

© 1996 г. И.А. КОПЫЛОВ, И.В. НОВОЖИЛОВ

МОДЕЛЬ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ВАГОНА

Железнодорожное колесо взаимодействует с головкой рельса в точке контакта K конического участка поверхности качения и в точке P контакта реборды (фиг. 1). Естественно, казалось бы, предположить, что в точке K нет относительного проскальзывания колеса по рельсу, а в точке P запрещено боковое смещение. Иными словами, в точке K задать неголономные, а в точке P – голономные связи.

Однако, известно [1, 2], что для железнодорожных экипажей с числом колес, большим двух, условия непроскальзывания в точках вида K приводят к переопределенной системе уравнений. Она имеет лишь тривиальное решение, которому отвечает невозмущенное по боку движение экипажа. При этом контакт с ребордой просто не может появиться.

От этой статической неопределимости можно уйти: допускаются малые проскальзывания в точках K и малые деформации в точках P , вводятся силы крипа в точках K и упругие – в P [1, 2]. Это резко повышает размерность задачи. Появляется сильное (до трех десятичных порядков) разнесение частот медленных движений (типа кинематического влияния) и быстрых – за счет большой жесткости сил крипа и сил упругости. Порядок системы уравнений, описывающей движение единичного вагона, достигает нескольких десятков [2].

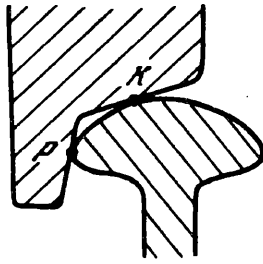
Задача может быть упрощена, если целью исследования являются медленные движения (типа кинематических влияний). В [3] при помощи предельного перехода тихоновского типа построена приближенная математическая модель таких движений двухосного вагона, описывающая эти медленные составляющие. В [4] таким же способом строятся модели движения вагонов с большим числом осей. В [5] модель единичного вагона из [3] используется для изучения поперечных колебаний железнодорожного состава.

Предельные модели из [3–5] построены в существенном ограничении: точки контакта K не выходят за пределы конических участков поверхностей качения и контакты с ребордами не рассматриваются. В данной работе выходы колес на реборды допускаются. Построенная ниже предельная модель движения вагона представляет собой систему переменной структуры, которая описывается уравнениями разного порядка в зависимости от смены точек контакта по ходу движения.

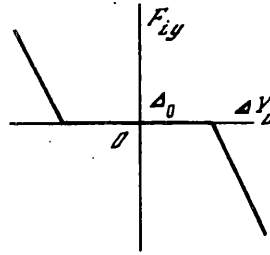
1. Рассмотрим абсолютно жесткий двухосный вагон, который движется по горизонтальному, слабо отличающемуся от прямолинейного, рельсовому пути (фиг. 2). На фиг. 2 через $O_A x_A y_A$ обозначена прямолинейная система координат, лежащая в горизонтальной плоскости, ось x_A задает невозмущенное положение средней линии колес. Штрихпунктирной линией на фиг. 2 обозначено возмущенное положение средней линии колес. Зададим ее боковое смещение относительно оси Ox_A функцией $H = H(x_A)$, где x_A – продольная координата текущей точки средней линии. Будем считать величину x_A заданной функцией времени: $x_A = x_{A0} + VT$, где x_{A0} – начальное значение координаты, T – время, $V = \text{const}$ – продольная скорость вагона. Допущение о постоянном значении продольной скорости оправдано, когда продольное движение развивается в существенно более протяженном масштабе времени, нежели поперечное движение [3].

В качестве обобщенных координат примем Y_0 – боковое смещение центра симметрии O вагона относительно средней линии колес и Ψ – угол поворота продольной оси симметрии (см. фиг. 2). Задача рассматривается в линейном приближении по Y_0, Ψ .

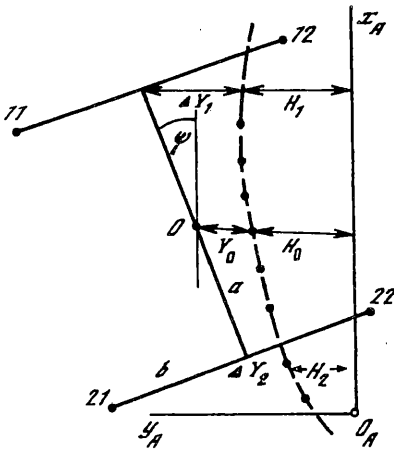
Уравнения движения вагона запишем в форме уравнения движения центра масс и



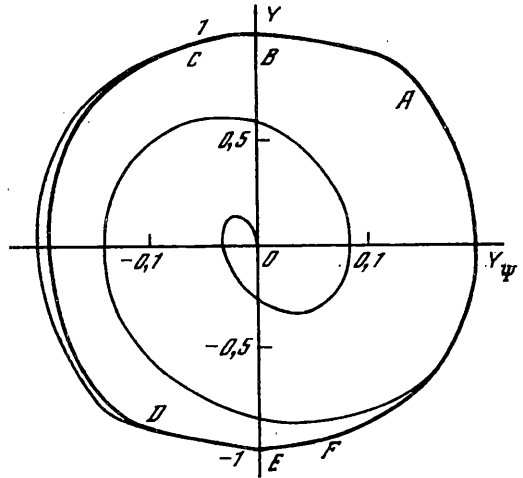
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

уравнения кинетического момента относительно вертикальной оси Oz . Предположив, что центр масс совпадает с точкой O , получим

$$MV_{0y}' = F_y^{11} + F_y^{12} + F_y^{21} + F_y^{22} + F_{1y} + F_{2y} + F_y - MH_0''$$

$$I\Omega_z' = b(F_x^{12} + F_x^{22}) - b(F_x^{11} + F_x^{21}) + a(F_y^{11} + F_y^{12}) - a(F_x^{11} + F_x^{12}) + F_{1y}a - F_{2y}a + M_z \quad (1.1)$$

$$Y_0' = V_{0y}, \quad \Psi' = \Omega_z$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени T , M и I – масса и момент инерции вагона; $2b$ – ширина колеи, $2a$ – расстояние между осями вагона, F_x^{ij} и F_y^{ij} – проекции сил крипа, индекс $i = 1, 2$ отмечает соответственно переднюю и заднюю оси, $j = 1, 2$ – левую и правую по ходу движения стороны, F_{1y} и F_{2y} – силы взаимодействия с рельсами реборд передней и задней колесных пар, F_y и M_z – главный вектор и главный момент прочих сил. Предполагая, что движение происходит на линейных участках сил крипа, имеем

$$F_x^{ij} = -ku_x^{ij}, \quad F_y^{ij} = -ku_y^{ij} \quad (1.2)$$

где k – коэффициент крипа, а u_x^{ij} , u_y^{ij} – относительные проскальзывания. Запишем аналогично [1–3] их выражения, учитывающие дополнительно возмущения пути

$$u_x^{11} = [b\Omega_z - \frac{V\gamma}{r}(Y_0 + a\Psi - \Delta H_1)]/V, \quad u_x^{12} = -u_x^{11}$$

$$u_y^{11} = (V_{0y} - \Delta H_1 + a\Omega_z - V\Psi) / V, \quad u_y^{12} = u_y^{11} \quad (1.3)$$

$$u_x^{21} = [-b\Omega_z - \frac{V\gamma}{r}(Y_0 - a\Psi - \Delta H_1)] / V, \quad u_x^{22} = -u_x^{21}$$

$$u_y^{21} = (V_{0y} - \Delta H_2 - a\Omega_z - V\Psi) / V, \quad u_y^{22} = u_y^{21}$$

Здесь r – средний радиус колеса, γ – его коничность, $\Delta H_1 = H_1 - H_0$ и $\Delta H_2 = H_2 - H_0$ – отличия боковых смещений средней линии колеи для первой и второй колесных пар относительно смещения для точки O . Для сил F_{1y}, F_{2y} принята характеристика, изображенная на фиг. 3. На фиг. 3 через ΔY_i обозначено боковое смещение i -й колесной пары относительно средней линии пути в своем сечении, Δ_r – общая деформация реборды и рельса в точке касания, $2\Delta_0$ – полная величина свободного хода колесной пары от реборды до реборды, c – коэффициент жесткости. Величины деформаций даются выражениями

$$\Delta_1 = \Delta Y_1 - \Delta_0 \operatorname{sign} \Delta Y_1 = Y_0 + a\Psi - \Delta H_1 - \Delta_0 \operatorname{sign}(Y_0 + a\Psi - \Delta H_1) \quad (1.4)$$

$$\Delta_2 = \Delta Y_2 - \Delta_0 \operatorname{sign} \Delta Y_2 = Y_0 - a\Psi - \Delta H_2 - \Delta_0 \operatorname{sign}(Y_0 - a\Psi - \Delta H_2)$$

Исключим в уравнениях (1.1)–(1.3) величины $F_x^{ij}, F_y^{ij}, u_x^{ij}, u_y^{ij}$. Получим

$$MV_{0y} = \frac{-4k}{V}(V_{0y} - \Delta H - V\Psi) + F_{1y} + F_{2y} + F_y - MH_0''$$

$$I\Omega_z = \frac{-4k}{V} \left[(b^2 + a^2)\Omega_z - a^2\Delta\Phi + \frac{V\gamma b}{r}(Y_0 - \Delta H) \right] + F_{1y}a - F_{2y}a + M_z \quad (1.5)$$

$$Y_0 = V_{0y}, \quad \Psi = \Omega_z$$

где $\Delta H = (\Delta H_1 + \Delta H_2)/2$ – полусумма смещений средней линии колеи в сечениях первой и второй колесной пары, $\Delta\Phi = (\Delta H_1 - \Delta H_2)/(2a)$ – поворот отрезка, соединяющего точки средней линии в этих сечениях. Сделаем в (1.5) замену переменных

$$Y = Y_0 - \Delta H, \quad V_y = V_{0y} - \Delta H, \quad Y_\Psi = a(\Psi - \Delta\Phi), \quad V_\Psi = a(\Omega_z - \Delta\Phi)$$

Пренебрежем в множителе $(b^2 + a^2)$ из (1.5) слагаемым b^2 , что при $b \approx 1$ м, $a \approx 10$ м дает погрешность порядка 1%. Тогда система (1.5) перейдет в

$$MV_y = \frac{-4k}{V} \left[V_y - \frac{V}{a}(Y_\Psi + a\Delta\Phi) \right] + F_{1y} + F_{2y} + F_y - M(H_0 + \Delta H)''$$

$$M(\rho_0 / a)^2 V_\Psi = \frac{-4k}{V} \left[V_\Psi + \frac{V\gamma b}{ra} Y \right] + F_{1y} - F_{2y} + M_z / a - M(\rho_0 / a)^2 a\Delta\Phi'' \quad (1.6)$$

$$Y = V_y, \quad Y_\Psi = V_\Psi$$

а выражения (1.4) примут вид

$$\Delta_1 = Y + Y_\Psi - \Delta_0 \operatorname{sign}(Y + Y_\Psi), \quad \Delta_2 = Y - Y_\Psi - \Delta_0 \operatorname{sign}(Y - Y_\Psi) \quad (1.7)$$

В (1.6) ρ_0 обозначает центральный радиус инерции вагона.

2. Построим предельную модель движения для случая, когда ни одно из колес не касается ребордой рельса. В (1.7) тогда

$$|Y + Y_\Psi| < \Delta_0, \quad |Y - Y_\Psi| < \Delta_0$$

а в (1.6) будет $F_{1y} = F_{2y} = 0$. Нормализуем по [6] уравнения (1.6), (1.7) для этого случая

движения. Перейдем в (1.6) от исходного набора фазовых переменных $\{Y, Y_\Psi, V_y, V_\Psi\}$ к набору $\{Y, Y_\Psi, U_y, U_\Psi\}$, содержащему "быстрые" переменные

$$U_y = V_y - \frac{V}{a}(Y_\Psi + a\Delta\Phi), \quad U_\Psi = V_\Psi + \frac{V\gamma b}{ra}Y \quad (2.1)$$

по которым в (1.6) реализуются жесткие силовые воздействия с "большим" коэффициентом k . Тогда

$$\begin{aligned} MU_y' &= \frac{-4k}{V}U_y + F_y - M(H_0 + \Delta H)'' - MV\Delta\Phi' - M\frac{V}{a}\left(U_\Psi - \frac{V\gamma b}{ra}Y\right) \\ M(\rho_0/a)^2 U_\Psi' &= \frac{-4k}{V}U_\Psi + M_z/a - M(\rho_0/a)^2 a\Delta\Phi'' + \\ &+ M(\rho_0/a)^2 \frac{V\gamma b}{ra} \left[\left(U_y + \frac{V}{a}(Y_\Psi + a\Delta\Phi) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$Y' = U_y + \frac{V}{a}(Y_\Psi + a\Delta\Phi), \quad Y_\Psi' = U_\Psi - \frac{V\gamma b}{ra}Y$$

Перейдем в (1.7), (2.2) к нормализованным безразмерным переменным

$$\begin{aligned} t &= T/T_*, \quad u_y = U_y/U_{y*}, \quad u_\Psi = U_\Psi/U_{\Psi*}, \quad y = Y/Y_*, \quad y_\Psi = Y_\Psi/Y_{\Psi*} \\ \Delta\varphi &= \Delta\Phi/\Delta\Phi_*, \quad h_0 = H_0/H_*, \quad \Delta h = \Delta H/\Delta H_*, \quad f_y = F_y/F_* \\ m_z &= M_z/M_*, \quad \delta_1 = \Delta_1/\Delta_*, \quad \delta_2 = \Delta_2/\Delta_* \end{aligned} \quad (2.3)$$

В (2.3) примем [2] следующие значения характерных величин:

$$\begin{aligned} Y_* &= Y_{\Psi*} = H_* = a\Delta\Phi_* = \Delta_* = \Delta_0, \quad (\rho_0/a)^2 = \lambda, \quad \lambda \sim 1 \\ aF_* &= M_*, \quad U_{y*} = U_{\Psi*} = Y_*/T_* \end{aligned}$$

Выделяя для исследования медленные составляющие движения типа кинематических влияний, зададим характерное время процесса T_* равным постоянной времени этих движений: $T_* = T_0$. Величина T_0 определяется в [1-3] соотношением $T_0^2 = (r/\gamma b)(a/V)^2$. Наконец, будем считать характерное значение возмущающей силы величиной порядка сил крипа: $F_* = 4kU_*/V$. Поделив каждое уравнение в (1.7), (2.1) после замены (2.3) на комбинацию характерных величин размерности этого уравнения, получим

$$\begin{aligned} \mu u_y' &= -u_y + f_y - \mu(h_0 + \Delta h)'' - \mu\tau_a^{-1}\Delta\varphi' - \mu(\tau_a^{-1}u_\Psi - y) \\ \mu\lambda u_\Psi' &= -u_\Psi + m_z - \mu\lambda\Delta\varphi'' + \mu\lambda[\tau_a u_y + (y_\Psi + \Delta\varphi)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} y' &= u_y + \tau_a^{-1}(y_\Psi + \Delta\varphi), \quad y_\Psi' = u_\Psi - \tau_a y \\ \delta_1 &= y + y_\Psi - \text{sign}(y + y_\Psi), \quad \delta_2 = y - y_\Psi - \text{sign}(y - y_\Psi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени t , $\mu = T_1/T_0$, $T_1 = MV/(4k)$, $\tau_a = (\gamma b/r)^{1/2} = T_a/T_0$, $T_a = a/V$. Оценка числовых значений параметров в (2.4) по (2.5) дает $\mu \sim 10^{-2} \ll 1$, $\tau_a \sim 0,2$.

Запишем для сингулярно возмущенной системы (2.4) вырожденную по А.Н. Тихонову систему, полагая в ней $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -u_y + f_y, \quad 0 = -u_\Psi + m_z \\ y' &= u_y + \tau_a^{-1}(y_\Psi + \Delta\varphi), \quad y_\Psi' = u_\Psi - \tau_a y \end{aligned} \quad (2.6)$$

Дополним (2.6) выражениями (2.5) для δ_1, δ_2 на вырожденном движении (2.6). Тогда

$$\delta_1 = y + y_\psi - \text{sign}(y + y_\psi), \quad \delta_2 = y - y_\psi - \text{sign}(y - y_\psi) \quad (2.7)$$

Система (2.6) содержит два дифференциальных уравнения первого порядка. Они не сводятся к конечным соотношениям, связывающим обобщенные координаты y, y_ψ . Эти дифференциальные уравнения можно трактовать как уравнения "неголономных" связей, типа связей, вводимых М.В. Келдышем в теории качения деформируемого колеса [1, 7]. Решение системы (2.6) определяет незатухающие колебания вагона – кинематические влияния. Из конечных квазистатических уравнений (2.6) находятся u_y, u_ψ – главный вектор и главный момент сил крипа, реализующих предельное движение (аналог реакций неголономных связей в статически неопределимой ситуации).

Погрешность приближения системой (2.6) решения исходной (2.4) оценивается при выполнении ряда условий [7] величиной порядка μ на конечном интервале времени $0 < t \leq t_* < \infty$. Ограничение временного интервала становится несущественным, если далее рассматривать "худшие" с точки зрения практики возмущения, например, резонансное для (2.6) возмущение единичной частоты. В этом случае система за конечное время выходит на реборду одного из колес, и модель (2.6) теряет смысл.

Проверим условия, гарантирующие указанную точность приближения [7]. Для этого необходимо построить так называемую присоединенную систему уравнений, описывающую движение системы (2.4) по быстрым составляющим движения. Присоединенная система получится из (2.4), если в ней перейти к быстрому времени $\tau = t/\mu$ и положить затем $\mu = 0$. Требуемыми условиями будут

1) существование изолированных положений равновесия по u_y, u_ψ присоединенной системы;

2) их асимптотическая устойчивость.

Проверка этих условий для (2.4) тривиальна и дает положительный ответ.

Построенную предельную динамическую систему (2.6), описывающую движение вагона без выхода на реборды, будем для краткости называть моделью M_0 . Момент перехода от модели M_0 к предельным моделям движения по ребордам определяется по выполнению любого из условий $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0$ для величин из (2.5).

3. Построим предельные модели движения с выходом на реборду одного колеса. Предположим для определенности, что на реборду вышло левое переднее колесо. Тогда в (1.7) будет

$$\Delta_1 = Y + Y_\psi - \Delta_0 \geq 0, \quad |Y - Y_\psi| < \Delta_0 \quad (3.1)$$

При помощи (1.8), (3.1) перейдем в (1.6) от исходного набора фазовых переменных к набору $\{\Delta_1, Y_\psi, U_y, U_\psi\}$, содержащему теперь три "быстрых" переменных, по которым осуществляются жесткие силовые воздействия. В новом наборе переменных в качестве медленной переменной вместо Y_ψ можно было оставить Y . Получим

$$MU_y' = \frac{-4k}{V} U_y + F_y - M(H_0 + \Delta H)'' - MV\Delta\Phi' -$$

$$-M \frac{V}{a} \left[U_\psi - \frac{V\gamma b}{ra} (\Delta_1 - Y_\psi + \Delta_0) \right] - c\Delta_1$$

$$M\lambda U_\psi' = \frac{-4k}{V} U_\psi + M_z / a - M\lambda a \Delta\Phi'' +$$

$$+M\lambda \frac{V\gamma b}{ra} \left[(U_y + \frac{V}{a}(Y_\Psi + a\Delta\Phi)) \right] - c\Delta_1 \quad (3.2)$$

$$\Delta_1 = U_y + U_\Psi + \frac{V}{a} - (Y_\Psi + a\Delta\Phi) - \frac{V\gamma b}{ra} (\Delta_1 - Y_\Psi + \Delta_0)$$

$$Y_\Psi = U_\Psi - \frac{V\gamma b}{ra} (\Delta_1 - Y_\Psi + \Delta_0)$$

Проведем нормализацию уравнений (3.1), (3.2). В отличие от (2.3), нормализация переменных Δ_1, Δ_2 проводится теперь по разному: $\delta_2 = \Delta_2/\Delta_{2*}$, где, как и в разд. 2, $\Delta_{2*} = Y_* = \Delta_0$, а $\delta_1 = \Delta_1/\Delta_{1*}$, где за счет высокой жесткости сил в контакте реборды с рельсом $\Delta_{1*}/Y = \varepsilon \ll 1$. Будем считать силы упругости и крипа величинами одного порядка: $c\Delta_* = 4kU_*/V$. Тогда уравнения (3.2), (3.1) переходят в

$$\begin{aligned} \mu u'_y &= -u_y + f_y - \mu(h_0 + \Delta h)'' - \mu\tau_a^{-1}\Delta\Phi' - \mu[\tau_a^{-1}u_\Psi - (\varepsilon\delta_1 - u_\Psi + 1)] - \delta_1 \\ \mu\lambda u'_\Psi &= -u_\Psi + m_z - \mu\lambda\Delta\Phi'' + \mu\lambda[\tau_a u_y - (u_\Psi + \Delta\Phi)] - \delta_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\varepsilon\delta_1 = u_y + u_\Psi + \tau_a^{-1}(u_\Psi + \Delta\Phi) - \tau_a(\varepsilon\delta_1 - u_\Psi + 1)$$

$$u'_\Psi = u_\Psi - \tau_a(\varepsilon\delta_1 - u_\Psi + 1)$$

$$\varepsilon\delta_1 = y + u_\Psi - 1, \quad |y - u_\Psi| < 1 \quad (3.4)$$

Оценки по числовым данным из [2] показывают, что малые параметры μ, ε являются величинами одного порядка: $\varepsilon/\mu = \sigma \sim 1$. Запишем вырожденную для (3.3), (3.4) систему, полагая $\mu = 0, \varepsilon = 0$.

$$0 = -u_y + f_y - \delta_1, \quad 0 = -u_\Psi + m_z - \delta_1 \quad (3.5)$$

$$0 = u_y + u_\Psi + \tau_a^{-1}(u_\Psi + \Delta\Phi) - \tau_a(-u_\Psi + 1)$$

$$u'_\Psi = u_\Psi - \tau_a(-u_\Psi + 1)$$

$$0 = y + u_\Psi - 1, \quad |y - u_\Psi| < 1 \quad (3.6)$$

Первое уравнение из (3.6) задает голономную связь, налагаемую в точке контакта реборды с рельсом. Из трех первых квазистатических уравнений в (3.5) находятся главный вектор u_y и главный момент u_Ψ сил крипа, которые можно трактовать как реакции неголономных связей, и величину δ_1 – реакцию голономной связи. Начальное значение медленной переменной u_Ψ в (3.5) совпадает с окончательным значением этой переменной в системе (2.5). Значения переменных δ_1, u_y, u_Ψ для начального момента времени в (3.5), вообще говоря, не совпадают с окончательными значениями этих переменных из (2.6). Разница образуется во временном погранслое [7] сингулярно возмущенной системы (3.3) и может трактоваться как скачок сил при наложении связей.

Динамическую систему (3.5) будем далее называть предельной моделью M_{11} – в соответствии с индексом колеса, реборда которого находится в контакте с рельсом.

Проверим условия [7] корректности этой предельной модели. Запишем присоединенную для (3.3) систему уравнений

$$\begin{aligned} du_y/d\tau + u_y + \delta_1 &= f_y \\ \lambda du_\Psi/d\tau + u_\Psi + \delta_1 &= m_z \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$c\delta_1/d\tau - u_y - u_\Psi = \tau_a^{-1}(u_\Psi + \Delta\Phi) - \tau_a(-u_\Psi + 1)$$

Правые части в (3.7), зависящие от медленных переменных u_ψ, t , считаются постоянными [7]. Положениями равновесия для (3.7) будут

$$u_y = f_y - \delta_1, \quad u_\psi = m_z - \delta_1 \quad (3.8)$$

$$\delta_1 = [f_y + m_z + \tau_a^{-1}(u_\psi + \Delta\varphi) - \tau_a(-u_\psi + 1)] / 2$$

Чтобы реборда удерживалась в контакте с рельсом, по крайней мере, в течение некоторого времени, величина δ_1 из (3.8) должна удовлетворять дополнительному условию $\delta_1(0) > 0$. Найдем по (2.7) величину $\delta_1'(t_*)$ для (2.7) в момент первого касания $\delta_1(t_*) = 0$ реборды с рельсом

$$\delta_1'(t_*) = f_y + m_z + \tau_a^{-1}(u_\psi + \Delta\varphi) - \tau_a(-u_\psi + 1) \quad (3.9)$$

Сравнение (3.8) с (3.9) показывает, что условие $\delta_1(0) > 0$ выполняется, если выход на реборду моделью M_0 совершается со скоростью $\delta_1'(t_*) > 0$.

Проверка выполнения условия асимптотической устойчивости положений равновесия (3.8) для (3.7) проводится без труда.

Таким образом, использование предельной модели M_{11} , как и ранее M_0 , дает погрешность порядка μ на конечном интервале времени существования этих моделей. Предельные модели, описывающие движение вагона при контакте реборды остальных единичных колес, получаются аналогично.

Модель M_{12} движения по реборде переднего правого колеса, описывается уравнениями вида (3.5), (3.6):

$$0 = -u_y + f_y - \delta_1, \quad 0 = -u_\psi + m_z - \delta_1 \quad (3.10)$$

$$0 = u_y + u_\psi + \tau_a^{-1}(u_\psi + \Delta\varphi) + \tau_a(u_\psi + 1)$$

$$u'_\psi = u_\psi + \tau_a(u_\psi + 1)$$

$$0 = y + u_\psi + 1, \quad |y - u_\psi| < 1$$

Модель M_{21} для заднего левого колеса

$$0 = -u_y + f_y - \delta_2, \quad 0 = -u_\psi + m_z + \delta_2 \quad (3.11)$$

$$0 = u_y - u_\psi + \tau_a^{-1}(u_\psi + \Delta\varphi) + \tau_a(u_\psi + 1)$$

$$u'_\psi = u_\psi - \tau_a(u_\psi + 1)$$

$$|y + u_\psi| < 1, \quad 0 = y - u_\psi - 1$$

Модель M_{21} для заднего правого колеса

$$0 = -u_y + f_y - \delta_2, \quad 0 = -u_\psi + m_z + \delta_2 \quad (3.12)$$

$$0 = u_y - u_\psi + \tau_a^{-1}(u_\psi + \Delta\varphi) + \tau_a(u_\psi - 1)$$

$$u'_\psi = u_\psi - \tau_a(u_\psi - 1)$$

$$|y + u_\psi| < 1, \quad 0 = y - u_\psi + 1$$

Оценим движение, описываемое моделями M_{11}, \dots, M_{22} . Начнем с модели M_{11} , описываемой уравнениями (3.5). Исключив в них переменные δ_1, u_y, u_ψ , получим

$$2\tau_a u'_\psi + (1 - \tau_a^2) u_\psi = -\Delta\varphi + \tau_a(f_y - m_z) - \tau_a^2 \quad (3.13)$$

Из (3.13) видно, что при $\tau_a = (\gamma b/r)^{1/2} \approx 0,2$ собственные составляющие движения по переменной u_ψ экспоненциально убывают с постоянной времени, близкой к $2\tau_a$. Это ведет к уменьшению углового рассогласования продольной оси вагона относительно средней линии колеи и, следовательно, к уменьшению зазора между рельсом и ребордой левого заднего колеса.

Покажем, что контакт реборды левого переднего колеса с рельсом не может происходить в течение длительного промежутка времени, значительно превышающего характерное время T_0 . При отсутствии возмущений стационарное решение $u_\psi^{(*)}$ уравнения (3.13) имеет вид $u_\psi^{(*)} = \tau_a^2 / (\tau_a^2 - 1) \equiv \text{const}$. При этом величина реакции голономной связи становится меньше 0:

$$\delta_1 = \tau_a / (\tau_a^2 - 1) < 0$$

Поэтому динамика поперечного движения вагона будет описываться моделью M_{11} лишь на конечном интервале времени, и далее осуществляется переход либо к модели M_0 , либо к модели M_{1-1} , описываемой ниже.

Такой же вывод о выравнивании оси вагона относительно средней линии получается для модели M_{12} правого переднего колеса.

Получим уравнение, однотипное с (3.13) для модели M_{21} . Из (3.11) имеем

$$2\tau_a u'_\psi - (1 - \tau_a^2) u_\psi = \Delta\varphi + \tau_a (f_y + m_z) - \tau_a^2 \quad (3.14)$$

Отсюда видно, что при выходе на реборду левого заднего колеса собственные составляющие движения увеличивают угловое рассогласование вагона со средней линией колеи. Это способствует выходу на реборду диагонального – правого переднего колеса. Такой же вывод получается и для модели M_{22} правого заднего колеса.

4. Построим предельные модели движения по ребордам двух колес. Пусть в контакте с рельсом находятся реборды обоих левых колес. В уравнениях (1.6) от набора исходных переменных перейдем по (1.7), (2.1) к набору $\{\Delta_1, \Delta_2, U_y, U_\psi, \}$, содержащему уже четыре быстрых переменных. При нормализации полученных уравнений будем считать характерные деформации в точках контакта реборд колес с рельсом малыми: $\Delta_1^* = \Delta_2^* = \Delta^*$, $\Delta^*/Y = \varepsilon \ll 1$. Характерные значения упругих сил считаем величинами порядка сил крипа $c\Delta^* = 4kU^*/V$. После указанной нормализации система уравнений становится сингулярно возмущенной по всем четырем переменным. Вырождение по μ, ε дает

$$0 = -u_y + f_y - \delta_1 - \delta_2, \quad 0 = u_y + \tau_a^{-1} \Delta\varphi \quad (4.1)$$

$$0 = -u_\psi + m_z - \delta_1 + \delta_2, \quad 0 = u_\psi - \tau_a$$

При вырождении в (1.7) получаются уравнения голономных связей

$$0 = u + u_\psi - 1, \quad 0 = y - u_\psi - 1 \quad (4.2)$$

полученных при этом предельном переходе. Назовем предельную модель, описываемую уравнениями (4.1), (4.2) моделью M_{1-1} по индексам сторон у колес обоих пар, вышедших на реборду.

Из (4.1) находятся реакции δ_1, δ_2 голономных связей и величины u_y, u_ψ , трактуемые, как ранее. Условия реализуемости модели M_{1-1} будут $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. Величины реакций изменяются только при изменении возмущений. Если все возмущения отсутствуют, то из (4.1) имеем $\delta_2 = -\tau_a/2 < 0$. Следовательно, при отсутствии возмущений, либо при достаточно малых их величинах модель M_{1-1} не может иметь места.

Проверка условий корректности модели M_{1-1} проводится так же, как в п. 2 и 3. Она дает положительный ответ, как и ранее.

Модель M_{2-2} движения по ребордам обоих правых колес задается соотношениями

$$\begin{aligned} 0 &= -u_y + f_y - \delta_1 - \delta_2, & 0 &= u_y + \tau_a^{-1} \Delta\varphi \\ 0 &= -u_\psi + m_z - \delta_1 + \delta_2, & 0 &= u_\psi + \tau_a \\ 0 &= y + u_\psi + 1, & 0 &= y - u_\psi + 1 \end{aligned}$$

Модель M_{1-2} движения по ребордам диагональных левого переднего и правого заднего колес имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= -u_y + f_y - \delta_1 - \delta_2, & 0 &= u_y + \tau_\alpha^{-1} (\Delta\varphi + 1) \\ 0 &= -u_\psi + m_z - \delta_1 + \delta_2, & 0 &= u_\psi \\ 0 &= y + u_\psi - 1, & 0 &= y - u_\psi + 1 \end{aligned}$$

Следующие соотношения определяют модель M_{2-1} для колес другой диагонали.

$$\begin{aligned} 0 &= -u_y + f_y - \delta_1 - \delta_2, & 0 &= u_y + \tau_\alpha^{-1} (\Delta\varphi - 1) \\ 0 &= -u_\psi + m_z - \delta_1 + \delta_2, & 0 &= u_\psi \\ 0 &= y + u_\psi + 1, & 0 &= y - u_\psi - 1 \end{aligned}$$

5. Приведем результаты численного исследования уравнений поперечных движений вагона. Возмущение линии железнодорожного пути выбрано в виде гармонической функции резонансной частоты $H_0(T) = H_0 \sin T/T_0$, $H_1(T) = H_0(T + a/V)$, $H_2(T) = H_0(T - a/V)$. Значения параметров выбраны следующими: $\mu = 0,01$, $\varepsilon = 0,01$, $\lambda = 1/3$, $H_0 = \Delta_0/20$, $a/V = 0,8$ с, $F_y = 0$, $M_z = 0$.

С помощью вырожденных моделей было обнаружено, что поперечные движения вагона выходят на предельный цикл на плоскости значений переменных y , u_ψ . На фиг. 4 изображены переходный процесс (тонкой линией) и предельный цикл. Период движения фазовой точки по циклу совпадает с периодом возмущения. В точке A на фиг. 4 происходит касание рельса ребордой переднего левого колеса (модель M_{11}), которое продолжается до точки B . В точке B происходит кратковременный переход к модели M_0 и затем касание рельса ребордой заднего левого колеса, и движение вагона описывается моделью M_{21} . От точки C до точки D ни одно из колес не касается ребордой рельсов. На данном участке траектории справедлива модель M_0 . Далее в точке D происходит касание рельса реборды переднего правого колеса (модель M_{12}). А на участке между точками E и F в контакте с рельсом находится одно заднее правое колесо (модель M_{22}).

Решение полной системы невырожденных уравнений также выходит на предельный цикл, близкий к описанному выше. Касание с рельсами реборд колес происходит в такой же последовательности. Расстояние между любыми двумя соответствующими точками на предельных циклах и разность времен нахождения каждого колеса в контакте с рельсом для вырожденной системы переменной структуры и полной системы по абсолютной величине не превосходят μ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 95-01-00219а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967. 519 с.
2. *Лазарян В.А., Длугач Л.А., Коротенко М.Л.* Устойчивость движения рельсовых экипажей. Киев: Наук. думка, 1972. 197 с.
3. *Новожилов И.В.* Разделение движений рельсового экипажа // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 55–59.
4. *Луговая Л.И.* Об уравнениях "кинематических влияний" железнодорожных вагонов различных конструкций // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 71–74.
5. *Копылов И.А., Новожилов И.В.* Поперечные колебания железнодорожного поезда // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 66–70.
6. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1991. 189 с.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.XII.1995