МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 629.19

© 1996 г. Ю.Н. ЧЕЛНОКОВ, В.А. ЮРКО

КВАТЕРНИОННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ И ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В НЬЮТОНОВСКОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача построения оптимальных управлений и траекторий движения космического аппарата в ньютоновском центральном гравитационном поле. Для решения задачи используются регулярные кватернионные уравнения задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо – Штифеля и принцип максимума Понтрягина. В качестве минимизируемого функционала используется характеристическая скорость космического аппарата, управление полагается ограниченным по модулю, правый конец рассматриваемой двухточечной краевой задачи полагается подвижным, перемещающимся по заданной траектории.

Рассматриваются два варианта задачи: нелинейный и линеаризованный в окрестности невозмущенного кеплеровского движения. Для первого варианта задачи получены необходимые условия оптимальности, кватернионные уравнения движения и сопряженная система для оптимального управления; показано, что в случае равенства нулю управления сопряженная система – линейная, с постоянными коэффициентами, интегрируемая в явном виде. Для второго варианта задачи, предполагающего малость управления по сравнению с силой гравитационного притяжения и использующего метод малого параметра, показано, что уравнения задачи оптимального управления движением КА интегрируются в первом приближении в квадратурах для любого типа невозмущенного кеплеровского движения, причем сопряженные уравнения интегрируются в явном виде.

1. Космический аппарат (КА) рассматривается как материальная точка B переменной массы $m = m(t)$. Предположим, что КА движется в центральном силовом поле тела A с массой M. Помимо силы притяжения на КА действует сила тяги реактивного двигателя. Рассмотрим систему координат $AX_1X_2X_3(X)$, оси которой параллельны одноименным осям инерциальной системы координат, а начало находится в центре масс тела A. Дифференциальные уравнения движения КА относительно центрального тела A в системе координат X имеют вид [1, 2]:

$$d^2\mathbf{r} / dt^2 + \mu\mathbf{r} / |\mathbf{r}|^3 = \mathbf{p}, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{1.1}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{T} / m, \quad |\mathbf{T}| = -c\,dm / dt \tag{1.2}$$

Здесь t – время, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ – радиус-вектор, определяющий положение точки B в системе координат X, $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)$ – вектор реактивной тяги, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ – вектор ускорения КА от тяги (управление), $|...|$ – модуль вектора, c – постоянная скорость истечения газов из сопла реактивного двигателя, $\mu = fM$, f – гравитационная постоянная.

Уравнение (1.1) в координатах имеет вид

$$d^2x_i / dt^2 + \mu x_i / |\mathbf{r}|^3 = p_i, \quad |\mathbf{r}| = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Будем предполагать, что величина вектора ускорения $\mathbf{p}$ ограничена $0 \leqslant |\mathbf{p}| \leqslant p_{\max}$, и что его проекции на оси системы координат X $p_i(t) \in KC[t_0, t_1]$ – кусочно-непрерывные функции.

Введем в рассмотрение характеристическую скорость Q, определяемую соотношением [1]: $Q = c \ln(m_0/m)$, где $m_0 = m(t_0)$. Отсюда и из (1.2) вытекает, что $Q^{\cdot} = |\mathbf{p}|$. Здесь и в дальнейшем точка обозначает дифференцирование по t.

Обозначим $\mathbf{V} = \mathbf{r}^{\cdot}$. Тогда в силу (1.1) имеем $\mathbf{V}^{\cdot} = -\mu\mathbf{r} / |\mathbf{r}|^3 + \mathbf{p}$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления движением космического аппарата. Пусть $\mathbf{r}^*(t)$, $\mathbf{V}^*(t)$ – известные функции времени. Требуется построить управление $\mathbf{p}$, переводящее КА из начального состояния t_0, $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}^\circ$, $\mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}^\circ$ в конечное состояние t_1, $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}^*(t_1)$, $\mathbf{V}(t_1) = \mathbf{V}^*(t_1)$ и минимизирующее функционал $J = Q(t_1)$. Математическая запись задачи имеет вид

$$\mathbf{r}^{\cdot} = \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}^{\cdot} = -\mu\mathbf{r} / |\mathbf{r}|^3 + \mathbf{p} \tag{1.3}$$

$$Q^{\cdot} = |\mathbf{p}| \tag{1.4}$$

$$t \in [t_0, t_1], \quad 0 \leqslant |\mathbf{p}| \leqslant p_{\max} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}^\circ, \quad \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}^\circ, \quad Q(t_0) = 0 \tag{1.6}$$

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}^*(t_1) \tag{1.7}$$

$$\mathbf{V}(t_1) = \mathbf{V}^*(t_1) \tag{1.8}$$

$$Q(t_1) \to \min \tag{1.9}$$

Задача (1.3)–(1.9) является задачей о "мягкой" встрече в ньютоновском поле тяготения управляемого КА с другим объектом, движущимся по траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}^*(t)$ со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{V}^*(t)$. В частности, в качестве такого объекта можно рассматривать неуправляемый КА, движущийся по кеплеровской орбите. В этом случае уравнения движения неуправляемого КА имеют вид

$$\mathbf{r}^{*\cdot} = \mathbf{V}^*, \quad \mathbf{V}^{*\cdot} = -\mu^*\mathbf{r}^* / |\mathbf{r}^*|^3, \quad t \geqslant t_0^*$$

$$\mathbf{r}^*(t_0^*) = \mathbf{r}_0^*, \quad \mathbf{V}^*(t_0^*) = \mathbf{V}_0^*$$

Наряду с задачей о мягкой встрече в дальнейшем будем рассматривать и другую задачу – задачу о "жесткой" встрече, в которой отсутствует условие (1.8). Таким образом, задача о жесткой встрече определяется соотношениями (1.3)–(1.7), (1.9).

В рассмотренных задачах дифференциальные уравнения движения имеют особенность в начале координат. В связи с этим при изучении движения тела B вблизи центрального тела A возникают значительные трудности. Для регуляризации дифференциальных уравнений пространственной задачи двух тел может быть использовано регуляризирующее преобразование Кустаанхеймо – Штифеля [2]. В [3–5] предложен другой подход к регуляризации в смысле Кустаанхеймо – Штифеля, использующий аппарат кватернионов. Было показано, что использование кватернионов в теории орбитального движения является естественным и наглядным, позволяет получить более общие регулярные уравнения пространственной задачи двух тел и дать кинематическую интерпретацию регуляризирующему преобразованию. Поэтому представляется полезным решение указанных задач оптимального управления движением КА на основе кватернионных регулярных уравнений орбитального движения КА.

2. Перейдем к кватернионным регулярным уравнениям движения КА и задаче оптимального управления для регулярных уравнений, которая соответствует задаче (1.3)–(1.9). Для этого введем в рассмотрение кеплеровскую энергию $h = |\mathbf{V}|^2/2 - \mu / |\mathbf{r}|$.

Перейдем к новой независимой переменной τ, связанной с временем t формулами

$dt = |\mathbf{r}|d\tau$, $t' = |\mathbf{r}|$, где верхний штрих обозначает дифференцирование по τ. Таким образом,

$$\tau = \tau_0 + \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}(t)|^{-1} dt, \quad t = t_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} |\mathbf{r}(\tau)| d\tau$$

Если $t \in [t_0, t_1]$, то $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$. Отметим, что для произвольной гладкой функции y имеем $y' = |\mathbf{r}|y^{\cdot}$.

Регулярные кватернионные уравнения движения КА совпадают с регулярными кватернионными уравнениями пространственной задачи двух тел и имеют вид [4, 5]:

$$\mathbf{u}'' - (h/2)\mathbf{u} = -\left(|\mathbf{u}|^2/2\right)\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}, \quad h' = -2\,\mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}}' \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}\right)$$

Здесь $\mathbf{u} = u_0 + u_1\mathbf{i}_1 + u_2\mathbf{i}_2 + u_3\mathbf{i}_3$ – новая кватернионная переменная, u_j $(j = \overline{0,3})$ – переменные Кустаанхеймо – Штифеля, $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i}_1 + p_2\mathbf{i}_2 + p_3\mathbf{i}_3$, $\|\mathbf{u}\| = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ – норма кватерниона, $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ – мнимые единицы Гамильтона. Знак $\circ$ обозначает кватернионное умножение, верхняя черта – сопряженный кватернион: $\overline{\mathbf{u}} = u_0 - u_1\mathbf{i}_1 - u_2\mathbf{i}_2 - u_3\mathbf{i}_3$; scal – скалярная часть кватерниона. Свойства кватернионов и действия над ними изложены в [6].

Компоненты кватерниона $\mathbf{u}$ связаны с радиус-вектором $\mathbf{r}$ следующим соотношением:

$$\mathbf{r} = \overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \qquad (2.1)$$

или, в скалярной записи

$$x_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad x_2 = 2u_1u_2 - 2u_3u_0, \quad x_3 = 2u_1u_3 + 2u_0u_2 \qquad (2.2)$$

и при этом выполняется соотношение

$$u_1'u_0 - u_0'u_1 + u_3'u_2 - u_2'u_3 = 0 \qquad (2.3)$$

Отметим, что из (2.1), (2.2) вытекает $|\mathbf{r}| = \|\mathbf{u}\|$. В (2.1) при переходе от $\mathbf{r}$ к $\mathbf{u}$ имеется неоднозначность. Способы устранения этой неоднозначности указаны в [7].

Введем обозначение

$$\mathbf{q} = -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} \qquad (2.4)$$

или в координатной записи

$$q_0 = p_1u_0 - p_2u_3 + p_3u_2, \quad q_1 = p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3$$

$$q_2 = -p_1u_2 + p_2u_1 + p_3u_0, \quad q_3 = -p_1u_3 - p_2u_0 + p_3u_1$$

Отметим, что в силу (2.1) и (2.3) $\mathbf{V} = 2\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^{\cdot}$ и, следовательно, будем иметь $(\mathbf{s} = \mathbf{u}')$:

$$\mathbf{V} = (2/\|\mathbf{u}\|)\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{s}$$

Задача оптимального управления (1.3)–(1.9) о мягкой встрече записывается теперь в следующем виде:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{s} \qquad (2.5)$$

$$\mathbf{s}' = (h/2)\mathbf{u} + \left(\|\mathbf{u}\|/2\right)\mathbf{q} \qquad (2.6)$$

$$h' = 2\,\mathrm{scal}(\bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{q}) \tag{2.7}$$

$$Q' = \|\mathbf{u}\|\,|\mathbf{p}| \tag{2.8}$$

$$t' = \|\mathbf{u}\| \tag{2.9}$$

$$\tau \in [\tau_0, \tau_1), \quad 0 \leqslant |\mathbf{p}| \leqslant p_{\max} \tag{2.10}$$

$$\mathbf{u}(\tau_0) = \mathbf{u}_+, \quad \mathbf{s}(\tau_0) = \mathbf{s}_+, \quad h(\tau_0) = h_+ \tag{2.11}$$

$$Q(\tau_0) = 0, \quad t(\tau_0) = t_0 \tag{2.12}$$

$$\left(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} - \mathbf{r}^*(t)\right)_{\tau=\tau_1} = 0 \tag{2.13}$$

$$\left((2/\|\mathbf{u}\|)(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{s}) - \mathbf{V}^*(t)\right)_{\tau=\tau_1} = 0 \tag{2.14}$$

$$Q(\tau_1) \to \min \tag{2.15}$$

Задача о жесткой встрече будет определяться теперь соотношениями (2.5)–(2.13), (2.15).

3. Получим необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления (2.5)–(2.15) и (2.5)–(2.13), (2.15). Для этого воспользуемся принципом максимума Понтрягина [8]. Введем сопряженные переменные: кватернионные переменные $\boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \beta_1\mathbf{i}_1 + \beta_2\mathbf{i}_2 + \beta_3\mathbf{i}_3$ и $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_0 + \gamma_1\mathbf{i}_1 + \gamma_2\mathbf{i}_2 + \gamma_3\mathbf{i}_3$, соответствующие кватернионным фазовым переменным $\mathbf{u}, \mathbf{s}$, а также скалярные переменные η, σ, χ, соответствующие кеплеровской энергии h, характеристической скорости Q и времени t.

Рассмотрим функцию Гамильтона – Понтрягина $H = H(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, h, Q, t, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \eta, \sigma, \chi)$:

$$H = \langle \boldsymbol{\beta}, \mathbf{s}\rangle + \left\langle \boldsymbol{\gamma}, \frac{h}{2}\mathbf{u} + (\|\mathbf{u}\|/2)\mathbf{q} \right\rangle + 2\eta\,\mathrm{scal}(\bar{\mathbf{s}} \circ \mathbf{q}) + \sigma\|\mathbf{u}\|\,|\mathbf{p}| + \|\mathbf{u}\|\chi =$$

$$= \sum_{j=0}^{3} \beta_j s_j + \sum_{j=0}^{3} \gamma_j\left((h/2)u_j + (\|\mathbf{u}\|/2)q_j\right) + 2\eta \sum_{j=0}^{3} s_j q_j + \sigma\|\mathbf{u}\|\,|\mathbf{p}| + \|\mathbf{u}\|\chi \tag{3.1}$$

Система уравнений для сопряженных переменных имеет вид

$$\beta_j' = -\frac{\partial H}{\partial u_j}, \quad \gamma_j' = -\frac{\partial H}{\partial s_j}, \quad \eta' = -\frac{\partial H}{\partial h}, \quad \sigma' = -\frac{\partial H}{\partial Q}, \quad \chi' = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Отсюда, используя (3.1), получаем

$$\boldsymbol{\beta}' = -(h/2)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa} \circ \mathbf{p} - 2\chi + \mathrm{scal}(\bar{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{q}) + 2\sigma|\mathbf{p}|\mathbf{u} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\gamma}' = -\boldsymbol{\beta} - 2\eta\mathbf{q} \tag{3.3}$$

$$\eta' = -(1/2)\,\mathrm{scal}(\bar{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{u}) \tag{3.4}$$

$$\sigma' = 0 \tag{3.5}$$

$$\chi' = 0 \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\varkappa} = 2\eta\mathbf{s} + (\|\mathbf{u}\|/2)\boldsymbol{\gamma} \tag{3.7}$$

Справедливо следующее утверждение, которое является следствием принципа максимума Понтрягина и дает необходимые условия оптимальности для задачи о жесткой встрече (2.5)–(2.13), (2.15).

Пусть $\mathbf{p}^*$ – оптимальное управление для задачи (2.5)–(2.13), (2.15), а $\mathbf{u}, \mathbf{s}, h$, Q, t, τ_1 – решение задачи оптимального управления (2.5)–(2.13), (2.15). Тогда существуют кусочно-гладкие функции β_j, γ_j $\left(j = \overline{0,3}\right)$, η, σ, χ и постоянный вектор $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i}_1 + \alpha_2\mathbf{i}_2 + \alpha_3\mathbf{i}_3$, удовлетворяющие уравнениям (3.2)–(3.6) и условиям трансверсальности

$$\left.\left(\beta_j + \operatorname{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\alpha}} \circ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_j}\right)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0, \quad \mathbf{r} = \overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \tag{3.8}$$

$$\gamma_j(\tau_1) = 0, \qquad \eta(\tau_1) = 0, \qquad \sigma(\tau_1) = -1 \tag{3.9}$$

$$\chi(\tau_1) = \left.\left(\operatorname{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathbf{r}^{*\cdot}(t)\right)\right)\right|_{\tau=\tau_1} \tag{3.10}$$

такие, что оптимальное управление $\mathbf{p}^*$ при каждом фиксированном τ доставляет максимум функции Гамильтона – Понтрягина:

$$\sup_p H(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, h, Q, t, \boldsymbol{\beta}, \gamma, \eta, \sigma, \chi) = H\left(\mathbf{p}^*, \mathbf{u}, \mathbf{s}, h, Q, t, \boldsymbol{\beta}, \gamma, \eta, \sigma, \chi\right), \quad 0 \leqslant |\mathbf{p}| \leqslant p_{\max} \tag{3.11}$$

и, кроме того, выполняется соотношение

$$H|_{\tau=\tau_1} = 0 \tag{3.12}$$

Условия (3.8) в координатной записи имеют вид

$$\left.\left(\beta_0 + 2(u_0\alpha_1 - u_3\alpha_2 + u_2\alpha_3)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0$$

$$\left.\left(\beta_1 + 2(u_1\alpha_1 + u_2\alpha_2 + u_3\alpha_3)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0$$

$$\left.\left(\beta_2 + 2(-u_2\alpha_1 + u_1\alpha_2 + u_0\alpha_3)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0$$

$$\left.\left(\beta_3 + 2(-u_3\alpha_1 - u_0\alpha_2 - u_1\alpha_3)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0$$

Сформулируем теперь необходимые условия оптимальности для задачи о мягкой встрече (2.5)–(2.15).

Пусть $\mathbf{p}^*$ – оптимальное управление для задачи (2.5)–(2.15), а $\mathbf{u}$, $\mathbf{s}$, h, Q, t, τ_1 – решение задачи (2.5)–(2.15). Тогда существуют кусочно-гладкие функции β_j, γ_j $\left(j = \overline{0,3}\right)$, η, σ, χ и постоянные векторы $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{i}_1 + \alpha_2\mathbf{i}_2 + \alpha_3\mathbf{i}_3$ и $\boldsymbol{\alpha}^\circ = \overset{\circ}{\alpha}_1\mathbf{i}_1 + \overset{\circ}{\alpha}_2\mathbf{i}_2 + \overset{\circ}{\alpha}_3\mathbf{i}_3$, удовлетворяющие уравнениям (3.2)–(3.6), условиям трансверсальности

$$\left(\beta_j + \operatorname{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\alpha}} \circ \frac{\partial}{\partial u_j}(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u})\right) + (2/\|\mathbf{u}\|)\operatorname{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\alpha}}^\circ \circ \frac{\partial}{\partial s_j}(\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{s})\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \left(4u_j/\|\mathbf{u}\|^2 \operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\alpha}}^\circ \circ \overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{s}\right)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0$$

$$\left.\left(\gamma_j + \|\mathbf{u}\|^{-1} \operatorname{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\alpha}}^\circ \circ \frac{\partial}{\partial u_j}(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u})\right)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0$$

$$\eta(\tau_1) = 0, \qquad \sigma(\tau_1) = -1$$

$$\chi(\tau_1) = \left.\left(\operatorname{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathbf{r}^{*\cdot}(t)\right) + \left(\operatorname{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\alpha}} \circ \mathbf{V}^{*\cdot}(t)\right)\right)\right)\right|_{\tau=\tau_1}$$

и соотношениям (3.1), (3.12).

Из (3.5) и условия трансверсальности $\sigma(\tau_1) = -1$ вытекает, что

$$\sigma(\tau) = -1 \tag{3.13}$$

С учетом (3.13) соотношение (3.11) можно преобразовать к виду

$$\sup_p\left(\langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{p}\rangle - \|\mathbf{u}\|\,|\mathbf{p}|\right) = \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{p}^*\rangle - \|\mathbf{u}\|\,|\mathbf{p}^*|, \quad 0 \leqslant |\mathbf{p}| \leqslant p_{\max} \tag{3.14}$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{vect}\left(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}\right)$$

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_1 \mathbf{i}_1 + \Omega_2 \mathbf{i}_2 + \Omega_3 \mathbf{i}_3, \quad \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{p}\rangle = \sum_{j=1}^{3} \Omega_j p_j \tag{3.15}$$

Здесь vect обозначает векторную часть кватерниона.

Введем в рассмотрение следующие величины

$$\Theta = |\Omega| - \|\mathbf{u}\|, \quad \mathbf{e} = \mathbf{\Omega} / |\mathbf{\Omega}|$$

$$p^\circ = \begin{cases} p_{\max}, & \text{если} \quad \Theta \geqslant 0 \\ 0, & \text{если} \quad \Theta < 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

Тогда в силу (3.14), оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{p}^* = p^\circ \mathbf{e} = a\mathbf{\Omega}, \quad a = p^\circ / |\mathbf{\Omega}| \tag{3.17}$$

Подставляя теперь оптимальное управление (3.17), (3.15) в (2.5)–(2.9) и (3.2)–(3.6), получим уравнения для фазовых и сопряженных переменных. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пусть $p^\circ = 0$, то есть $\mathbf{p}^* = 0$. Согласно (3.16) это имеет место в случае, когда $\Theta < 0$. В этом случае уравнения (2.5)–(2.9), (3.2)–(3.6) принимают вид

$$\mathbf{u}' = \mathbf{s}, \quad \mathbf{s}' = (h/2)\mathbf{u}, \quad h' = 0$$

$$Q' = 0, \quad t' = \|\mathbf{u}\|, \quad \boldsymbol{\beta}' = -(h/2)\boldsymbol{\gamma} - 2\chi\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\gamma}' = -\boldsymbol{\beta}$$

$$\eta' = -\tfrac{1}{2}\mathrm{scal}\left(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{u}\right), \quad \sigma' = 0, \quad \varkappa' = 0$$

Эти уравнения легко интегрируются в явном виде (в отличие от решения рассматриваемой задачи оптимального управления движением КА, использующего традиционные уравнения движения КА [1]).

Случай 2. Пусть $p^\circ = p_{\max}$, то есть

$$\mathbf{p}^* = p_{\max}\mathbf{\Omega}/|\mathbf{\Omega}| = a\mathbf{\Omega}, \quad a = p_{\max}/|\mathbf{\Omega}| \tag{3.18}$$

Подставим управление (3.18) в (2.5)–(2.9), (3.2)–(3.6). Для этого предварительно получим несколько вспомогательных соотношений. Используя (2.3), вычисляем $\mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{s}\right) = u_0 s_1 - u_1 s_0 + u_2 s_3 - u_3 s_2 = 0$ и, следовательно, в силу (3.7) имеем

$$\mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}\right) = \left(\|\mathbf{u}\|/2\right)\mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\gamma}\right) \tag{3.19}$$

Далее, если управление $\mathbf{p}$ имеет вид (3.17), то, учитывая (2.4) и (3.15), получаем

$$\mathbf{q} = -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} = a\left(-\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} \circ \overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa} + \mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}\right)\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}\right)$$

и, следовательно, будет иметь

$$\mathbf{q} = a\left(\|\mathbf{u}\|\boldsymbol{\varkappa} + \mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}\right)\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}\right) \tag{3.20}$$

Так как имеет место

$$\mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa} \circ \mathbf{p} = a\mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa} \circ \mathbf{\Omega} = a\left(\mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa} \circ \overline{\boldsymbol{\varkappa}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} + \mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}\right)\right)$$

то получаем следующее равенство:

$$\mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa} \circ \mathbf{p} = -a\left(\|\boldsymbol{\varkappa}\|\mathbf{u} - \operatorname{scal}(\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa})\mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}\right) \tag{3.21}$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{q} = a\|\mathbf{u}\|\left(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \boldsymbol{\varkappa} - \tfrac{1}{2}\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u})\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}\right) \tag{3.22}$$

$$\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{q}) = a\|\mathbf{u}\|\left(\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \boldsymbol{\varkappa}) - \tfrac{1}{2}\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u})\right)^2 \tag{3.23}$$

$$\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \boldsymbol{\varkappa}) = 2\eta\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{s}) + (\|\mathbf{u}\|/2)|\boldsymbol{\gamma}|^2 \tag{3.24}$$

$$\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{q} = a\|\mathbf{u}\|\left(\overline{\mathbf{s}} \circ \boldsymbol{\varkappa} - \tfrac{1}{2}\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u})\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}\right) \tag{3.25}$$

$$\operatorname{scal}(\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{q}) = a\|\mathbf{u}\|\left(\operatorname{scal}\left(\overline{\mathbf{s}} \circ \boldsymbol{\varkappa} - \tfrac{1}{2}\operatorname{scal}(\overline{\boldsymbol{\gamma}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u})\operatorname{scal}(\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u})\right)\right) \tag{3.26}$$

Подставляя соотношения (3.19)–(3.26) в уравнения (2.5)–(2.9), (3.2)–(3.6), получим уравнения движения и сопряженную систему для случая, когда управление имеет вид (3.18). Таким образом, получаем замкнутую систему уравнений, которая вместе с граничными условиями и условиями трансверсальности содержит всю необходимую информацию для решения задач (2.5)–(2.15) и (2.5)–(2.13), (2.15). Аналитическое решение полученной системы соотношений в общем случае вряд ли возможно. Поэтому при построении оптимальных управлений и траекторий движения КА в общем случае приходится рассчитывать лишь на нахождение численного решения.

Замечание. В качестве управления вместо $\mathbf{p}$ можно взять кватернион $\mathbf{q}$. В этом случае имеют место аналогичные результаты.

4. Рассмотрим случай, когда управление $\mathbf{p}$ "мало" по сравнению с силой гравитационного притяжения $-\mu\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$. Для определенности ограничимся исследованием задачи о жесткой встрече (2.5)–(2.13), (2.15). Для задачи о мягкой встрече (2.5)–(2.15) решение аналогично.

Так как управление $\mathbf{p}$ мало, то для исследования задачи оптимального управления (2.5)–(2.13), (2.15) можно применить метод малого параметра. Введем малый параметр $\varepsilon > 0$ и запишем управление в виде

$$\mathbf{p} = \varepsilon\hat{\mathbf{p}} \tag{4.1}$$

где $\hat{\mathbf{p}} = \hat{p}_1\mathbf{i}_1 + \hat{p}_2\mathbf{i}_2 + \hat{p}_3\mathbf{i}_3$, причем $0 \leqslant \|\hat{\mathbf{p}}\| \leqslant \hat{p}_{\max}$. В качестве управления в дальнейшем будем использовать вектор $\hat{\mathbf{p}}$.

Величины $\mathbf{u}$, $\mathbf{s}$, h, Q, t будут теперь зависеть от параметра ε. Разложим эти величины по степеням ε с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{gathered}\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ + \varepsilon\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}^\circ + \varepsilon\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{O}(\varepsilon^2)\\ h = h^\circ + \varepsilon\hat{h} + O(\varepsilon^2), \quad Q = Q^\circ + \varepsilon\hat{Q} + O(\varepsilon^2), \quad t = t^\circ + \varepsilon\hat{t} + O(\varepsilon^2)\end{gathered} \tag{4.2}$$

Считая, что величинами $O(\varepsilon^2)$ можно пренебречь, получим соотношения для определения величин u°, s°, h°, Q°, t°, $\hat{u}$, $\hat{s}$, $\hat{h}$, $\hat{Q}$, $\hat{t}$.

Используя (2.4), (4.1), (4.2), вычисляем

$$\mathbf{q} = -\varepsilon\hat{\mathbf{q}} + O(\varepsilon^2) \tag{4.3}$$

где $\hat{\mathbf{q}} = -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ \circ \hat{\mathbf{p}}$. Аналогичным образом приходим к следующим соотношениям:

$$\overline{\mathbf{s}} \circ \mathbf{q} = \varepsilon\overline{\mathbf{s}}^\circ \circ \hat{\mathbf{q}} + O(\varepsilon^2), \quad h\mathbf{u} = h^\circ\mathbf{u}^\circ + \varepsilon\left(\hat{h}\mathbf{u}^\circ + h^\circ\hat{\mathbf{u}}\right) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \tag{4.4}$$

$$\|\mathbf{u}\|\mathbf{q} = \varepsilon\|\mathbf{u}^\circ\|\hat{\mathbf{q}} + \mathbf{O}(\varepsilon^2), \quad \|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}^\circ\| + 2\varepsilon\,\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \tag{4.5}$$

$$\overline{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ + 2\varepsilon\,\mathrm{vect}(\overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{O}(\varepsilon^2) \tag{4.6}$$

Подставляя (4.2)–(4.6) в (2.5)–(2.9), получаем

$$\mathbf{u}^{\circ\prime} = \mathbf{s}^\circ, \quad \mathbf{s}^{\circ\prime} = (h^\circ/2)\mathbf{u}^\circ, \quad t^{\circ\prime} = \|\mathbf{u}^\circ\|, \quad h^\circ = \mathrm{const}, \quad Q^\circ = 0 \tag{4.7}$$

Начальные условия также представим по степеням ε с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$u_+ = \overset{\circ}{u}_+ + \varepsilon\hat{u}_+ + O(\varepsilon^2), \quad s_+ = \overset{\circ}{s}_+ + \varepsilon\hat{s}_+ + O(\varepsilon^2), \quad h_+ = \overset{\circ}{h}_+ + \varepsilon\hat{h}_+ + O(\varepsilon^2) \tag{4.8}$$

Тогда для нахождения невозмущенной траектории имеем уравнения (4.7) и начальные условия невозмущенного движения $\mathbf{u}^\circ(\tau_0) = \overset{\circ}{\mathbf{u}}_+$, $\mathbf{s}^\circ(\tau_0) = \overset{\circ}{\mathbf{s}}_+$, $t^\circ(\tau_0) = t_0$.

Для определения возмущений $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{h}, \hat{Q}, \hat{t}$ получаем следующую задачу оптимального управления:

$$\hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{s}}, \quad \hat{\mathbf{s}}' = (h^\circ/2)\hat{\mathbf{u}} + (\hat{h}/2)\mathbf{u}^\circ + (\|\mathbf{u}^\circ\|/2)\hat{\mathbf{q}} \tag{4.9}$$

$$\hat{h}' = 2\,\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{s}}^\circ \circ \hat{\mathbf{q}}), \quad \hat{t}' = 2\,\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \hat{\mathbf{u}}) \tag{4.10}$$

$$\tau \in [\tau_0, \tau_1], \quad 0 \leqslant |\hat{\mathbf{p}}| \leqslant \hat{p}_{\max} \tag{4.11}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\tau_0) = \hat{\mathbf{u}}_+, \quad \hat{\mathbf{s}}(\tau_0) = \hat{\mathbf{s}}_+, \quad \hat{h}(\tau_0) = \hat{h}_+, \quad \hat{t}(\tau_0) = 0 \tag{4.12}$$

$$\hat{\mathbf{q}} = -\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ \circ \hat{\mathbf{p}} \tag{4.13}$$

$$\left(2\,\mathrm{vect}(\overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{r}^{**}(t)\right|_{\tau=\tau_1} = 0 \tag{4.14}$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \|\mathbf{u}^\circ(\tau)\|\,|\hat{\mathbf{p}}(\tau)|\,d\tau \to \min \tag{4.15}$$

$$\mathbf{r}^{**}(t) = \mathbf{r}^*(t) - \overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ, \quad \hat{Q} = \int_{\tau_0}^{\tau} \|\mathbf{u}^\circ(\tau)\|\,|\hat{\mathbf{p}}(\tau)|\,d\tau$$

Отметим, что уравнения (4.9), (4.10) являются линейными относительно $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{h}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{t}$.

Получим необходимые условия оптимальности для задачи (4.9)–(4.15) с помощью принципа максимума Понтрягина. Для этого введем сопряженные переменные $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\mathbf{i}_1 + \hat{\beta}_2\mathbf{i}_2 + \hat{\beta}_3\mathbf{i}_3$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1\mathbf{i}_1 + \hat{\gamma}_2\mathbf{i}_2 + \hat{\gamma}_3\mathbf{i}_3$, соответствующие кватернионным фазовым переменным $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}$, а также скалярные переменные $\hat{\eta}, \hat{\chi}$, соответствующие фазовым переменным $\hat{h}, \hat{t}$. Рассмотрим функцию Гамильтона – Понтрягина $\hat{H} = \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{h}, \hat{t}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\eta}, \hat{\chi})$:

$$\hat{H} = \|\mathbf{u}^\circ\|\,|\hat{\mathbf{p}}| + \langle\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\mathbf{s}}\rangle + \left\langle \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \frac{h^\circ}{2}\hat{\mathbf{u}} + \frac{\hat{h}}{2}\mathbf{u}^\circ + (\|\mathbf{u}^\circ\|/2)\hat{\mathbf{q}} \right\rangle + 2\hat{\eta}\,\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{s}}^\circ \circ \hat{\mathbf{q}}) +$$

$$+ 2\hat{\chi}\,\mathrm{scal}(\overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \hat{\mathbf{u}}) = -\|\mathbf{u}^\circ\|\,|\hat{\mathbf{p}}| + \sum_{j=0}^{3} \hat{\beta}_j \hat{s}_j + \sum_{j=0}^{3} \hat{\gamma}_j\Big((h^\circ/2)\hat{u}_j + (\hat{h}/2)\overset{\circ}{u}_j +$$

$$+ (\|\mathbf{u}^\circ\|/2)\hat{q}_j\Big) + 2\hat{\eta}\sum_{j=0}^{3} \overset{\circ}{s}_j\hat{q}_j + 2\hat{\chi}\sum_{j=0}^{3} \overset{\circ}{u}_j\hat{u}_j\Big)$$

Система сопряженных уравнений имеет вид:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}' = -(h^\circ/2)\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}' = -\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad \hat{\eta}' = -(1/2)\mathrm{scal}\left(\overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right), \quad \hat{\chi}' = 0 \tag{4.16}$$

Отметим, что уравнения (4.16) являются линейными и не содержат явно управление $\hat{\mathbf{p}}$ и фазовые переменные $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{h}, \hat{t}$. Уравнения (4.16) интегрируются в явном виде.

Сформулируем необходимые условия оптимальности для задачи оптимального управления (4.9)–(4.15).

Пусть $\hat{\mathbf{p}}^*$ – оптимальное управление для задачи (4.9)–(4.15), а $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{h}, \hat{t}$ – решение задачи (4.9)–(4.15). Тогда существуют кусочно гладкие функции $\hat{\beta}_j$, $\hat{\gamma}_j$ $\left(j=\overline{0,3}\right)$, $\hat{\eta}$, $\hat{\chi}$ и постоянный вектор $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\alpha}_1\mathbf{i}_1 + \hat{\alpha}_2\mathbf{i}_2 + \hat{\alpha}_3\mathbf{i}_3$, удовлетворяющие уравнениям (4.16) и условиям трансверсальности

$$\left.\left(\hat{\beta}_j + \mathrm{scal}\left(\hat{\overline{\boldsymbol{\alpha}}} \circ \frac{\partial}{\partial \hat{u}_j}\left(\hat{\overline{\mathbf{u}}} \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\mathbf{u}}\right)\right)\right)\right|_{\tau=\tau_1} = 0$$

$$\hat{\gamma}(\tau_1) = 0, \quad \hat{\eta}(\tau_1) = 0$$

$$\hat{\chi}(\tau_1) = \left.\left(\mathrm{scal}\left(\hat{\overline{\alpha}} \circ \mathbf{r}^{**\cdot}(t)\right)\right)\right|_{\tau=\tau_1}$$

такие, что оптимальное управление $\hat{\mathbf{p}}^*$ при каждом фиксированном τ доставляет максимум функции Гамильтона – Понтрягина

$$\sup_{\hat{p}} \hat{H}\left(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{h}, \hat{t}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \hat{\eta}, \hat{\chi}\right) = \hat{H}\left(\hat{\mathbf{p}}^*, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{s}}, \hat{h}, \hat{t}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\gamma}, \hat{\eta}, \hat{\chi}\right), \quad 0 \leqslant |\hat{\mathbf{p}}| \leqslant \hat{p}_{\max} \tag{4.17}$$

и, кроме того $\left.\hat{H}\right|_{\tau=\tau_1} = 0.$

Преобразуем теперь соотношение (4.17) с учетом специфики задачи и найдем оптимальное управление. Для этого введем обозначения

$$\boldsymbol{\varkappa}^\circ = 2\hat{\eta}\mathbf{s}^\circ + \left(\|\mathbf{u}^\circ\|/2\right)\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \boldsymbol{\Omega}^\circ = \mathrm{vect}\left(\overline{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right)$$

Тогда соотношение максимума (4.17) принимает вид

$$\sup_{\hat{p}}\left(\langle \boldsymbol{\Omega}^\circ, \hat{\mathbf{p}}\rangle - \|\mathbf{u}^\circ\|\,|\hat{\mathbf{p}}|\right) = \langle \boldsymbol{\Omega}^\circ, \hat{\mathbf{p}}^*\rangle - \|\mathbf{u}^\circ\|\,\left|\hat{\mathbf{p}}^*\right|, \quad 0 \leqslant |\hat{\mathbf{p}}| \leqslant \hat{p}_{\max}$$

Введем обозначения

$$\Theta^\circ = |\boldsymbol{\Omega}^\circ| - \|\mathbf{u}^\circ\|, \quad \mathbf{e}^\circ = \boldsymbol{\Omega}^\circ / |\boldsymbol{\Omega}^\circ|$$

$$\hat{p}^\circ = \begin{cases} \hat{p}_{\max}, & \text{если} \quad \Theta^\circ \geqslant 0 \\ 0, & \text{если} \quad \Theta^\circ < 0 \end{cases}$$

Тогда оптимальное управление для задачи (4.9)–(4.15) имеет вид

$$\hat{\mathbf{p}}^* = \hat{p}^\circ \mathbf{e}^\circ = a^\circ \Omega^\circ, \quad a^\circ = \hat{p}^\circ / |\boldsymbol{\Omega}^\circ| \tag{4.18}$$

Подставим теперь оптимальное управление (4.18) в (4.9), (4.10) и получим уравнения движения. Рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Пусть $\hat{p}^\circ = 0$, то есть $\hat{\mathbf{p}}^* = 0$. Тогда $\hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{s}}$, $\hat{h}' = 0$, $\hat{\mathbf{s}}' = (h^\circ/2)\hat{\mathbf{u}} + \left(\hat{h}/2\right)\mathbf{u}^\circ$.

Эти уравнения легко интегрируются в явном виде.

Случай 2. Пусть $\hat{p}^\circ = \hat{p}_{\max}$, то есть

$$\hat{\mathbf{p}}^* = \hat{p}_{\max}\boldsymbol{\Omega}^\circ/|\Omega^\circ| = a^\circ\boldsymbol{\Omega}^\circ, \quad a^\circ = \hat{p}_{\max}/|\boldsymbol{\Omega}^\circ| \tag{4.19}$$

Подставляя управление (4.19) в уравнения (4.9), (4.10), получим

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{s}} \\ &\hat{\mathbf{s}}' = (h^\circ/2)\hat{\mathbf{u}} + \left(\hat{h}/2\right)\mathbf{u}^\circ - \left(\|\mathbf{u}^\circ\|/2\right)\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ \circ a^\circ \operatorname{vect}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right) \\ &\hat{h}' = -2\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{s}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ \circ a^\circ \operatorname{vect}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right)\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

В силу билинейного соотношения (2.3), имеем

$$\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{s}^\circ\right) = 0 \tag{4.21}$$

и, кроме того

$$\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right) = 2\hat{\eta}\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{s}^\circ\right) + \left(\|\mathbf{u}^\circ\|/2\right)\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right)$$

и, следовательно

$$\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right) = \left(\|\mathbf{u}^\circ\|/2\right)\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right) \tag{4.22}$$

Учитывая (4.22), получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^\circ &= \operatorname{vect}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right) = \left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right) - \operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ\right) = \\ &= \left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \boldsymbol{\varkappa}\right) - \left(\|\mathbf{u}^\circ\|/2\right)\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (4.20) принимают вид

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{s}} \\ &\hat{\mathbf{s}}' = (h^\circ/2)\hat{\mathbf{u}} + \left(\hat{h}/2\right)\mathbf{u}^\circ + a^\circ\left(\|\mathbf{u}^\circ\|^2/2\right)\left(2\hat{\eta}\mathbf{s}^\circ + \left(\|\mathbf{u}^\circ\|/2\right)\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \tfrac{1}{2}\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right)\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ\right) \\ &\hat{h}' = 2a^\circ\|\mathbf{u}^\circ\|\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{s}}^\circ \circ \boldsymbol{\varkappa}^\circ + \tfrac{1}{2}\mathbf{s}^\circ \circ \operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right)\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

В силу соотношения (4.21) имеем $\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{s}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ\right) = 0$ и, следовательно, система (4.23) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{u}}' = \hat{\mathbf{s}} \\ &\hat{\mathbf{s}}' = (h^\circ/2)\hat{\mathbf{u}} + \left(\hat{h}/2\right)\mathbf{u}^\circ + a^\circ\|\mathbf{u}^\circ\|^2\left(\hat{\eta}\mathbf{s}^\circ + \left(\|\mathbf{u}^\circ\|/4\right)\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \tfrac{1}{4}\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{u}}^\circ \circ \mathbf{i}_1 \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right)\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{u}^\circ\right) \\ &\hat{h}' = a^\circ\|\mathbf{u}^\circ\|\left(4\hat{\eta}\|\mathbf{s}^\circ\| + \|\mathbf{u}^\circ\|\operatorname{scal}\left(\bar{\mathbf{s}}^\circ \circ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\right)\right) \end{aligned}$$

Данная система интегрируется в квадратурах, и, следовательно, как сопряженные уравнения так и уравнения для фазовых переменных рассматриваемой задачи оптимального управления движением КА интегрируются в первом приближении в квадратурах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-01-17479).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Кузмак Г.Е.* Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976. 744 с.
2. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 303 с.
3. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
4. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
5. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // Космич. исследования. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
6. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
7. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // Космич. исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.

Саратов

Поступила в редакцию
23.VII.1995