МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 531.31

© 1996 г. Д.В. БАЛАНДИН

МАКСИМАЛЬНОЕ СМЕЩЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СИСТЕМЕ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Рассматривается задача о максимальном смещении точечного тела, расположенного на горизонтальной платформе и имеющего с ней фрикционный контакт типа сухого трения, под действием кинематических возмущений, интеграл от абсолютной величины которых ограничен. Получено аналическое выражение для радиуса круга, определяющего максимально возможную область, в пределах которой остается тело под действием произвольного возмущения из указанного класса.

Рассмотрим механическую систему следующего вида. На горизонтальной платформе находится точечное тело (материальная точка) массы m, имеющее с ней фрикционный контакт типа сухого трения. Платформа совершает поступательное перемещение в горизонтальной плоскости с заданным ускорением относительно некоторой инерциальной системы координат. Уравнение движения тела представим в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{u}(\dot{\mathbf{r}}) + m\mathbf{v}(\mathrm{t}) \tag{1}$$

здесь $\mathbf{r}$ – двумерный радиус-вектор, определяющий положение тела на платформе; $\mathbf{v}\,(t)$ – внешнее возмущение, действующее на тело, равное с обратным знаком ускорению платформы; $\mathbf{u}(\dot{\mathbf{r}})$ – сила сухого трения, представляемая в виде

$$\mathbf{u}(\dot{\mathbf{r}}) = \begin{cases} u_0\dot{\mathbf{r}}/|\dot{\mathbf{r}}|, & \dot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0} \\ m\mathbf{v}(t), & \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0},\ |m\mathbf{v}(t)| \leqslant u_0 \\ u_0\mathbf{v}(t)/|\mathbf{v}(t)|, & \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0},\ |m\mathbf{v}(t)| > u_0 \end{cases} \tag{2}$$

положительный параметр u_0 определяет максимальную силу трения покоя.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ тело покоится в начале координат системы, связанной с платформой: $\mathbf{r}\,(0) = \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{0}$. Определим далее класс возможных возмущений $\mathbf{v}\,(t)$, действующих на тело. В этот класс, обозначаемый V, будем включать все возмущения, описываемые кусочно-непрерывными двумерными вектор-функциями, удовлетворяющими неравенству:

$$\int_0^\infty |\mathbf{v}(\mathrm{t})|\,dt \leqslant J_0 \tag{3}$$

где J_0 – заданное положительное число. Заметим, что если направление вектора $\mathbf{v}$ неизменно, то неравенство (3) с физической точки зрения означает ограничение скорости, приобретаемой платформой в результате действия возмущения, величиной J_0. В противном случае простая физическая интерпретация отсутствует.

Сформулируем следующую задачу: найти максимально возможное смещение тела под действием возмущений из класса V:

$$R_0 = \sup_{\mathbf{v}(\cdot)\in V}\ \sup_{t\in[0,\infty)} |\mathbf{r}(t;\mathbf{v})| \tag{4}$$

здесь $\mathbf{r}$ $(t;\ \mathbf{v})$ решение задачи Коши уравнения (1) при заданном возмущении $\mathbf{v}$ (t) и нулевых начальных условиях.

Заметим, что подобная задача в случае, когда движение платформы происходит вдоль фиксированной прямой, рассмотрена в [1]; было показано, что максимально возможное смещение равно $mJ_0^2/(2u_0)$ и достигается оно в пределе при действии мгновенного удара вида $J_0\delta(t)$ ($\delta(t)$ – дельта-функция). Кроме того, подобные же задачи при движении платформы и тела вдоль заданной прямой для иного вида силовой связи между телом и платформой рассмотрены в [2], [3]. В этих работах также было показано, что наибольшее смещение тела достигается в пределе при действии мгновенного удара с максимально допустимой интенсивностью J_0. Таким образом, рассматриваемая в данной статье задача является обобщением результата [1] на более сложный случай движения тела не вдоль прямой, а по плоскости.

Прежде чем перейти к непосредственному отысканию величины R_0 из соотношения (4), проведем ряд предварительных оценок. Оценим вначале кинетическую энергию тела. Введем в рассмотрение функцию

$$K(t;\mathbf{v}) = m[\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})]^2/2 \tag{5}$$

Вычислим производную dK/dt в силу уравнения (1):

$$dK/dt = -\mathbf{u}\dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{v}\dot{\mathbf{r}} \tag{6}$$

Согласно определению силы сухого трения (2) имеем $\mathbf{u}\dot{\mathbf{r}} \geqslant 0$ и, следовательно,

$$dK/dt \leqslant m|\mathbf{v}||\dot{\mathbf{r}}|$$

Из равенства (5) выразим $|\dot{\mathbf{r}}|$ через K и подставляя в последнее неравенство, получим

$$\frac{dK}{dt} \leqslant \sqrt{2mK}|\mathbf{v}|$$

Интегрируя это дифференциальное неравенство, будем иметь

$$\sqrt{K(t;\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^t |\mathbf{v}(t)|dt, \quad t \geqslant 0$$

или с учетом (5) и (3):

$$|\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})| \leqslant \int_0^t |\mathbf{v}(t)|\,dt \leqslant J_0, \quad t \geqslant 0 \tag{7}$$

Рассмотрим далее функционал, характеризующий диссипацию энергии в системе:

$$G[\mathbf{v}(\cdot)] = \int_0^\infty \dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})\mathbf{u}[\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})]dt$$

Согласно определению сухого трения (2) имеем

$$G[\mathbf{v}(\cdot)] = u_0\int_0^\infty |\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})|\,dt$$

Покажем далее справедливость неравенства

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |\mathbf{r}(t;\mathbf{v})| \leqslant G[\mathbf{v}(\cdot)]/u_0, \quad \forall\mathbf{v}(\cdot) \in V \tag{8}$$

В самом деле

$$|\mathbf{r}(t;\mathbf{v})| = \left|\int_0^t \dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})\,dt\right| \leqslant \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})|\,dt$$

откуда и следует требуемое неравенство (8):

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |\mathbf{r}(t;\mathbf{v})| \leqslant \sup_{t\in[0,\infty)} \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})|\,dt \leqslant \int_0^\infty |\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})|\,dt$$

Оценим теперь возможные значения функционала $G[\mathbf{v}(\cdot)]$. Интегрируя по t соотношение (6), получим

$$m\int_0^t \dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})\mathbf{v}(t)\,dt - \int_0^t \dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})\mathbf{u}[\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})]\,dt = K(t;\mathbf{v}) \geqslant 0$$

откуда следует неравенство

$$m\int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})|\,|\mathbf{v}(t)|\,dt \geqslant \int_0^t \dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})\mathbf{u}[\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})]\,dt \tag{9}$$

Рассмотрим интеграл в левой части неравенства (9), для чего воспользуемся оценкой (7). Имеем

$$\int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t;\mathbf{v})|\,|\mathbf{v}(t)|\,dt \leqslant \int_0^t |\mathbf{v}(t_1)| \int_0^{t_1} |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau dt_1 \tag{10}$$

Взяв по частям интеграл в правой части последнего неравенства, находим

$$\int_0^t |\mathbf{v}(t_1)| \int_0^{t_1} |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau dt_1 = \tfrac{1}{2}\left(\int_0^t |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau\right)^2$$

С учетом последнего равенства и неравенств (9) и (10) будем иметь

$$\frac{m}{2}\left(\int_0^\infty |\mathbf{v}(\tau)|\,d\tau\right)^2 \geqslant G[\mathbf{v}(\cdot)]$$

Используя далее неравенства (7) и (8), окончательно получим

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |\mathbf{r}(t;\mathbf{v})| \leqslant mJ_0^2/(2u_0) \quad \forall \mathbf{v}(\cdot)\in V \tag{11}$$

Итак, показано, что максимально возможное смещение тела для любого возмущения $\mathbf{v}(t)$ из класса V не превышает величины $mJ_0^2/(2u_0)$. Для решения исходной задачи (4) рассмотрим действующие вдоль произвольного фиксированного направления возмущения $\mathbf{v}(t) = \mathbf{e}w(t)$, где $\mathbf{e}$ – единичный произвольный вектор, а функция

$$w(t) = \begin{cases} J_0/T, & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

В рассматриваемом случае движение тела будет происходить в направлении вектора $\mathbf{e}$ и от векторного уравнения (1) можно перейти к скалярному, полагая $x = \mathbf{re}$:

$$m\ddot{x} = -u_*(\dot{x}) + mw(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

при этом

$$u_*(\dot{x}) = \begin{cases} u_0\,\mathrm{sign}(\dot{x}), & \dot{x} \neq 0 \\ mw(t), & \dot{x} = 0,\ |mw(t)| \leqslant u_0 \\ u_0\,\mathrm{sign}(w(t)), & \dot{x} = 0,\ |mw(t)| > u_0 \end{cases}$$

Несложный анализ показывает, что

$$\lim_{T\to 0}\sup_{t\in[0,\infty)}|x(t;w)|=\frac{mJ_0^2}{2u_0}$$

Таким образом, приведенная выше оценка (11) достигается в пределе при мгновенном ударе максимально допустимой интенсивности J_0.

Итак, окончательный результат с соответствующей физической интерпретацией выглядит следующим образом. Твердое тело, находящееся на горизонтальной платформе и имеющее с ней фрикционную связь типа сухого трения, при любом возмущении (поступательном движении платформы) из класса V останется в пределах круга радиуса $R_0 = mJ_0^2/(2u_0)$ с центром, совпадающим с исходным положением тела. Граничные же точки этого круга достигаются в пределе при мгновенных ударах вида $J_0 e\delta(t)$.

В заключение отметим, что помимо чисто теоретического интереса полученный результат имеет и прикладное значение, в частности, в задачах противоударной изоляции объектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 95-01-00138) и Международного научного фонда (грант N J27100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотник Н.Н.* Оптимизация амортизационных систем. М.: Наука, 1983. 257 с.
2. *Баландин Д.В.* Оптимизация противоударных амортизаторов для класса внешних воздействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 53–60.
3. *Баландин Д.В.* О накоплении возмущений в линейных и нелинейных системах при ударных воздействиях // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 20–25.

Н.–Новгород

Поступила в редакцию 25.IX.1995