сведения для непрерывной функции W: $R^{3\times3} \to R$.

1) Функция W называется выпуклой [3–5], если для любых $A, B \in R^{3\times3}$ и $t \in (0,1)$ выполняется неравенство Йенсена $W(tB + (1-t)A) \le tW(B) + (1-t)W(A)$.

Если $W \in C^2(R^{3\times3})$, тогда свойство выпуклости эквивалентно известному условию эллиптичности по Коулману–Ноллу [1, 3]: $[\partial^2 W(A)/\partial A_i^\alpha \partial A_j^\beta] B_i^\alpha B_j^\beta \ge 0$ для любых A,

$B \in R^{3\times3}$. В нелинейной теории упругости $\partial^2 W(A)/\partial A_i^\alpha \partial A_j^\beta = C_{ij}^{\alpha\beta}(A)$ – акустический тензор [1, 3].

2) Функция W называется выпуклой по рангу 1 [3–5, 9, 10], если неравенство Йенсена выполняется для любых $t \in (0, 1)$ и $A, B \in R^{3\times3}$ с $\mathrm{rank}(A - B) = 1$.

Если $W \in C^2(R^{3\times3})$, тогда свойство выпуклости по рангу 1 эквивалентно известному условию эллиптичности по Лежандру–Адамару [3–5, 9, 10]: $[\partial^2 W(A)/\partial A_i^\alpha \partial A_j^\beta] a_i a_j b_\alpha b_\beta \geq 0$ для любых $A \in R^{3\times3}$, $a, b \in R^3$.

3) Функция W называется квазивыпуклой [3–5, 9], если для любой (хотя бы одной [5]) ограниченной области $\Omega \subset R^3$ и произвольных $A \in R^{3\times3}$, $z \in W_0^{1,\infty}(\Omega, R^3)$ выполняется неравенство

$$\int_\Omega [W(A + \nabla z(x)) - W(A)]dx \geq 0$$

4) Функция W называется поливыпуклой [3–5, 10], если существует выпуклая по совокупности аргументов функция $\Psi: R^{3\times3} \times R^{3\times3} \times R \to R$ такая, что для любой $A \in R^{3\times3}$ выполняется равенство

$$W(A) = \Psi(A, \mathrm{Cof}A, \det(A))$$

5) Функция $W : \Omega \times R^{3\times3} \to R$ называется каратеодориевой [17, 20], если $W(x, A)$ измерима (по Борелю) по x для любой $A \in R^{3\times3}$ и непрерывна по A для почти всех $x \in \Omega$.

Все приведенные определения распространяются на каратеодориевую функцию $W(x, A) \geq 0$, принимающую тождественно значение $+\infty$ на некотором множестве матричного аргумента [5] и непрерывную по множеству $\mathrm{dom}W = \{A \in R^{3\times3} : W(x, A) < +\infty, x \in \Omega\}$. В этом случае везде, где это необходимо, предполагается, что матричный аргумент принадлежит $\mathrm{dom}W$. На эту функцию с небольшими дополнениями можно распространить результат Морри, справедливый, как известно, для интеграндов, принимающих только конечные значения [4, 5, 9, 17, 21–23].

Теорема П.1. Пусть функция $W : D \times R^{3\times3} \to [0, +\infty]$ является каратеодориевой и квазивыпуклой по матричному аргументу на ограниченной области $D \subset R^3$.

Пусть для последовательности $u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u^0$ в $W^{1,\infty}(D, R^3)$ функции $x \mapsto W(x, \nabla u^m(x))$ ($m = 0, 1,\ldots$) являются суммируемыми и почти всюду принимают конечные значения на D.

Тогда справедливо неравенство

$$\liminf_{m\to\infty} \int_D W(x, \nabla u^m(x))dx \geq \int_D W(x, \nabla u^0(x))dx$$

Для функций специального вида имеется простой критерий квазивыпуклости [4, 23].

Теорема П.2. Пусть для функции $W : R^{3\times3} \to R$ существует выпуклая функция $h : R \to R$, постоянные матрицы $P, T \in R^{3\times3}$ и числа $C_0, C_1 \in R$ такие, что для любой $A \in R^{3\times3}$ выполняется равенство

$$W(A) = h(P_i^\alpha A_i^\alpha + T_i^\alpha \,\mathrm{Cof}\, A_i^\alpha + C_1 \det(A) + C_0)$$

Тогда функция W является квазивыпуклой.

В общем случае свойство квазивыпуклости трудно проверяется на практике, поскольку имеет нелокальный (интегральный) характер. Поэтому удобно пользоваться следующей диаграммой импликаций [10]:

выпуклость $\Rightarrow$ поливыпуклость $\Rightarrow$ квазивыпуклость $\Rightarrow$ выпуклость по рангу 1

Первая и вторая импликации являются строгими (построено много простых контрпримеров [4, 10]). Третья импликация является нестрогой. Например, для квадратичной функции с постоянными коэффициентами $W(A) = 0,5C_{ij}^{\alpha\beta} A_i^\alpha A_j^\beta$ (в механике – это классическая модель Гука [1, 3]) свойства квазивыпуклости и выпуклости по рангу 1 эквивалентны [10].

В случае, если для любой $A \in R^{3\times3}$ выполняется равенство $W(A) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, где $\lambda_k > 0$ – собственные числа матрицы $(A_i^\alpha A_j^\alpha)^{1/2}$, а Φ – симметричная функция λ_k, имеется простой критерий поливыпуклости [4].

Теорема П.3. Пусть функция $\Phi : R^3 \to R$ такая, что $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Phi_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \Phi_2(\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2) + \Phi_3(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$, где $\Phi_1, \Phi_2 : R^3 \to R$ – симметричные, непрерывные, выпуклые и неубывающие функции, $\Phi_3 : R \to R$ – непрерывная и выпуклая функция.

Тогда функция $W(A) = \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ является поливыпуклой.

И, наконец, на практике удобно пользоваться следующим результатом, доказательство которого элементарно и поэтому опускается.

Теорема П.4. Пусть имеется совокупность функций $W_r : R^{3\times3} \to R$ $(r = 1, 2,\ldots,m)$, обладающих различными видами выпуклости.

Тогда для любых чисел $C_r \geq 0$ линейная комбинация $W(A) = C_r W_r(A)$ обладает слабейшим из имеющихся в совокупности видов выпуклости (в смысле диаграммы импликаций).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00054).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

[2] *Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н.* Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988, 256 с.

[3] *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.

[4] *Ball J.M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.

[5] *Ball J.M., Murat F.* $W^{1,p}$-quasiconvexity and variational problems for multiple integrals // J. Funct. Anal. 1984. V. 58. P. 225–253.

[6] *Бригаднов И.А.* О существовании предельной нагрузки в некоторых задачах гиперупругости // Изв. АН. МТТ. 1993. № 5. С. 46–51.

[7] *Бригаднов И.А.* Численное решение краевой задачи гиперупругости в приращениях // Изв. АН. МТТ. 1994. № 6. С. 42–50.

[8] *Brigadnov I.A.* Numerical methods in non-linear elasticity. In: Second ECCOMAS conference «Numerical Methods in Engineering' 96». Paris, 1996. Proceedings. P. 158–163.

[9] *Morrey C.B.* Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals // Pacific J. Math. 1952. V. 2. P. 25–53.

[10] *Dacorogna B.* Remarques sur les notions de polyconvexite, quasi-convexite et convexite de rang 1 // J. Math. pures et appl. 1985. V. 64. P. 403–438.

[11] *Anzellotti G.* The Euler equation for functional with linear growth // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 290. N 2. P. 483–501.

[12] *Giaquinta M.* On the Dirichlet problem for surfaces of prescribed mean curvature // Manuscripta Math. 1974. V. 12. P. 73–86.

[13] *Джусти Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации. М.: Мир, 1989. 240 с.

[14] *Серегин Г.А.* О корректности вариационных проблем механики идеально-упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 71–75.

[15] *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.

[16] *Зубов Л.М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 406–410.

[17] *Morrey C.B.* Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin [a. o]: Springer, 1966. 506 p.

[18] *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов (в теории нелинейных уравнений). М.: Наука, 1972. 416 с.

[19] *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.

[20] *Куфнер А., Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.

[21] *Acerbi E., Fusko N.* Semicontinuity problems in the calculus of variations // Arch. Rational Mech. Anal. 1984. V. 86. N 2. P. 125–145.

[22] *Marcellini P.* Approximation of quasiconvex functions and lower semicontinuity of multiple integrals // Manuscripta Math., 1985. V. 51. N 1–3. P. 1–28.

[23] *Дакоронья Б.* Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу нелинейных функционалов // УМН. 1989. Т. 44. Вып. 4(268). С. 35–98.

[24] *Antman S.S.* Regular and singular problems for large elastic deformations of tubes, wedges and cylinders // Arch. Rational Mech. Anal. 1983. Vol. 83. P. 1–52.

[25] *Ogden R.W.* Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for compressible rubber-like solids // Proc. Roy. Soc. London. A. 1972. V. 328. P. 576–583.

[26] *Sharda S.C., Tschoegl N.W.* Astrain energy density function for compressible rubber-like materials // Trans. Soc. Rheology. 1976. V. 20. P. 361–372.

[27] *Бартенев В.Д., Зеленев Ю.В.* Физика и механика полимеров. М.: Высшее образование, 1983. 391 с.

[28] *Репин С.И.* Вариационно-разностный метод решния задач с функционалами линейного роста // Журнал вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 5. С. 693–708.

[29] *Еремеев В.А., Зубов Л.М., Карякин М.И., Чернега Н.Я.* Образование полостей в нелинейно-упругих телах с дислокациями и дисклинациями // Докл. АН. 1992. Т. 326. № 6. С. 968–971.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
15.VIII.1994