

УДК 533.6.013.42

© 1996 г. О.В. АВРАМЕНКО, И.Т. СЕЛЕЗОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВДОЛЬ УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ В ЖИДКОСТИ

Исследованию распространения гидроупругих волн в упругом однородном по толщине слое, контактирующем с двух сторон с жидкими сжимаемыми средами, посвящены работы [1–8]. В [8] получены дисперсионные уравнения, проведен их асимптотический и численный анализ, исследованы волновые моды, соответствующие симметричным и антисимметричным колебаниям упругого слоя. В [6] показано наличие комплексных корней, что соответствует распространению волн и их излучению в окружающую жидкую среду. Показано также, что при коротких длинах волн затухание волн вследствие излучения их в жидкость заметно проявляется как для симметричных, так и для антисимметричных колебаний.

Изучению распространения изгибно-гравитационных волн в жидкости, покрытой сверху тонкой упругой пластинкой, движение которой описывается классической или уточненной теорией пластин, посвящено много работ, среди которых ключевой является [9]. Эти задачи типичны для теории поверхностных гравитационных волн, для описания которых, как правило, принимается модель несжимаемой жидкости, и поэтому они находятся вне рамок настоящего исследования, посвященного распространению гидроупругих волн в слое (волноводе), контактирующем со сжимаемыми жидкостями. Отметим только работу [10], в которой пластина на поверхности жидкости рассматривается как упругий слой в трехмерной постановке.

Исследование решений задач теории упругости неоднородных сред, и особенно в случае тел ограниченных размеров, связано с большими трудностями и возможно в очень ограниченных случаях, когда возможна декомпозиция исходных векторных уравнений теории упругости на два волновых уравнения. Наибольший вклад в эту проблему внесен Хуком [11], представившим обобщенный метод разделения зависимых и независимых переменных в векторном уравнении движения упругой среды применительно к решению задач о распространении волн в неоднородных средах специального вида. На этой основе в случае неоднородного по толщине упругого слоя для одного частного случая неоднородности анализ проводился в [12], где выведено дисперсионное уравнение и проанализировано влияние параметров сред на распространение волн. Для решения задач эффективно применялся метод степенных рядов, как и в случае однородного слоя [13].

В публикуемой работе на основе метода разложения неизвестных функций в степенные ряды по малой координате представлено решение задачи о распространении гармонических волн в произвольно неоднородном упругом слое, расположенном между жидкостями различной плотности.

1. Постановка задачи. 1.1. Уравнения движения неоднородной упругой среды. Неоднородность упругой среды характеризуется постоянными Ламе и плотностью, которые в общем случае являются функциями пространственных координат. Векторное уравнение движения неоднородной упругой среды имеет вид [11]:

$$\begin{aligned} \nabla((\lambda + 2G)\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (G \nabla \times \mathbf{u}) + 2((\nabla G \cdot \nabla)\mathbf{u} - \\ - (\nabla G)(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\nabla G) \times (\nabla \times \mathbf{u})) = \rho_1 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Рассмотрим модель неоднородной упругой среды, когда модуль сдвига G и плотность ρ_1 постоянные величины, а постоянная Ламе λ есть функция координат, т.е. $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$. В этом случае уравнение (1.1) распадается на два независимых волновых уравнения для скалярного и векторного потенциалов, как и в случае однородной среды. Действительно, полагая G и ρ_1 константами, уравнение (1.1) с учетом соотноше-

ния $\nabla \times \nabla \times = \nabla(\nabla \cdot) - \nabla^2$ приводит к виду

$$\nabla(\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})) - G \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + G \nabla^2 \mathbf{u} - \rho_1 \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = 0 \quad (1.2)$$

Если теперь представить векторное поле \mathbf{u} в виде суммы градиента скалярного потенциала ϕ и ротора векторного потенциала \mathbf{A} , дивергенция которого равна нулю,

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.3)$$

то уравнение (1.2) с учетом представления (1.3) приводится к двум независимым волновым уравнениям вида

$$\frac{\lambda + 2G}{\rho_1} \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{G}{\rho_1} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

В неограниченной упругой среде могут распространяться волны двух типов: дилатационные, характеризующиеся изменением объема, и эквиволлюминальные, характеризующиеся искажением формы. В неоднородном упругом теле эти волны могут модифицироваться. В рассматриваемом случае уравнение (1.4) описывает распространение дилатационной волны, скорость которой есть функция от λ , $c_e = c_e(\lambda(x))$. В дальнейшем задача рассматривается в прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 .

Рассмотрим случай, когда дилатационный модуль λ есть функция только поперечной координаты x_3 , $\lambda = \lambda(x_3)$, а модуль сдвига G и плотность ρ_1 постоянны, $G = \text{const}$, $\rho_1 = \text{const}$. В этом случае имеем для квадрата скорости распространения дилатационных волн

$$c_e^2 = f(x_3) = (\lambda(x_3) + 2G) / \rho_1$$

где $f(x_3)$ – произвольная функция, разложимая в ряд по степеням x_3 . Уравнение (1.4) в этом случае принимает вид

$$f(x_3) \nabla^2 \phi - \partial^2 \phi / \partial t^2 = 0 \quad (1.6)$$

или, учитывая, что $f(x_3) = \sum \beta_i x_3^i$ ($i = 0, 1, \dots, \infty$):

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3^i \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.7)$$

Функция $f(x_3)$ можно подобрать произвольным образом с учетом физических свойств исследуемого материала.

1.2. Гидроупругая задача. Рассмотрим распространение волн в произвольно неоднородном упругом слое, ограниченном с двух сторон сжимаемыми невязкими жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно. Упругий слой расположен вдоль координаты x_1 ($-\infty < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$, $h \leq x_3 \leq h$), а координата x_3 направлена вертикально вверх.

Согласно введенным предположениям уравнения неоднородной упругой среды в области $-h \leq x_3 \leq h$ представляются в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3^i \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9)$$

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{e}_2 \xi$$

В случае потенциального движения жидкости система уравнений гидродинамики с учетом выражений $\mathbf{v}_0 = -\nabla \Psi_0$ и $\mathbf{v}_2 = -\nabla \Psi_2$ приводится к волновым уравнениям в соответствующих областях. В области $x_3 > h$ имеем

$$\nabla^2 \Psi_0 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{v}_0 = -\nabla \Psi_0, \quad p_0 = \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \quad (1.10)$$

В области $x_3 < -h$:

$$\nabla^2 \Psi_2 - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{v}_2 = -\nabla \Psi_2, \quad p_2 = \rho_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$c_0 = \sqrt{K_0 / \rho_0}, \quad c_2 = \sqrt{K_2 / \rho_2}$$

где K_0 и K_2 – модули упругости жидкости в верхнем и нижнем полупространстве с плотностями ρ_0 и ρ_2 , индексами 0 и 2 характеризуются параметры соответствующие областям $x_3 > h$ и $x_3 < -h$.

На поверхностях раздела $x_3 = h$ и $x_3 = -h$ выполняются условия сопряжения

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = -p_0, \quad (v_3)_0 = \partial u_3 / \partial t \quad \text{при } x_3 = h \quad (1.12)$$

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = -p_2, \quad (v_3)_2 = \partial u_3 / \partial t \quad \text{при } x_3 = -h \quad (1.13)$$

Условия (1.12) и (1.13) с учетом соотношений Гука принимают вид при $x_3 = h$:

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} = 0$$

$$\frac{\lambda}{G} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = -\rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial x_1} = 0$$

и при $x_3 = -h$:

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} = 0$$

$$\frac{\lambda}{G} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) = -\rho_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_3} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} = 0$$

На бесконечности также удовлетворяются условия излучения и ограниченности Зоммерфельда.

В дальнейшем вводятся безразмерные величины с характерными параметрами: длина $2h$, плотность ρ_1 , скорость волн сдвига $c_s = (G / \rho_1)^{1/2}$.

2. Решение задачи. 2.1 Решение уравнения с переменными коэффициентами. Решение представляется в классе бегущих волн

$$f(x_1, x_3, t) = F(x_3) \exp(i(kx_1 - \omega t)) \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в уравнения (1.8), (1.13) и в граничные условия (1.12) и (1.13), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2\Phi}{dx_3^2} - \Phi \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_*} = 0, \quad c_* = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3^i \right) \quad (2.2)$$

$$d^2\Xi / dx_3^2 - \Xi(k^2 - \omega^2 / c_s^2) = 0 \quad (2.3)$$

$$d^2\Psi_0 / dx_3^2 - \Psi_0(k^2 - \omega^2 / c_0^2) = 0 \quad (2.4)$$

$$d^2\Psi_2 / dx_3^2 - \Psi_2(k^2 - \omega^2 / c_2^2) = 0 \quad (2.5)$$

с условиями сопряжения на поверхностях раздела

$$2ik \frac{d\Phi}{dx_3} - k^2\Xi - \frac{d^2\Xi}{dx_3^2} = 0 \quad \text{при } x_3 = \pm h \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3^i \frac{d^2\Phi}{dx_3^2} - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3^i - 2 \right) k^2\Phi + 2ik \frac{d\Xi}{dx_3} - i\omega\rho_0\Psi_0 = 0 \quad \text{при } x_3 = h \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3^i \frac{d^2\Phi}{dx_3^2} - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3^i - 2 \right) k^2\Phi + 2ik \frac{d\Xi}{dx_3} - i\omega\rho_2\Psi_2 = 0 \quad \text{при } x_3 = -h \quad (2.8)$$

$$-i\omega \frac{d\Phi}{dx_3} - k\omega\Xi + \frac{d\Psi_0}{dx_3} = 0 \quad \text{при } x_3 = h \quad (2.9)$$

$$i\omega \frac{d\Phi}{dx_3} - k\omega\Xi + \frac{d\Psi_2}{dx_3} = 0 \quad \text{при } x_3 = -h \quad (2.10)$$

Уравнение (2.2) есть уравнение с переменными коэффициентами, решение которого будем искать методом степенных рядов. Представим решение в виде

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_3^n \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в уравнение (2.2) и выполняя умножение рядов, получим следующее уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^n \beta_i (n+1-i)(n+2-i) \alpha_{n+2-i} - k^2 \sum_{i=0}^n \beta_i \alpha_{n-i} + \omega^2 \alpha_n \right] x_3^n = 0$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x_3 нулю, получим бесконечную систему рекуррентных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^n \beta_i (n+1-i)(n+2-i) \alpha_{n+2-i} - k^2 \sum_{i=0}^n \beta_i \alpha_{n-i} + \omega^2 \alpha_n = 0 \quad (n = \overline{0, \infty})$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы, связывающие все коэффициенты

$$\alpha_{n+2} = - \frac{1}{\beta_0(n+1)(n+2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i (n+1-i)(n+2-i) \alpha_{n+2-i} - \sum_{i=0}^n k^2 \beta_i \alpha_{n-i} + \omega^2 \alpha_n \right] \quad (2.12)$$

В отличие от [12], где функция выбрана в виде четного многочлена четвертой степени, в рассматриваемом случае четные коэффициенты нельзя последовательно выразить через α_0 , а нечетные через α_1 . Из рекуррентной формулы (2.12) методом математической индукции можно показать, что каждый коэффициент α_n можно выразить через α_0 и α_1 как сумму двух функций, каждая из которых зависит только от α_0 или

от α_1 . Введем функции $\gamma_v^* = \gamma_v^*(\alpha_0)$ и $\zeta_v^* = \zeta_v^*(\alpha_1)$, такие что

$$\alpha_v(\alpha_0, \alpha_1) = \gamma_v^*(\alpha_0) + \zeta_v^*(\alpha_1) \quad (v = \overline{0, \infty}) \quad (2.13)$$

$$\gamma_1^* = \zeta_0^* = \zeta_2^* = 0, \quad \zeta_1^* = \alpha_1, \quad \gamma_0^* = \alpha_0$$

Подставим (2.13) в формулу (2.12), после некоторых преобразований получим

$$\alpha_{n+2} = -\frac{1}{\beta_0(n+1)(n+2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i(n+1-i)(n+2-i) \gamma_{n+2-i}^* - \sum_{i=0}^n k^2 \beta_i \gamma_{n-i}^* + \omega^2 \gamma_n^* \right] - \\ - \frac{1}{\beta_0(n+1)(n+2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i(n+1-i)(n+2-i) \zeta_{n+2-i}^* - \sum_{i=0}^n k^2 \beta_i \zeta_{n-i}^* + \omega^2 \zeta_n^* \right] \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что функцию γ_v^* можно выразить через предыдущие γ_j^* ($j = \overline{0, v-1}$):

$$\gamma_{n+2}^* = -\frac{1}{\beta_0(n+1)(n+2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i(n+1-i)(n+2-i) \gamma_{n+2-i}^* - \sum_{i=0}^n k^2 \beta_i \gamma_{n-i}^* + \omega^2 \gamma_n^* \right] \quad (2.15)$$

а ζ_v^* через ζ_j^* ($j = \overline{0, v-1}$):

$$\zeta_{n+2}^* = -\frac{1}{\beta_0(n+1)(n+2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i(n+1-i)(n+2-i) \zeta_{n+2-i}^* - \sum_{i=0}^n k^2 \beta_i \zeta_{n-i}^* + \omega^2 \zeta_n^* \right] \quad (2.16)$$

Из (2.15) видно, что все $\gamma_0^*, \gamma_1^*, \dots, \gamma_{n+2}^*$ последовательно выражаются через α_0 , а из (2.16), что все $\zeta_0^*, \zeta_1^*, \dots, \zeta_{n+2}^*$ — через α_1 . Тогда решение уравнения (2.2) представляется в виде

$$\Phi = \alpha_0 f_1 + \alpha_1 f_2 \quad (2.17)$$

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_3^n, \quad \gamma_n = \frac{\gamma_n^*}{\alpha_0} \quad (n = \overline{0, \infty})$$

$$f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n x_3^n, \quad \zeta_n = \frac{\zeta_n^*}{\alpha_1} \quad (n = \overline{0, \infty})$$

Коэффициенты α_0 и α_1 определяются из условий сопряжения.

Решение (2.17) сходится внутри круга, достигающего ближайшей особой точки уравнения (2.2). Отсюда следует, что ряд (2.17) сходится при всех x_3 в области $-h \leq x_3 \leq h$, если функция $f(x_3)$ не имеет нулей на этом интервале.

Рассмотрим случай, когда функция неоднородности четная. Тогда

$$\beta_{2i+1} = 0 \quad (i = \overline{0, \infty}) \quad (2.18)$$

Учитывая, что $\gamma_1^* = 0$ и $\zeta_0^* = \zeta_2^* = 0$, а также рекуррентные формулы (2.15) и (2.16), имеем

$$\gamma_{2k+1} = 0, \quad \zeta_{2k} = 0 \quad (k = \overline{0, \infty}) \quad (2.19)$$

Следовательно

$$\Phi = \alpha_0 f_1 + \alpha_1 f_2, \quad f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_0} x_3^{2n}, \quad f_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{\alpha_1} x_3^{2n+1} \quad (2.20)$$

В [12] получен аналогичный результат для четного многочлена четвертой степени. Переход от неоднородного слоя к однородному можно осуществить, полагая

$$\beta_0 = c_e^2 = \text{const}, \quad \beta_i = 0 \quad (i = \overline{1, \infty}) \quad (2.21)$$

Итак, получено решение уравнения (2.2) в виде (2.16).

2.2 Дисперсионное уравнение. Переобозначим величины α_0 и α_1 , $\alpha_0 = C_1$, $\alpha_1 = C_2$ и перепишем (2.17):

$$\Phi(x_3) = C_1 f_1 + C_2 f_2 \quad (2.22)$$

Решения уравнений (2.3)–(2.5) с учетом условий Зоммерфельда записываются в виде

$$\Xi(x_3) = C_3 e^{\lambda_1 x_3} + C_4 e^{-\lambda_1 x_3} \quad (2.23)$$

$$\Psi_0(x_3) = C_5 e^{\lambda_2 x_3} \quad (2.24)$$

$$\Psi_2(x_3) = C_6 e^{-\lambda_2 x_3} \quad (2.25)$$

$$\lambda_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_s^2}, \quad \lambda_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}, \quad \lambda_3^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}$$

Подставляя решения (2.22)–(2.25) в граничные условия (2.6)–(2.10), приходим к системе алгебраических уравнений относительно постоянных C_i ($i = \overline{1,6}$):

$$2ik \left. \frac{df_1}{dx_3} \right|_{x_3=h} C_1 + 2ik \left. \frac{df_2}{dx_3} \right|_{x_3=h} C_2 - b_3 e^{\lambda_1 h} C_3 - b_3 e^{-\lambda_1 h} C_4 = 0$$

$$2ik \left. \frac{df_1}{dx_3} \right|_{x_3=-h} C_1 + 2ik \left. \frac{df_2}{dx_3} \right|_{x_3=-h} C_2 - b_3 e^{-\lambda_1 h} C_3 - b_3 e^{\lambda_1 h} C_4 = 0$$

$$b_1 |_{x_3=h} C_1 + b_2 |_{x_3=h} C_2 - 2ik\lambda_1 e^{\lambda_1 h} C_3 - 2ik\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} C_4 - i\omega\rho_0 e^{-\lambda_2 h} C_5 = 0 \quad (2.26)$$

$$b_1 |_{x_3=h} C_1 - b_2 |_{x_3=-h} C_2 + 2ik\lambda_1 e^{-\lambda_1 h} C_3 - 2ik\lambda_1 e^{\lambda_1 h} C_4 - i\omega\rho_2 e^{-\lambda_3 h} C_6 = 0$$

$$-i\omega \left. \frac{df_1}{dx_3} \right|_{x_3=h} C_1 - i\omega \left. \frac{df_2}{dx_3} \right|_{x_3=h} C_2 + k\omega e^{\lambda_1 h} C_3 + k\omega e^{-\lambda_1 h} C_4 - \lambda_2 e^{-\lambda_2 h} C_5 = 0$$

$$-i\omega \left. \frac{df_1}{dx_3} \right|_{x_3=-h} C_1 - i\omega \left. \frac{df_2}{dx_3} \right|_{x_3=h} C_2 + k\omega e^{-\lambda_1 h} C_3 + k\omega e^{\lambda_1 h} C_4 - \lambda_3 e^{-\lambda_3 h} C_6 = 0$$

$$b_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3 \frac{d^2 f_1}{dx_3^2} - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3 - 2 \right) k^2 f_1$$

$$b_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3 \frac{d^2 f_2}{dx_3^2} - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x_3 - 2 \right) k^2 f_2$$

$$b_3 = k^2 - \lambda_1^2$$

Приравняв нулю определитель системы (41), приходим к дисперсионному уравнению. Запишем его в виде

$$\begin{vmatrix} d_1 \Gamma_{10} & 0 & d_2 \Lambda_{10} & d_3 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 & 0 & 0 \\ 2 \hat{S}_\gamma & 0 & 2 \hat{S}_\zeta & d_4 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 & P_- & P_+ \\ d_2 \Gamma_{10} & 0 & d_2 \Lambda_{10} & d_5 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 & A_- & A_+ \\ d_1 \Gamma_{11} & d_3 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 & d_2 \Lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 2 \hat{C}_\gamma & d_4 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 & 2 \hat{C}_\zeta & 0 & P_+ & P_- \\ d_2 \Gamma_{11} & d_5 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 & d_2 \Lambda_{11} & 0 & A_+ & A_- \end{vmatrix} = 0 \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_\gamma &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} \left[\Gamma_{20} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{00} \right] + \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1} \left[\Gamma_{21} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{01} \right] + 2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{00} \\
\hat{S}_\gamma &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} \left[\Gamma_{21} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{01} \right] + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1} \left[\Gamma_{20} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{00} \right] + 2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Gamma_{01} \\
\hat{C}_\zeta &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} \left[\Lambda_{20} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Lambda_{00} \right] + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1} \left[\Lambda_{21} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Lambda_{01} \right] + 2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Lambda_{00} \\
\hat{S}_\zeta &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i} \left[\Lambda_{21} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Lambda_{01} \right] + \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1} \left[\Lambda_{20} - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Lambda_{00} \right] + 2 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \Lambda_{01} \tag{2.28}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{00} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{2i} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i}, \quad \Lambda_{20} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+2)(2i+3) \zeta_{2i+3} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1}$$

$$\Gamma_{01} = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1}, \quad \Lambda_{20} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)(2i+2) \zeta_{2i+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i}$$

$$\Gamma_{10} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) \gamma_{2+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i}, \quad \Lambda_{11} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+2) \zeta_{2i+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1}$$

$$\Gamma_{11} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+2) \gamma_{2i+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1}, \quad \Lambda_{10} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) \zeta_{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i}$$

$$\Gamma_{20} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)(2i+2) \gamma_{2i+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i}, \quad \Lambda_{01} = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{2i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1}$$

$$\Gamma_{21} = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+2)(2i+3) \gamma_{2i+3} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i+1}, \quad \Lambda_{00} = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_{2i} \left(\frac{h}{2}\right)^{2i}$$

$$\gamma_{n+2} = -\frac{1}{\beta_0(n+1)(n+2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i (n+1-i)(n+2-i) \gamma_{n+2-i} - \left(\frac{2\pi^2}{l}\right)^2 \left[\sum_{i=0}^n k^2 \beta_i \alpha_{n-i} + \omega^2 \gamma_n \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{n+2} &= -\frac{1}{\beta_0(n+1)(n+2)} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i (n+1-i)(n+2-i) \zeta_{n+2-i} - \right. \\
&\left. - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \left[\sum_{i=0}^n k^2 \beta_i \alpha_{n-i} + \omega^2 \zeta_n \right] \right]
\end{aligned}$$

$$d_1 = 4i \frac{2\pi}{l}, \quad d_2 = -2i \frac{2\pi}{l} c, \quad d_3 = -4 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (2-c^2)$$

$$d_4 = 8i \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 a_2, \quad a_2 = 4 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 c$$

$$P_- = -i \frac{2\pi}{l} (\rho_0 - \rho_2), \quad P_+ = -i \frac{2\pi}{l} (\rho_0 + \rho_2)$$

$$A_- = \frac{2\pi}{l} (a_4 - a_3), \quad A_+ = -\frac{2\pi}{l} (a_4 + a_3), \quad a_i = \frac{\lambda_i}{2\pi l} \quad (i = \overline{1, 4})$$

2.3 Волновые моды. Для построения мод перемещений u_1 и u_2 необходимо учесть выражение вектора перемещения через потенциалы $\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{e}_2 \xi$, а также формулы (2.2), (2.17), (2.21) и (2.22), определяющие потенциалы. В результате получаем

$$u_1 = \left[C_1' k \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_3^n + C_2' k \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n x_3^n - C_3 \lambda_1 e^{\lambda_1 x_3} + C_4 \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_3} \right] \cos(kx_1 - \omega t)$$

$$u_3 = \left[-C_1' \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \gamma_{n+1} x_3^n - C_2' \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \zeta_{n+1} x_3^n + C_3 k e^{\lambda_1 x_3} + C_4 k e^{-\lambda_1 x_3} \right] \sin(kx_1 - \omega t) \quad (2.29)$$

$$C_1' = i\alpha_0, \quad C_2' = i\alpha_1$$

Аналогично получаем выражение для волновых мод компоненты тензора напряжения σ_{33} в следующем виде:

$$\sigma_{33} = - \left[C_1' \left[-k^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n - 2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x_3^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \gamma_{k+2} x_3^k \right] - \right.$$

$$\left. - C_2' \left[-k^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n - 2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n x_3^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x_3^n \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \zeta_{k+2} x_3^k \right] + \right.$$

$$\left. + C_3 \lambda_1 2k e^{\lambda_1 x_3} - C_4 \lambda_1 2k e^{-\lambda_1 x_3} \right] \sin(kx_1 - \omega t) \quad (2.30)$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 , а также C_5, C_6 определяются из системы (2.26) после предварительного фиксирования одной из них, например $C_6 = 1$. Система решалась численно, графики волновых мод и их анализ представлены ниже.

3. Анализ полученных результатов. 3.1 Частные случаи функции неоднородности. Рассмотрим некоторые частные случаи функции неоднородности.

Пусть функция неоднородности четная. При этом выполняются соотношения (2.18)–(2.20). Из (2.26) следует, что

$$\Gamma_{01} = \Gamma_{10} = \Gamma_{21} = \Lambda_{00} = \Lambda_{11} = \Lambda_{20} = \hat{S}_\gamma = \hat{C}_\zeta = 0$$

$$\hat{C}_\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \left(\frac{h}{2} \right)^{2i} \left[\Gamma_{20} - \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \Gamma_{00} \right] + 2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \Gamma_{00} \quad (3.1)$$

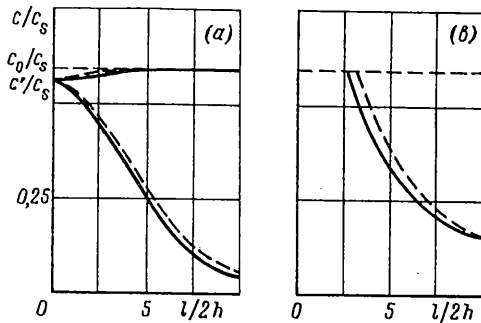
$$S_\gamma = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{2i} \left(\frac{h}{2} \right)^{2i} \left[\Lambda_{21} - \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \Lambda_{01} \right] + 2 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \Lambda_{01}$$

Подставляя (3.1) в уравнение (2.27), после преобразований получаем дисперсионное уравнение

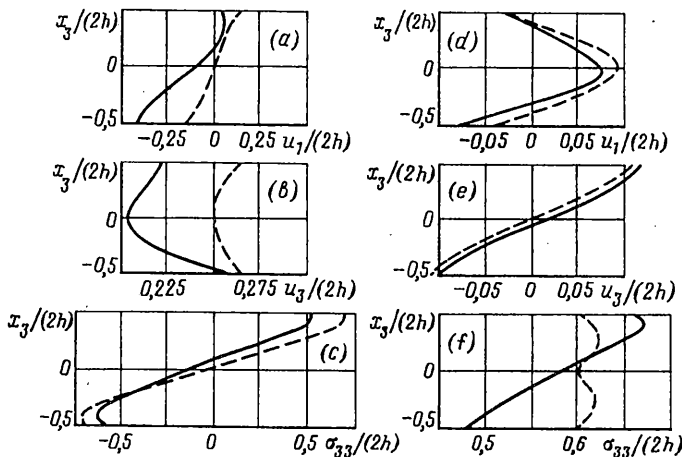
$$(-P_+^2 - P_-^2) R_3 R_4 + (P_+ A_+ - P_- A_-) (R_2 R_3 + R_4 R_1) + (-A_+^2 + A_-^2) R_1 R_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$R_1 = d_1 \Lambda_{10} d_4 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 - 2 \hat{S}_\zeta d_3 \cosh \frac{\pi}{l} a_2$$

$$R_2 = d_1 \Gamma_{11} d_4 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 - 2 \hat{C}_\gamma d_3 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 \quad (3.3)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$R_3 = d_1 \Lambda_{10} d_5 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 - d_2 \Lambda_{10} d_3 \cosh \frac{\pi}{l} a_2$$

$$R_4 = d_1 \Gamma_{11} d_5 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 - d_2 \Gamma_{11} d_3 \sinh \frac{\pi}{l} a_2$$

Однородный слой можно рассматривать как частный случай неоднородного, полагая функцию неоднородности постоянной, при этом будут выполняться соотношения (2.21). Дисперсионное уравнение, описывающее распространение волны в гидроупругой системе с однородным упругим слоем также имеет вид (3.2), однако выражения R_i ($i = \overline{1,4}$) имеют следующую форму

$$\begin{aligned} R_1 &= 8 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 \left(-4a_2 a_1 \cosh \frac{\pi}{l} a_1 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 + (2 - c^2) \sinh \frac{\pi}{l} a_1 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 \right) \\ R_2 &= 8 \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 \left(-4a_2 a_1 \sinh \frac{\pi}{l} a_1 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 + (2 - c^2) \cosh \frac{\pi}{l} a_1 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 \right) \\ R_3 &= 8i \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 c^3 a_1 \cosh \frac{\pi}{l} a_1 \cosh \frac{\pi}{l} a_2 \\ R_4 &= 8i \left(\frac{2\pi}{l} \right)^4 c^3 a_1 \sinh \frac{\pi}{l} a_1 \sinh \frac{\pi}{l} a_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогичный результат был получен в [11].

3.2 *Примеры.* В работе численно анализировались случаи неоднородности, соответствующие значениям упругих постоянных морского льда, полученных в [13]. Функция $\lambda(x_3)$ задавалась в виде

$$\lambda(x_3) / G = a_0 / 2 + a_1 \cos q + b_1 \sin q + a_2 \cos 2q \quad (3.5)$$

$$q = \pi(x_3 - x_0) / 2, \quad x_0 = -0,5$$

$$a_0 = 2,92075, \quad a_1 = -1,3935, \quad b_1 = 0,315, \quad a_2 = -1,46425$$

На всех фигурах сплошными линиями изображены графики, соответствующие неоднородному слою, а штриховым – однородному. На фиг. 1 изображены нижние ветви решения дисперсионных уравнений при различных значениях параметров. Так, фиг. 1, *a* соответствует гидроупругой системе "жидкость – лед – жидкость" при следующих значениях параметров $\rho_0/\rho_1 = \rho_2/\rho_1 = 0,18$, $G/K_0 = G/K_2 = 0,85$. Так же, как и в случае однородного слоя, при $l/2h \rightarrow 0$ обе ветви стремятся к определенному значению c'/c_s . Наличие неоднородности типа (3.5) уменьшает фазовые скорости. Верхняя ветвь, соответствующая ветви симметричных колебаний однородного слоя, при $l/2h \rightarrow \infty$ стремится к c_0/c_s медленнее, чем в однородном слое. В то же время нижняя ветвь, соответствующая ветви антисимметричных колебаний однородного слоя, в этом случае стремится к нулю несколько быстрее, чем в случае однородного слоя. Аналогичный результат получен для системы "воздух – лед – вода" (фиг. 1, *b*). Значения параметров такой гидроупругой системы следующие $\rho_0/\rho_1 = 0,001448$, $\rho_2/\rho_1 = 1,09$, $G/K_0 = 0,01906$, $G/K_2 = 0,85$.

На фиг. 2 изображены графики волновых мод в однородном и неоднородном слоях при значениях параметров $\rho_0/\rho_1 = \rho_2/\rho_1 = 0,18$, $G/K_0 = G/K_2 = 0,85$; $l/2h = 2$. На фиг. 2, *a–c* представлены волновые моды, соответствующие симметричным колебаниям однородного слоя, а на фиг. 2, *d–f* – антисимметричным. Видно, что влияние неоднородности вида (3.5) проявляется в существенной деформации профилей соответствующих волновых мод однородного слоя.

Из анализа полученных результатов следует, что неоднородность изменения дилатационного модуля упругости по толщине приводит к уменьшению фазовых скоростей и существенной деформации профиля волновых мод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селезов И.Т., Сорокина В.В. Распространение волн вдоль упругого слоя в жидкости // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1975. Вып. 32. С. 9–14.
2. Banerji D.K., Sengupta P.R. Propagation of waves in a micropolar elastic layer immersed in an infinite liquid // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. 1976. V. 24. No. 4. P. 271–283. •
3. Smith P.W., Dym C.L. Input and transfer admittances of thick plates driven by unifor line moment // J. Sound and Vibrat. 1978. V. 60. No. 3. P. 441–447.
4. Ko S.H. Flexural wave baffling by use of viscoelastiv material // J. Sound and Vibrat. 1981. V. 75. No. 3. P. 347–357.
5. Schroter V., Fahy F.J. Point-force excited vibrations of a thin infinite panel separating a fluid layer from a fluil half-space // J. Sound and Vibrat. 1981. V. 74. No. 4. P. 465–476.
6. Dubbelday P.S. Application of a new complex root-finging technique to the dispersions relations for elastic waves in a fluid-loaded piate // SIAM J. Appl. Math. 1983. V. 43. No. 5. P. 1127–1139.
7. Rokhlin S.I., Chimenti D.E., Nayfeh A.H. On the topology of the complex wave spectrum in a fluid-coupled elastic layer // J. Acoust. Soc. America. 1989. V. 85. No. 3. P. 1074–1080.
8. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Распространение гидроупругих волн в упругом или жидком слое, контактирующем с внешней средой // Гидромеханика. Киев: Наук. думка, 1993. Вып. 66. С. 15–20.

9. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
10. Strathdee J., Robinson W.H. Haines E.M. Mowing loads on ice plates of finite thickness // J. Fluid Mech. 1991. V. 226. P. 37–61.
11. Hook J.F. Separation of the vector wave equation of elasticity for certain types of inhomogeneous, isotropic media // J. Acoust. Soc. America. 1961. V. 33. No. 3. P. 302–313.
12. Селезов И.Т., Сорокина В.В., Яковлев В.В. Распространение волн в упругом неоднородном по толщине слое, ограниченном жидкостью // Акуст.ж. 1985. Т. 31. Вып. 3. С. 374–379.
13. Богородский В.В. Физические методы исследования ледников. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 214 с.

Киев

Поступила в редакцию
20.VII.1995