

УДК 533.6.013.42

© 1996 г. О.В. КУЗНЕЦОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ОТСЕКЕ, ЗАГЛУШЕННОМ ПОЛОГИМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ДНИЩАМИ И ЗАПОЛНЕННОМ ГАЗОМ

Используя математический аппарат асимптотических методов интегрирования дифференциальных уравнений проводится качественный анализ уравнений колебаний составной оболочки, состоящей из цилиндрической и пологих сферических оболочек и содержащей газ. На основании полученных результатов выявлено, что структура акустических полей, возникающих при резонансных колебаниях, состоит из двух групп волн. Одна из них образована собственными функциями дифференциального оператора, описывающего колебания газа в слое, ограниченном упругими пологими сферами, вторая – газа в бесконечной упругой цилиндрической оболочке. Учитывая полученные ранее результаты, показано, что эти колебания независимы друг от друга и существуют в разных частотных областях. При этом какой из двух спектров проявится в отклике зависит от места приложения вызывающей колебания оболочки нагрузки. Построенные математические модели позволяют разработать простые алгоритмы для расчета акустических колебаний конструкций, приведены примеры расчета.

Анализ динамических процессов, возникающих при взаимодействии конструкции летательного аппарата с внешним турбулентным потоком газа является сложной задачей и, несмотря на появившиеся пакеты прикладных программ по решению акустических задач, использование современных вычислительных средств для исследования до сих пор малоэффективно. Стандартные вычислительные методы ориентированы, в первую очередь, на решение задач в нижней части частотного спектра, для задач акустического плана заложенные в них математические теории не обеспечивают необходимую точность расчета, при этом часто теряются особенности взаимодействия оболочек с заключенной в них акустической средой и возможно получение физически мало достоверных результатов. Опыт изучения процессов показал, что для решения проблемы необходимо, в первую очередь, провести качественное исследование структуры акустических полей, возникающих внутри отсеков, и разработать модели феноменологического уровня, хорошо описывающие физическую картину взаимодействия оболочек с заключенным внутри газом. Только после такого исследования можно переходить к разработке программного обеспечения для численного решения задачи. Модели феноменологического уровня имеют также и самостоятельное значение, особенно при анализе динамических процессов в сложных системах, так как получаемые с их помощью качественные результаты позволяют выявить особенности нагружения, облегчающие интерпретацию результатов и разработку мероприятий по снижению акустических нагрузок. Зачастую эти модели позволяют получить кроме качественных также и количественные результаты, тем самым решить поставленную проблему в полном объеме. Математическим аппаратом, пригодным для построения такого рода моделей, является метод асимптотического интегрирования уравнений движения [1, 2]. Используя при решении динамических задач в качестве асимптотического большого параметра безразмерную величину $\rho^4 = \Omega^4 / c^2 = \rho_0 R^2 (1 - v^2) \omega^2 12 R^2 / (Eh^2)$, связанную с частотой, можно построить набор математических моделей для анализа акустических колебаний и провести исследование процессов в

частотной области. При этом полученные результаты будут иметь четкую физическую интерпретацию. В этом выражении ρ_0 – плотность материала оболочки, E, ν – физические константы материала, h, R – геометрические размеры оболочки, ω – круговая частота. Принято, что оболочка является тонкой и отношение h/R удовлетворяет обычным допущениям теории тонких оболочек.

Рассмотрим для примера конструкцию, состоящую из цилиндрической оболочки конечной длины, заглушенной с двух сторон пологими сферическими днищами и содержащей газ. Прежде, чем перейти к исследованию структуры акустического поля внутри такого отсека, найдем решение двух вспомогательных задач: о колебаниях слоя газа, заключенного между двумя пологими сферическими оболочками, и бесконечной цилиндрической оболочки, заполненной газом. Анализ взаимодействия с газом пологих сферических днищ будем проводить, используя уравнения оболочек, записанные в наиболее простой форме [3]. Чтобы не загромождать, выкладки, ограничимся рассмотрением осесимметричных колебаний, дающих полное представление о проблеме. При выводе уравнений пологих сферических оболочек, записанных относительно функций напряжения φ и перемещения w , В.З. Власовым было использовано без должного анализа жесткое допущение о равенстве нулю тангенциальных усилий X и Y , что привело к потере части решений. В связи с этим появился ряд работ, в которых были предприняты не слишком удачные попытки избавиться от этого недостатка за счет усложнения вида зависимости, связывающей функцию напряжений с усилиями, без отказа от допущения о равенстве нулю тангенциальных внешних нагрузок. Между тем, как нетрудно убедиться, в исходных уравнениях пологих оболочек В.З. Власова, записанных в общей форме, содержатся все необходимые решения. Развернутые в полярной системе координат относительно функций u, w , они имеют следующий вид

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} (\gamma u) \right] + (1 - \nu + \Omega^4)u + (1 + \nu) \frac{dw}{d\gamma} = 0$$

$$(1 + \nu) \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} (\gamma u) + [2(1 + \nu) - \Omega^4]w + c^2 (\nabla^2 \nabla^2 w + 2\nabla^2 w) = 0$$

В этих уравнениях учтены все, в том числе и тангенциальные, инерционные члены. Используя результаты, полученные в [1], выделим из колебаний общего вида безмоментные волны и волны с большой изменчивостью напряженно-деформированного состояния. Приведенные уравнения содержат малый параметр c^2 , поэтому мы можем применить асимптотические методы решения. Для этого представим решение в виде произведения двух, быстро и медленно меняющихся, функций, причем последнюю возьмем в виде асимптотического ряда по степеням асимптотического параметра. Введем большой параметр $\rho^4 = \Omega^4 / c^2$ и запишем решение в виде следующих функций [1]:

$$u = I_1(\rho\varphi\gamma) [\eta_{u0} + \rho^{-1}\eta_{u1} + \dots]$$

$$w = I_0(\rho\varphi\gamma) [\eta_{w0} + \rho^{-1}\eta_{w1} + \dots]$$

Для выбранного варианта метода дифференцирование функций u, w эквивалентно их умножению на $\rho\varphi$. Величина $\rho\varphi$ является волновым числом и характеризует изменчивость напряженно-деформированного состояния.

При безмоментных колебаниях величины $\rho\varphi$ сравнительно невелика, так что можно ввести следующее и единственное допущение $c^2(\nabla^4 + 2\nabla^2)w \ll w$. Тогда принимая, что

$$w = - \frac{1 + \nu}{2(1 + \nu) - \Omega^4} \frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} (\gamma u)$$

после несложных преобразований можно свести систему к одному уравнению относительно перемещений u :

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} (\gamma u) \right] + \frac{1-\nu+\Omega^4}{1+\nu} [2(1+\nu)-\Omega^4] u = 0$$

Это уравнение имеет второй порядок и соответственно упрощаются граничные условия. На краях оболочки налагаются ограничения лишь на усилие N или перемещение u .

Для колебаний с большой изменчивостью дифференцирование увеличивает асимптотический порядок величины. Поэтому исходная система примет вид

$$\frac{d}{d\gamma} \left[\frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} (\gamma u) \right] + (1+\nu) \frac{dw}{d\gamma} = 0$$

$$(1+\nu) \left[\frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} (\gamma u) \right] + [2(1+\nu)-\Omega^4] w + c^2 \nabla^2 \nabla^2 w = 0$$

Таким образом только для этого вида колебаний допустимо предположение о пренебрежении тангенциальными нагрузками. Принимая, что

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{d\gamma} (\gamma u) = -(1+\nu) w$$

окончательно получим уравнение для функции w :

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\Omega^4}{c^2} \left(\frac{1-\nu}{\Omega^4} - 1 \right) w = 0$$

При наличии поверхностной нагрузки оно примет вид

$$\nabla^4 w - \frac{\Omega_c^2}{c^2} \left(1 - \frac{1-\nu^2}{\Omega^4} \right) w - \frac{R_c^4 12(1-\nu^2)}{E h_c^3} Z = 0 \quad (1)$$

Это уравнение полностью совпадает с полученным В.З. Власовым для сферических оболочек [3] и единственным условием его существования является требование о большой изменчивости напряженно-деформированного состояния. Таким образом использование без предварительного анализа жесткого допущения о равенстве нулю тангенциальных усилий приводит к необратимой потере безмоментного решения. Несложно убедиться, что на краю оболочки при колебаниях с большой изменчивостью должны удовлетворяться четыре граничных условия, включающие только функцию w и ее первые производные. Поскольку резонансное взаимодействие оболочки с газовой средой возможно только для этого вида колебаний [1], в дальнейшем ограничимся рассмотрением только случая существования в полой оболочке волн с большой изменчивостью напряженно-деформированного состояния.

В этих уравнениях Z – поверхностная нагрузка (направлена по внутренней нормали),

$$\Omega_c^4 = \frac{\rho_{0c} R_c^2 (1-\nu^2)}{E_c} \omega^2, \quad c_c^2 = \frac{h^2}{12 R_c^2}$$

Индекс c относится к сферической оболочке.

Газ подчиняется уравнению для потенциальной функции Φ :

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Здесь a – скорость звука в газе, t – время.

В безразмерной отнесенной к радиусу цилиндрической оболочки системе координат α, γ (ось α – направлена вдоль оси отсека, γ – по радиусу) потенциал Φ можно представить в виде следующего выражения $\Phi = F_1(\gamma)F_2(\alpha)$. На границе между газом и оболочкой должны быть выполнены условия

$$Z = \rho_{0g} \partial F / \partial t, \quad \partial w / \partial t = \frac{1}{R_c} F_1 \frac{dF_2}{d\alpha}$$

В соответствии с идеей метода решение уравнений будем искать в виде произведения двух, быстро и медленно меняющейся, функций, причем последнюю представим асимптотическим рядом по обратным степеням большого параметра $\rho_c = (\Omega_c^4 / c^2)^{1/4}$.

$$w = J_0(\rho \phi_c \gamma)(\eta^{(0)} + \rho^{-1} \eta^{(1)} + \dots)$$

В [1, 2] было показано, что для построения необходимых для качественного анализа решений достаточно ограничиться точностью $o(\rho^{-1})$. Более того, учет более высоких приближений, не повышая существенно точность расчета, приводит к маскированию особенностей взаимодействия отдельных частей конструкции. Подставляя решение в (1, 2) и группируя члены с одинаковыми степенями при большом параметре, получим характеристическое уравнение (коэффициент при ρ^0) для исследования структуры акустического поля в слое толщиной $2\alpha_1$ между двумя пологими оболочками:

$$\phi_c^4 - \left(1 - \frac{1-v^2}{\Omega^4} \frac{R^2}{R_c^2} - \Delta_c \frac{h}{h_c} \frac{F_2}{dF_2/d\alpha} \right) = 0$$

$$\Delta_c = \rho_{0g} R_c / (\rho_0 h_c)$$

Индекс g относится к газу. Разделяя решение на симметричные ($F_2 = \cos k\alpha$) и кососимметричные ($F_2 = \sin k\alpha$) волны, окончательно будем иметь два характеристических уравнения

$$\phi_c^4 - \left(1 - \frac{1-v^2}{\Omega^4} \left(\frac{R}{R_c} \right)^2 + \Delta_c \frac{h}{h_c} \frac{\cos k\alpha_1}{k \sin k\alpha_1} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\phi_c^4 - \left(1 - \frac{1-v^2}{\Omega^4} \left(\frac{R}{R_c} \right)^2 + \Delta_c \frac{h}{h_c} \frac{\sin k\alpha_1}{k \cos k\alpha_1} \right) = 0 \quad (4)$$

Волновое число k и функция ϕ_c связаны соотношением

$$k^2 = \frac{E\Omega^4}{\rho_0 a^2 (1-v^2)} - \rho_c^2 \phi_c^2$$

Последнее слагаемое в уравнениях (3,4) учитывает вклад от взаимодействия со средой.

Рассмотрим вначале кососимметричные волны. Прежде, чем разрабатывать вычислительную программу для решения уравнения (4), проведем предварительное его исследование. Коэффициенты уравнения зависят от безразмерной частоты колебаний, следовательно вид решения будет различным в разных частотных областях. Ясно также, что поскольку последнее слагаемое является периодической функцией, и при этом равенство нулю знаменателя возможно только в случае вырождения задачи в задачу о колебаниях газа, заключенного между абсолютно жесткими стенками, то решение будет представлять набор отдельных ветвей, лежащих между предельными асимптотами, определяемыми равенством $k \cos k\alpha_1 = 0$.

Количество ветвей в решении определяется выполнением неравенства $k \geq 0$ и для действительных значений $\rho \phi$ ограничено. Для получения полной системы функций

необходимо учитывать волны с мнимыми значениями $\rho\phi$. Оценим асимптотические порядки членов уравнения (4). Перед последним слагаемым стоит коэффициент Δ_c . Для газа его величина имеет порядок ρ^{-1} , таким образом ясно, что возможно возникновение нескольких ситуаций. Во первых – влиянием последнего слагаемого можно пренебречь и решение уравнения близко к решению для оболочки в вакууме. В районе нулей знаменателя последнего слагаемого решение стремится к другому предельному случаю – волнам в слое газа, заключенном между жесткими стенками. И между двумя этими предельными случаями может существовать переходная зона совместных резонансных колебаний газа и пологих оболочек. С учетом асимптотических порядков всех слагаемых в районе нулей знаменателя уравнение (4) принимает вид

$$\phi_c^4 + \Delta_c \frac{\sin k\alpha_1}{k \cos k\alpha_1} = 0 \quad (5)$$

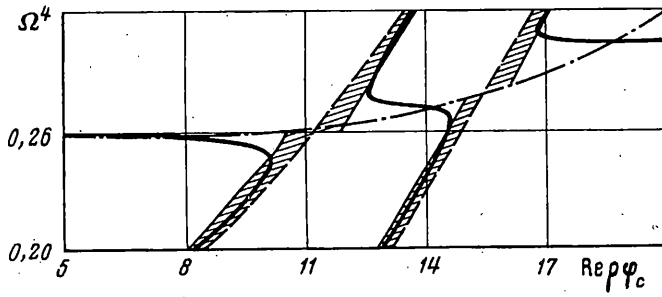
Для существования его решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство $(\sin k\alpha_1 / k \cos k\alpha_1) < 0$, т.е. значения $k\alpha_1$ должны лежать во втором и четвертом квадратах. Значения ϕ_c для каждой ветви решения будут увеличиваться с ростом Ω^4 , располагаясь между двумя соседними кривыми $k \cos k\alpha_1 = 0$. При этом, ниже кривой для волны, возникающей в оболочке в вакууме, решение уравнения (4) будет лежать слева от правой предельной кривой, а выше – переходить к левой предельной кривой, не пересекая ее. Поскольку переход осуществляется справа налево, то для волны с действительными значениями $\rho\phi_c$ зона совпадения решения с другим предельным случаем (оболочкой в вакууме) будет малой, а переходные участки совместных резонансных колебаний достаточно велики, что и объясняет существование резонансных колебаний газа совместно с оболочками для этого вида движений только в этой зоне [1]. Малость значений коэффициента Δ_c определяет малую ширину на частотной оси этой зоны. Следовательно, при возбуждении оболочки широкополосными внешними силами акустические колебания внутри нее будут возникать только в узком районе вокруг волны в оболочке в вакууме и первая такая зона лежит в районе $\Omega_0^4 = 1 - v^2$. Вне этих зон решение описывается приближенно уравнением (5) и практически не отличается от волны в слое газа между жесткими стенками. Учитывая выбранный погрешность решения, ясно, что эта ситуация достигается при выполнении условия

$$\left| \frac{\rho\phi_c - \rho\phi_g}{\rho\phi_g} \right| \ll \rho^{-1} \quad (6)$$

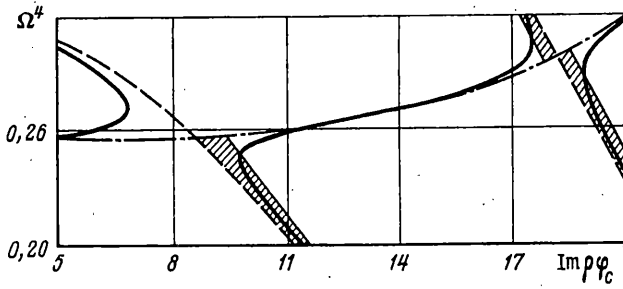
и в этом случае колебания газа и оболочки развязаны друг от друга. Таким образом в результате предварительного качественного анализа без проведения расчетов определены вид и все особенности решения, достаточные для анализа поведения конструкции. Результаты анализа существенно упрощают разработку вычислительных программ для ЭВМ.

На фиг. 1, 2 показаны результаты вычисления дисперсионных кривых, описывающих волны в слое, ограниченном двумя пологими сферическими оболочками. Параметры: оболочек $R = 0,865$ м, $h = 0,0035$ м, $E = 0,7 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,29$; газ-воздух $a = 331$ м/с, толщина слоя газа $2\alpha_1 = 1,688$. Штриховыми линиями на этих рисунках нанесены волны в слое с жесткими днами, а штрихпунктирными – волна для оболочки в вакууме. Заштрихованные области, рассчитанные по неравенству (6) и соответствующему для учета отклонений от решений для оболочки в вакууме, ограничивают зоны существования совместных колебаний. На фиг. 1 приведены результаты вычислений для действительных, а на фиг. 2 – для мнимых значений $\rho\phi_c$.

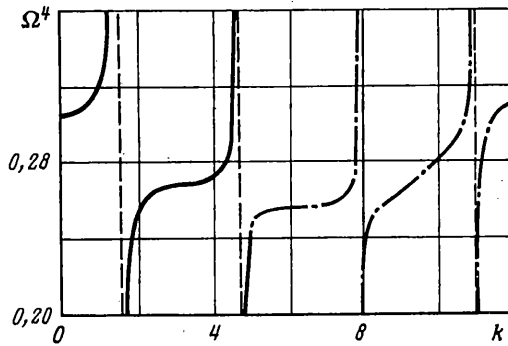
На фиг. 3 эти кривые перестроены в функции от волнового числа k . Здесь значения, соответствующие мнимым $\rho\phi_c$ показаны штрихпунктирной линией. Вид этих кри-



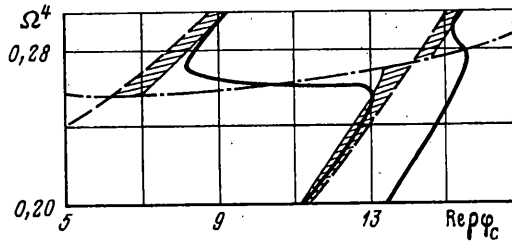
Фиг. 1



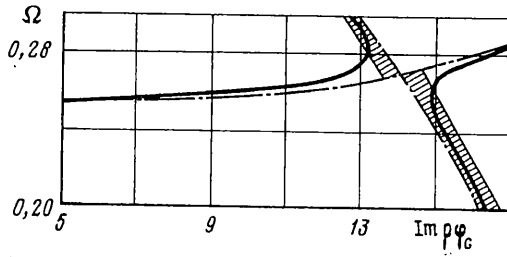
Фиг. 2



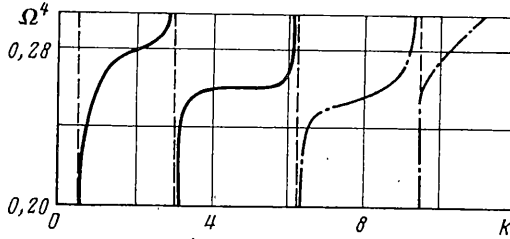
Фиг. 3



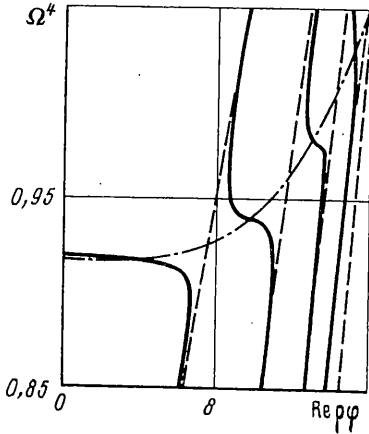
Фиг. 4



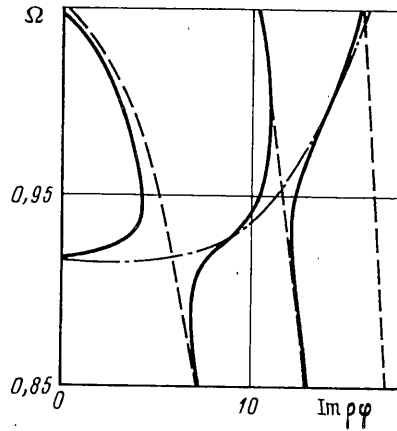
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

вых подтверждает ранее сделанное заключение, что существует только сравнительно узкая зона в районе решения для волны в оболочке в вакууме, где решение для действительных значений ρ_c отличается от обоих предельных случаев. При этом для мнимых значений ρ_c кривые совместных колебаний газа и оболочки практически совпадают с другим предельным случаем – кривой для оболочки в вакууме, т.е. газ для этих волн не оказывает влияния на поведение оболочки и величина $Z \rightarrow 0$. Интересным также является и то, что в зонах существования резонансных колебаний значение производной $\partial\Omega / \partial k$, характеризующее скорость распространения энергии волны вдоль оси x близко к нулю. Результаты анализа говорят о том, что при падении волны на пологую оболочку, несмотря на то, возмущение может иметь широкополосный спектр, внутри ограниченного упругими границами слоя газа возникают узкополосные акустические колебания, то есть оболочка, содержащая газ, выполняет функции узкополосного частотного фильтра. Анализ этих же кривых показывает насколько сложным является процесс получения экспериментальной информации об акустических процессах в слое. Малое изменение частоты в функции от k и ρ_c гово-

рит о возможности в пределах погрешности испытательного оборудования одновременного возбуждения нескольких резонансов с разными длинами акустических волн. Поэтому показания точечных микрофонов будут существенно зависеть от их положения в слое и здесь нужны интегральные оценки. Кроме того, в этом частотном диапазоне невозможно получить в процессе испытаний спектр оболочки, соответствующий ее колебаниям в вакууме.

На фиг. 4, 5, 6 представлены аналогичные результаты для кососимметричного спектра, также соответствующие сделанным выше выводам.

Перейдем теперь к решению второй вспомогательной задачи о колебаниях бесконечной цилиндрической оболочки, заполненной газом. В [1] было показано, что в цилиндрической оболочке могут существовать два вида колебаний, каждое из которых описывается уравнениями более низкого, чем исходное, порядка: полубезмоментные и с большой изменчивостью напряженно-деформированного состояния вдоль оси α . При этом совместные колебания оболочки и газа возможны лишь для колебаний с большой изменчивостью, зона существования которых определяется неравенством $\Omega^4 \geq (1 - \nu^2)$. Ниже этой частоты оболочка и газ практически не взаимодействует друг с другом и спектр колебаний представляет собой сумму двух независимых спектров для оболочки в вакууме и газа в жесткой цилиндрической полости. При осесимметричных колебаниях с большой изменчивостью движения оболочки подчиняются уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\alpha^4} + \frac{\Omega^4}{c^2} \left(\frac{1 - \nu^2}{\Omega^4} - 1 \right) w - \frac{1}{c^2} \frac{1 - \nu^2}{Eh} R^2 Z = 0 \quad (7)$$

где w, Z – направлены по внешней нормали.

Для газа остается справедливым уравнение (2). Решение уравнений (6) и (2) по прежнему ищется в виде комбинаций быстро и медленно меняющейся вдоль оси α функций

$$w = \exp(\rho\phi\alpha)(\eta^{(0)} + \rho^{-1}\eta^{(1)} + \dots)$$

Исходя из неразрывности движений газа и оболочки и граничных условий на цилиндрической поверхности $\gamma = 1$ в виде

$$Z = -\rho_0 r \partial\Phi / \partial t, \quad \partial w / \partial t = \frac{1}{R} \partial\Phi / \partial\gamma$$

характеристическое уравнение задачи будет иметь следующий вид:

$$\phi^4 + \left(\frac{1 - \nu^2}{\Omega^4} - \left(1 + \Delta \left(\frac{E\Omega^4}{\rho_0 a^2 (1 - \nu^2)} - \rho^2 \phi^2 \right)^{-1/2} \frac{J_0((R\omega/a)\phi_g)}{J_1((R\omega/a)\phi_g)} \right) \right) = 0 \quad (8)$$

$$\Omega^4 = \frac{\rho_0 R^2 (1 - \nu^2) \omega^2}{E}, \quad \Delta = \frac{\rho_{0g} R}{\rho_0 h}, \quad (R\omega/a)\phi_g = \left(\frac{E\Omega^4}{\rho_0 a^2 (1 - \nu^2)} - \rho^2 \phi^2 \right)^{1/2}$$

Здесь $J_n(z)$ – функция Бесселя n -го порядка.

Уравнение (8) имеет такую же структуру как и уравнения (4), (5), но асимптотами, к которым стремятся отдельные ветви решения, здесь будут кривые, определяемые равенством $J_1((R\omega/a)\phi_g) = 0$, характер решения идентичен полученному выше.

На фиг. 7, 8 показана дисперсионная картина волн в бесконечной цилиндрической оболочке с газом в функции от волнового числа $k = \rho\phi$ для действительных и мнимых значений. Параметры цилиндрической оболочки $R = 0,456$ м, $h = 0,00225$ м, $\rho_0 = 2700$ кг/м³, $E = 0,7 \cdot 10^{11}$ п/м², $\nu = 0,29$. Как и в выше рассмотренном случае совместные колебания газа и оболочки существуют в узкой зоне вокруг кривой, характерной для колебаний оболочки в вакууме при действительных значениях $\rho\phi$. Анализируя приведенные кривые, необходимо сделать несколько замечаний. Первое: значение Ω^4 зависит от радиуса цилиндрической оболочки R , отличающегося по

величине от радиуса R_c . Следовательно, при возбуждении колебаний через боковую поверхность цилиндрической оболочки полоса физических частот акустических резонансных колебаний будет отличаться от случая возбуждения колебаний нагрузкой, приложенной к пологим днищам. Второе: в зоне, определяющей резонансные акустические колебания для одной из этих задач, вторая система функций практически не отличается от решения для газа в полости с жесткими стенками. Как следствие, когда мы будем иметь дело с анализом акустических колебаний конструкции, состоящей из цилиндрической оболочки, заглушенной пологими сферами, структура звукового поля внутри нее будет определяться только этими рассмотренными выше двумя системами функций. Третье: изменяемость параметров акустических колебаний по длине и радиусу обратны друг другу. Волнам с большой скоростью изменения параметров по длине соответствует малое значение аргумента функций Бесселя. Поскольку аргумент первоначально является большим параметром то, учитывая закон изменения функции Бесселя, от радиуса, становится ясным, что, например, в цилиндрической оболочке микрофоны, установленные на ее оси будут в первую очередь регистрировать волны с меньшими $\rho\phi$, так как их амплитуда, при возбуждении акустических колебаний через боковую поверхность цилиндра, будет превышать амплитуду остальных волн.

Перейдем теперь к основной задаче – анализу спектра резонансных акустических колебаний оболочки конечной длины с днищами и содержащей внутри себя газ. С учетом сделанных замечаний ясно, что резонансный спектр будет содержать две группы значений. Одна из них соответствует частотам колебаний газа в жесткой цилиндрической полости, заглушенной упругими пологими сферическими оболочками. Вторая – газа в упругой цилиндрической оболочке конечной длины с жесткими днищами. Решение перечисленных задач будем искать в виде рядов по собственным функциям рассмотренных выше дифференциальных операторов, описывающих волны в бесконечных слое газа и цилиндрической оболочке. Каждая из этих задач существенно проще исходной и этот, полученный в результате предварительного анализа вывод, наглядно демонстрирует те преимущества, которые дает использование моделей феноменологического уровня при решении сложных динамических задач. Однако каждая из задач позволяет провести дальнейшие упрощения. Рассмотрим вначале задачу о колебаниях газа, заключенного в жесткую цилиндрическую полость с днищами. На боковой цилиндрической поверхности необходимо удовлетворить двум граничным условиям на краю пологой сферической оболочки при $\alpha = \pm \alpha_1$ и по всей длине полости – условиям для газа вида $\partial\Phi/\partial\gamma = 0$. Будем для определенности считать, что край оболочки жестко зашпелен, то есть при $\gamma = \pm \gamma_1$, $w = w' = 0$, и ограничимся рассмотрением кососимметричных по α волн. Анализ приведенных на фиг. 1, 2 кривых показывает, что для каждого конкретного значения частоты на частотной оси существует только одна волна с действительным значением $\rho\phi$, в которой оболочка и газ взаимодействуют друг с другом. Кроме того, в этой частотной зоне есть еще одна волна, практически совпадающая с возникающей в оболочке в вакууме волной. Для этой волны влияние газа на поведение оболочки можно пренебречь. Учет этих двух волн позволяет полностью удовлетворить граничным условиям на краю оболочки. Остальные волны, как с действительными так и с минимальными значениями $\rho\phi_c$ совпадают с волнами в газе, заключенном в жесткую полость конечной длины, для которых на границе с пологой оболочкой выполняются условия следующего вида: $\partial\Phi/\partial\alpha = \partial w_c/\partial t = 0$. Таким образом, решение задачи можно представить в следующем виде:

$$w_c = A_1 J_0(\rho_1 \Phi_{c1} \gamma) + A_2 I_0(\rho_2 \Phi_{c2} \gamma) + \sum_{n=3}^{\infty} A_n I_n(\rho \Phi_{cn} \gamma)$$

Бесконечной суммой учитываются волны в слое с жесткими стенами. В зоне совместных резонансных колебаний газа и оболочки их вклад в возбуждение перемещений в оболочке имеет существенно меньший асимптотический порядок. Это позволяет, как нетрудно убедиться, провести дальнейшее упрощение задачи. В ре-

зультате частотный спектр резонансных колебаний будет определяться только главной краевой задачей, образованной двумя волнами, характерными для упругой конструкции, и граничными условиями на краю γ_1 пологой сферической оболочки. Устранение появляющейся на границе невязки при расчете акустического давления в газе происходит с использованием дополнительной краевой задачи с помощью бесконечной системы волн в газе внутри жесткой полости при найденном в процессе решения главной краевой задачи значении частоты Ω^4 (представляя, например, невязку рядом Фурье – Бесселя по системе собственных функций задачи о колебаниях слоя газа между жесткими стенками. При возбуждении оболочек внешними широкополосными силами колебания газа в жесткой полости составят третий независимый акустический спектр). Решение главной краевой задачи при приведенных выше исходных данных и длине цилиндрической оболочки $2\alpha_1 = 1,688$ дает значение низшей, наиболее интересной в практике, частоты совместных акустических колебаний, равное $\Omega_1^4 = 0,255$ при $\text{Re}(\rho c_c) = 6,656$ и $\text{Im}(\rho c_c) = 10,507$. Поскольку значение остальных $\text{Im}(\rho c_c)$ велико, то мнимые волны уточняют распределение давления в газе, в основном, лишь в районе границы с цилиндрической стенкой. Для коротких отсеков даже первое значение $\text{Im}(\rho c_c)$ имеет достаточно большое значение. Анализ асимптотических порядков членов, входящих в составленный из граничных условий главной краевой задачи частотный определитель, показывает, что в этом случае значение резонансных частот будет практически совпадать с нулями функции $w_c = AJ_0(\rho c_c \gamma_1)$, определяющей перемещение пологой оболочки, взаимодействующей только с одной волной с действительными значениями ρc_c . Для второй задачи справедливы те же выводы. Значения частотного спектра акустических колебаний находятся из решения главной краевой задачи, определяемой одной волной с действительным волновым числом и одной – с мнимым, а для устранения невязки на границе с пологой оболочкой используется ряд по собственным функциям задачи о колебаниях газа в жесткой цилиндрической полости.

Вычисления дают следующие значения низших резонансных частот для этой задачи: $\Omega_1^4 = 0,9105\text{Re}(\rho c) = 6,3435\text{Im}(\rho c) = 7,1622$; $\Omega_2^4 = 0,9138\text{Re}(\rho c) = 5,4867\text{Im}(\rho c) = 7,3842$; $\Omega_3^4 = 0,9341\text{Re}(\rho c) = 11,2409\text{Im}(\rho c) = 9,6025$.

Таким образом, частотный спектр задачи о колебаниях газа внутри отсека определяется только граничными условиями на краях оболочек.

В [1, 4] было показано, что если соединение оболочек происходит через ребро жесткости – шпангоут, то для колебаний с большим показателем изменчивости напряженно-деформированного состояния цилиндр и сфера становятся динамическими системами с независимыми спектрами. Следовательно спектр задачи о колебаниях отсека с газом будет состоять из двух независимых спектров. При этом только место приложения внешних сил будет определять какой из двух спектров проявится в отклике.

Декомпозиции исходной задачи на ряд более простых, возможность которой обособлена использованием асимптотического метода решения дифференциальных уравнений, позволяет разработать математические модели для решения сложных динамических проблем, возникающих в инженерной практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов О.В. Модели для расчета частотного спектра неоднородных оболочечных конструкций // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 185–189.
2. Кузнецов О.В. Об анализе колебаний оболочек вращения, подкрепленных ребрами жесткости // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 181–185.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек. Т. 1. М.: Наука, 1962. 439 с.
4. Кузнецов О.В. Анализ частотного спектра осесимметричных колебаний сопряженных тонких сферической и цилиндрической оболочек // Прикл. механика. 1984. Т. 20. Вып. 2. С. 47–52.