

УДК 532.516

© 1996 г. М.Я. ПАНОВКО

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО КОНТАКТА С УЧЕТОМ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВХОДНОЙ ГРАНИЦЫ СМАЗОЧНОЙ ПЛЕНКИ

Рассматривается задача о тяжело нагруженном упругогидродинимическом (УГД) локальном контакте гладких тел, катящихся одно по другому, при наличии между ними тонкого слоя смазочной пленки в изотермических условиях. В отличие от опубликованных к настоящему времени численных исследований смазанного локального УГД контакта (см., например, [1–4]), в данной работе вычислительный алгоритм разработан с учетом сложной формы входной границы смазочной пленки. Это позволяет исследовать в локальном контакте режимы недостаточной смазки (подобные режимы характерны для подшипников качения, зубчатых передач и так далее). Математическая модель УГД контакта описывается стационарной, нелинейной интегродифференциальной системой уравнений Рейнольдса, упругости, граничными условиями для давления на границах области и условием равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта. Нелинейность УГД уравнений обусловлена зависимостью от давления толщины смазочной пленки и вязкости смазки, а также положительностью давления в пленке. Для определения в процессе решения местоположения свободной границы, отделяющей область положительного давления от области кавитации, использовались условия дополнителности [1, 5].

Система УГД уравнений, приведенная к безразмерному виду, решалась методом Ньютона–Рафсона. Конечно-разностные соотношения выводились путем интегрирования линеаризованной УГД системы по контуру расчетной ячейки. При формировании матрицы системы учитывалось, что входная граница области контакта может иметь сложную форму (вырезы). Система линейных алгебраических уравнений решалась относительно приращений давления и толщины пленки на каждом итерационном шаге методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента. На каждом итерационном шаге осуществлялась коррекция свободной границы согласно условиям дополнителности. Процесс итераций продолжается до достижения требуемой относительной точности решения.

Приводятся результаты численного моделирования смазанного локального контакта гладких сферических тел. Показано значительное влияние формы входной границы смазочной пленки на распределения давления в смазочной пленке, зазора между телами в зоне контакта, напряжения трения на поверхности.

Вычислительные эксперименты продемонстрировали устойчивость алгоритма в широком диапазоне варьируемых параметров, таких как геометрия входной границы смазочной пленки, параметр нагрузки V , пезокоэффициент вязкости Q .

Применение и развитие изложенной методики возможно при исследовании режимов смешанного трения, нестационарных режимов трения смазанных шероховатых тел, теплообмена в контакте, а также при исследовании возникновения неустойчивых режимов смазывания.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарную изотермическую упругогидродинимическую (УГД) задачу о локальном тяжело нагруженном контакте катящихся друг по другу гладких тел, разделенных тонким слоем смазки, подчиняющей ньютоновской реологии (несжимаемая вязкая жидкость). В задаче используются типичные допущения УГД теории смазки [6, 7]. Введем безразмерные переменные

$$(x', y') = \frac{(x, y)}{a_H}, \quad p' = \frac{p}{p_H}, \quad h' = \frac{h}{h_0}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$V = \frac{24\mu_0|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|R_x'^2}{p_H a_H^3}, \quad H_0 = \frac{2R_x' h_0}{a_H^2}, \quad \varepsilon = \frac{R_x'}{R_y'}, \quad \beta = \frac{a_H}{b_H}$$

$$\varphi(\beta) = \frac{K(e) - D(e)}{\beta^4 D(e)}, \quad D(e) = \frac{K(e) - E(e)}{e^2}, \quad e = \sqrt{1 - \beta^2}$$

где x, y – декартовы координаты в плоскости качения; R_x', R_y' – приведенные радиусы кривизны контактирующих тел; p – давление в смазочной пленке; a_H и b_H – полуоси герцевского эллипса контакта; e – эксцентриситет эллипса контакта; p_H – максимальное герцевское напряжение; h – толщина смазочной пленки; h_0 – толщина смазочной пленки в начале координат; μ – вязкость смазки; μ_0 – вязкость смазки при $p = 0$; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ – векторы скоростей контактирующих поверхностей; H_0 – безразмерная толщина пленки в центре контакта; V – параметр нагрузки; $K(e)$ и $E(e)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода; постоянная β определяется из уравнения $\beta^2 \varphi(\beta) = R_x' / R_y'$.

Уравнения рассматриваемой УГД задачи имеют в безразмерных переменных следующий вид (далее штрихи опущены):

$$L(p) = \left[\nabla \cdot \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) \right] = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y)$$

$$h = 1 + \frac{x^2 + \varepsilon y^2}{H_0} + \frac{1}{\pi \beta^2 D(e) H_0} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (1.2)$$

$$\iint_{\Omega} p(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{2\pi}{3\beta} \quad (1.3)$$

$$p|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}), \quad \mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) / |\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|$$

$$v_x = \frac{v_{1x} + v_{2x}}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|}, \quad v_y = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|}$$

где $\partial\Omega$ – граница области Ω .

Система (1.1)–(1.4) является нелинейной интегродифференциальной системой уравнений Рейнольдса (1.1), зазора между упругими телами (1.2), условия равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (1.3) и граничного условия для давления на границах области контакта (1.4).

Для нахождения свободной границы между зонами смазки и кавитации используются условия дополнителности [1, 5], согласно которым

$$L(p) = 0, \quad p > 0; \quad L(p) < 0, \quad p = 0 \quad (1.5)$$

Физическое обоснование целесообразности применения этих условий при решении различных УГД задач подробно обсуждено в [1, 5].

В системе уравнений (1.1)–(1.5) заданными считаются геометрия границы входа смазочной пленки в область контакта, параметр нагрузки V (для тяжело нагруженного

контакта $V \ll 1$), компоненты вектора скорости $v(u_x, u_y)$, параметр $\varepsilon = R'_x / R'_y$ и зависимость $\mu(p)$. В расчетах использовалась предложенная Барусом зависимость

$$\mu = \mu_0 \exp(Qp) \quad (1.6)$$

где Q – пьезокоэффициент вязкости.

Решением системы (1.1)–(1.6) являются функции давления $p(x, y)$, зазора $h(x, y)$, выходная граница $x_e(y)$, отделяющая область положительного давления от области кавитации, и безразмерная толщина слоя смазки H_0 .

По известному решению можно определить напряжения трения на контактирующих поверхностях из соотношения

$$\tau = \frac{\mu s V}{12hH_0} - \frac{h}{2} H_0 \nabla p, \quad s = \frac{2(v_1 - v_2)}{|v_1 + v_2|} \quad (1.7)$$

где s – относительный вектор проскальзывания.

Первый член в (1.7) – напряжение трения скольжения $\tau_s = (\tau_{sx}, \tau_{sy})$, второй – напряжение трения качения $\tau_r = (\tau_{rx}, \tau_{ry})$.

2. Численный метод решения. Исследуемая область контакта в плоскости (x, y) задается в виде прямоугольника $\Omega = (x_1 \leq x \leq x_2) \times (y_1 \leq y \leq y_2)$. Заменой переменных $x(x^*), y(y^*)$ вводится неравномерная декартова сетка со сгущением внутри области Ω . Вычислительная область Ω^* , на которую отображается Ω , покрывается в плоскости (x^*, y^*) равномерной разнесенной сеткой: в направлении осей x^* и y^* вводятся соответственно следующие системы узлов:

$$x_i^* \quad (i = 0, \dots, i_{\max} + 1), \quad x_{i-1/2}^* = (x_i^* + x_{i-1}^*) / 2 \quad (i = 1, \dots, i_{\max} + 1)$$

$$y_j^* \quad (j = 0, \dots, j_{\max} + 1), \quad y_{j-1/2}^* = (y_j^* + y_{j-1}^*) / 2 \quad (j = 1, \dots, j_{\max} + 1)$$

Давление определяется в узлах (x_i^*, y_j^*) , а зазор – в узлах $(x_{i-1/2}^*, y_{j-1/2}^*)$. Согласно отображению $x(x^*), y(y^*)$ в области Ω неравномерной сетке соответствуют системы узлов $(x_i, y_j), (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$.

После интегрирования уравнения (1.1) по области, занимаемой расчетной ячейкой, и преобразования двойного интеграла в интеграл по контуру l расчетной ячейки (i, j) , получаем

$$L_1(p) = \int_{(l)} \left[H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p \cdot \mathbf{n} - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})h \right] dl = 0 \quad (2.1)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали. В условиях дополненности (см. (1.5)) оператор $L(p)$ заменяется на $L_1(p)$.

Решение УГД системы уравнений проводится методом Ньютона – Рафсона. Линеаризованные около решения $(p(x, y), H_0)$ уравнения (2.1), (1.3), (1.4) имеют вид

$$\int_{(l)} \left\{ \left[2H_{0,k} \frac{h_k^3}{\mu_k} \frac{\partial p_k}{\partial n} - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial H_0} \right]_k + H_{0,k}^2 \frac{3h_k^2}{\mu_k} \frac{\partial p_k}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial H_0} \right\} \Delta H_{0,k+1} -$$

$$- H_{0,k}^2 \frac{h_k^3}{\mu_k^2} \frac{\partial \mu}{\partial p} \Big|_k \frac{\partial p_k}{\partial n} \Delta p_{k+1} + H_{0,k}^2 \frac{3h_k^2}{\mu_k} \frac{\partial h}{\partial p} \Big|_k \Delta p_{k+1} \frac{\partial p_k}{\partial n} +$$

$$+H_{0,k}^2 \frac{h_k^3}{\mu_k} \frac{\partial \Delta p_{k+1}}{\partial n} - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial p} \Big|_k \Delta p_{k+1} \Big\} dl = - \int_{(l)} \left[H_{0,k}^2 \frac{h_k^3}{\mu_k} \frac{\partial p_k}{\partial n} - V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h_k \right] dl \quad (2.2)$$

$$\iint_{\Omega} \Delta p_{k+1}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{2\pi}{3\beta} - \iint_{\Omega} p_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.3)$$

$$\Delta p_{k+1}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.2)–(2.4) k – номер итерации, $\Delta p_{k+1} = p_{k+1} - p_k$, $\Delta H_{0,k+1} = H_{0,k+1} - H_{0,k}$, $\partial h / \partial H_{0,k}$ – частная производная от h_k по $H_{0,k}$, вычисляемая по соотношению (1.2); $\partial \mu / \partial p|_k$ – частная производная от μ_k по p_k , вычисляемая по соотношению (1.6); $\partial h / \partial p|_k$ – линейный оператор, представляющий собой производную h_k по p_k (производная Фреше), действующий на Δp_{k+1} , имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial p} \Big|_k \Delta p_{k+1} = \frac{1}{\pi\beta^2 D(e)H_{0,k}} \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \Delta p_{k+1}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.5)$$

Интегрирование по контуру расчетной ячейки l вокруг узла (i, j) выполняется вдоль отрезков координатных осей $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, $[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$. Для вычисления производных по координатам на гранях ячейки используются аппроксимации

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x_{i\pm 1/2}, y_j) \cong \frac{\pm p(x_{i\pm 1}, y_j) \mp p(x_i, y_j)}{\pm x_{i\pm 1} \mp x_i}$$

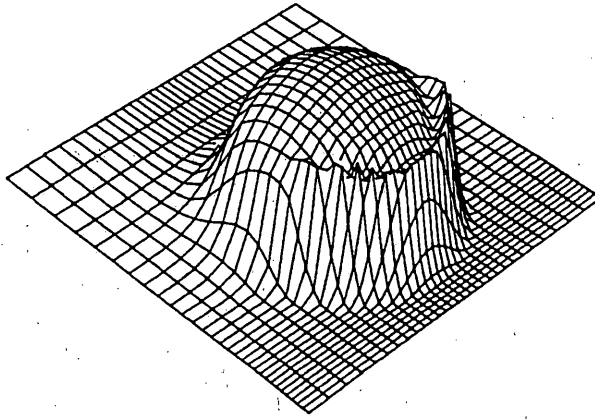
$$\frac{\partial p}{\partial y}(x_i, y_{j\pm 1/2}) \cong \frac{\pm p(x_i, y_{j\pm 1}) \mp p(x_i, y_j)}{\pm y_{j\pm 1} \mp y_j}$$

Коэффициенты перед производными определяются соответственно в точках $(x_{i\pm 1/2}, y_j)$, $(x_i, y_{j\pm 1/2})$. Интеграл в выражении (1.2) вычислялся по кубатурной формуле, применяемой при вычислении сингулярных интегралов (см. [8]):

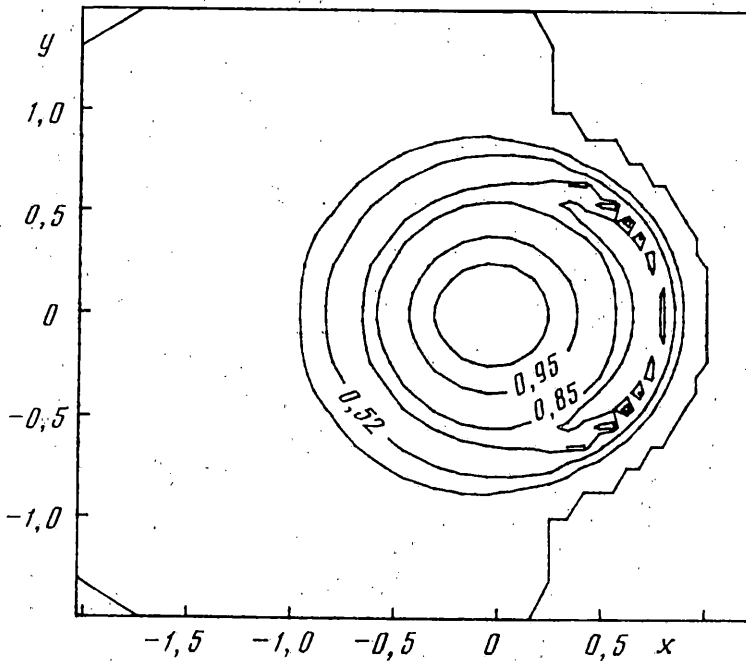
$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{[(\xi - x_{m-1/2})^2 + (\eta - y_{n-1/2})^2]^{1/2}} - \frac{1}{[\xi^2 + \eta^2]^{1/2}} \right) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \\ & \cong \sum_{j=1}^{j \max} \sum_{i=i1(j)}^{i2(j)} \left(\frac{1}{[(x_i - x_{m-1/2})^2 + (y_j - y_{n-1/2})^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x_i - x_{m0-1/2})^2 + (y_j - y_{n0-1/2})^2]^{1/2}} \right) \times \\ & \times p_k(x_i, y_j)(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $i1(j)$, $i2(j)$ – целочисленные массивы, описывающие расположение соответственно входной и выходной границ; $m = 1, \dots, i \max + 1$, $n = 1, \dots, j \max + 1$. Массив $i2(j)$ определяется, исходя из условий дополненности (1.5), на каждой итерации. Узел $(m_0 - 1/2, n_0 - 1/2)$ соответствует началу координат. На гранях расчетной ячейки в точках $(x_{i\pm 1/2}, y_j)$, $(x_i, y_{j\pm 1/2})$ значения h определялись интерполяцией.

В качестве начального приближения для итерационного метода Ньютона – Рафсона



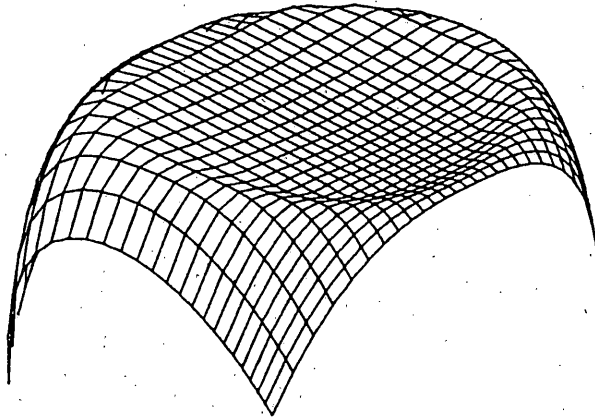
Фиг. 1



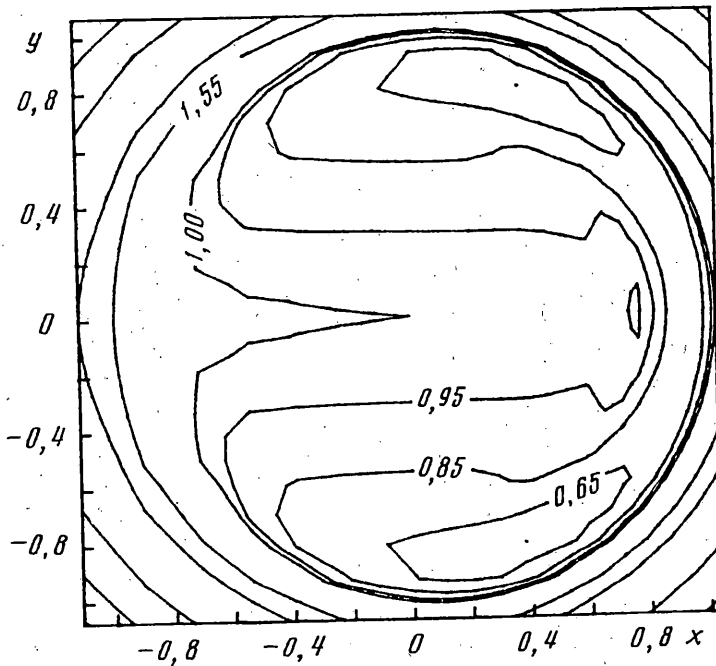
Фиг. 2

используется решение задачи Герца о контакте двух упругих тел или ранее полученное для других, но близких, исходных данных численное решение УГД задачи.

Один шаг итерационного процесса состоит в решении конечно-разностного аналога уравнений (2.2)–(2.4) относительно $\Delta H_{0,k+1}$, $\Delta p_{k+1}(x_i, y_j)$ методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента. После этого восстанавливаются значения $H_{0,k+1} = H_{0,k} + \Delta H_{0,k+1}$, $p_{k+1} = p_k + \Delta p_{k+1}$ и определяется выходная граница согласно условиям дополнителности. Затем с учетом кубатурной формулы (2.6) вычисляется $h_{k+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Подобный итерационный процесс продолжается до достижения требуемой относительной точности решения δ , т.е. $\max(|H_{0,k+1}/H_{0,k} - 1|, |p_{k+1}/p_k - 1|, |h_{k+1}/h_k - 1|, |x_{e,k+1}/x_{e,k} - 1|) < \delta$.



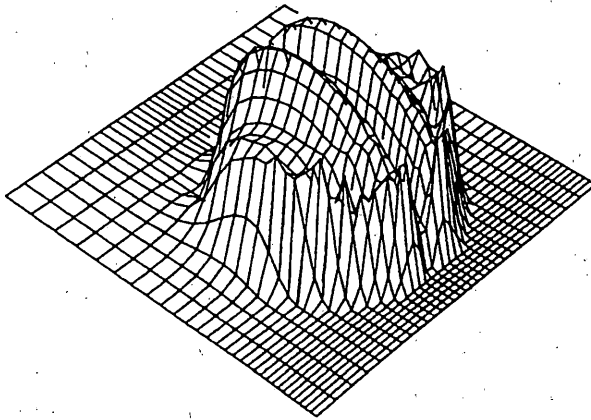
Фиг. 3



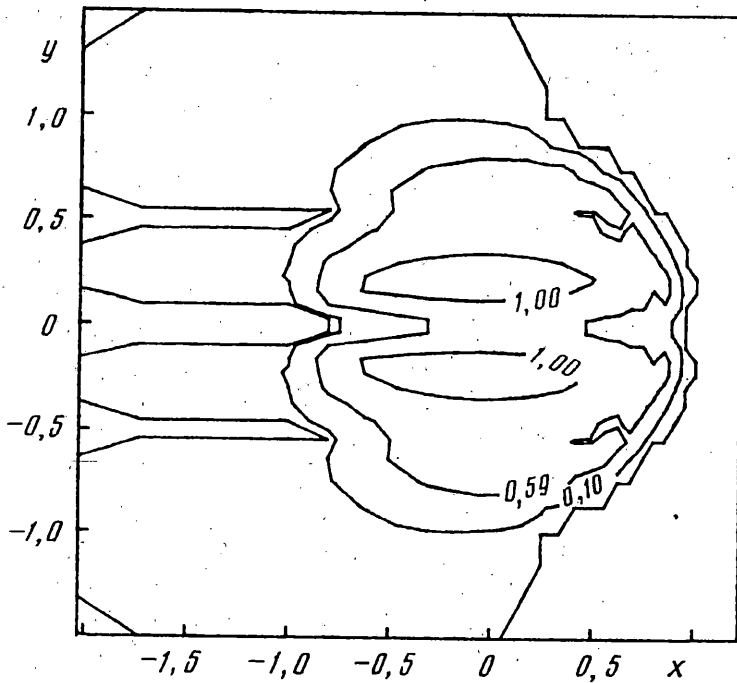
Фиг. 4

3. Примеры численных расчетов. Изложенный выше вычислительный алгоритм был применен для расчета тяжело нагруженного точечного контакта, т.е. локального контакта гладких сферических тел с равными радиусами кривизны ($\epsilon = 1$, $\beta = 1$, $D(0) = \pi/4$, $v_x = 1$, $v_y = 0$) и относительном скольжении $s_x = 0,1$, $s_y = 0$. При этом варьировалась конфигурация входной границы смазочной пленки, пьезоэлектрический коэффициент Q , параметр нагрузки V . Расчеты проводились с относительной точностью $\delta = 10^{-5}$ на сгущающейся в окрестности выходной границы сетке с числом узлов 30×30 . Представленные ниже на фиг. 1–14 расчетные данные получены для $V = 0$, 1 и $Q = 5$.

Распределения давления (фиг. 1, 2) и зазора (фиг. 3, 4) в контакте представлены для случая, соответствующего обильной смазке, в виде поверхностей и изолний. Для



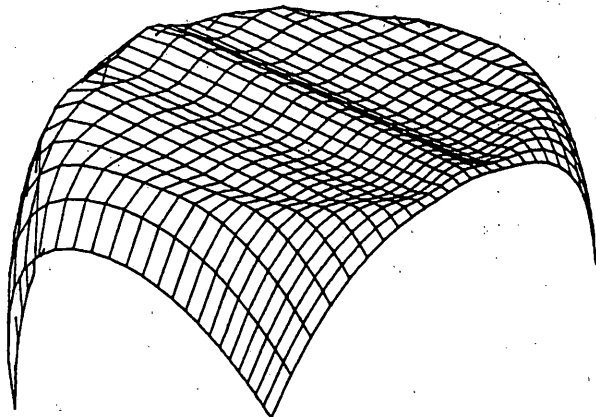
Фиг. 5



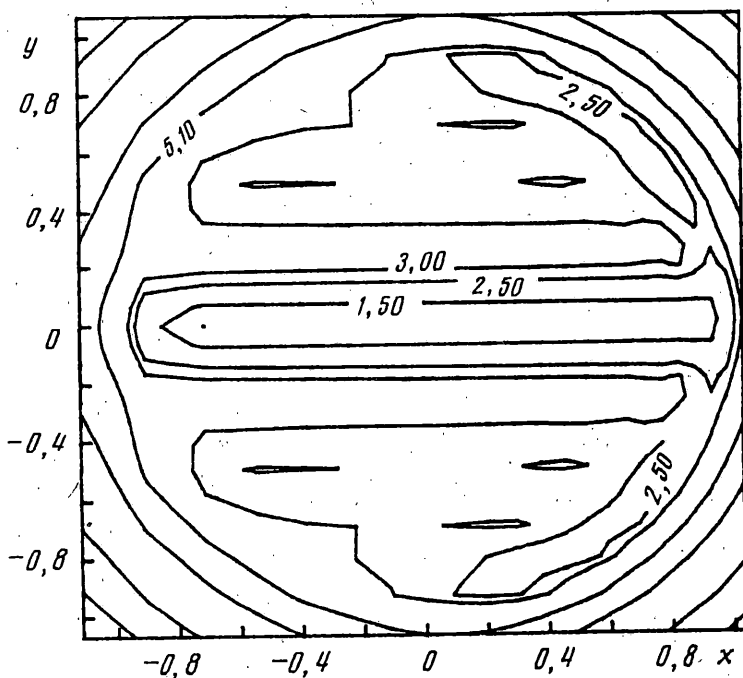
Фиг. 6

наглядности функция зазора $h(x, y)$ на фиг. 3 представлена для герцевской области видом снизу (функция $-h(x, y)$). На этих фигурах видны характерные особенности распределений $p(x, y)$ и $h(x, y)$ в пространственном тяжело нагруженном УГД контакте: «уплощение» зазора в герцевской зоне, образование «пиков» давления и соответственно уменьшение зазора в окрестности выходной границы смазочной пленки. Аналогичные распределения $p(x, y)$ и $h(x, y)$ для режимов тяжелого нагружения были получены другими методами в [1–4].

В случае, когда форма смазочной пленки на входе усложняется, например, имеет вырезы, в распределениях $p(x, y)$ и $h(x, y)$ наблюдаются новые черты. Это отчетливо видно на фиг. 5–8, где показаны распределения $p(x, y)$ (фиг. 5, 6) и $h(x, y)$ (фиг. 7, 8)



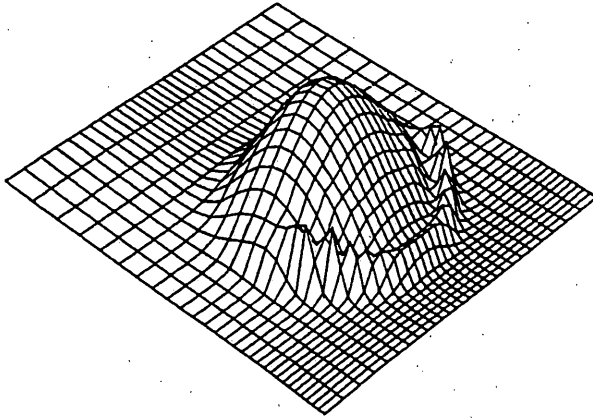
Фиг. 7



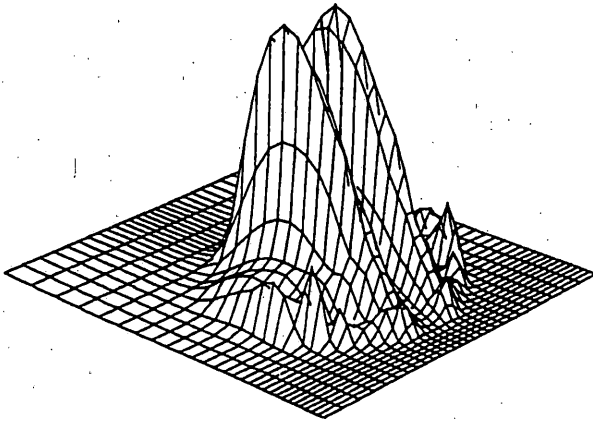
Фиг. 8

для входной границы с тремя вырезами. На этих рисунках наиболее заметно влияние центрального выреза. В распределении $p(x, y)$ образуется глубокая продольная борозда, в которой исчезает около выходной границы типичный для УГД пик давления (для сравнения см. фиг. 1, 2). Соответственно у зазора образуется «киль» в продольном направлении и отсутствует у него сужение в окрестности выхода. Влияние двух других вырезов проявляется сходным образом, но не приводит к исчезновению пиков давления и сужения зазора в окрестности выхода из контакта.

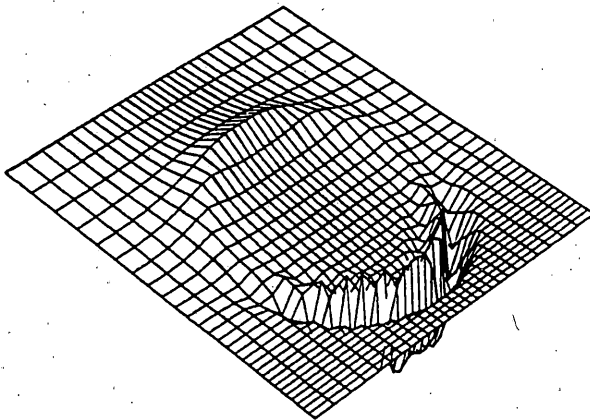
При изменении геометрии входной границы, сопровождающемся уменьшении площади смазочной пленки, заметно уменьшается значения величины H_0 : для случая обильной смазки $H_0 = 0,1786$, а при наличии трех вырезов у входной границы $H_0 = 0,04068$.



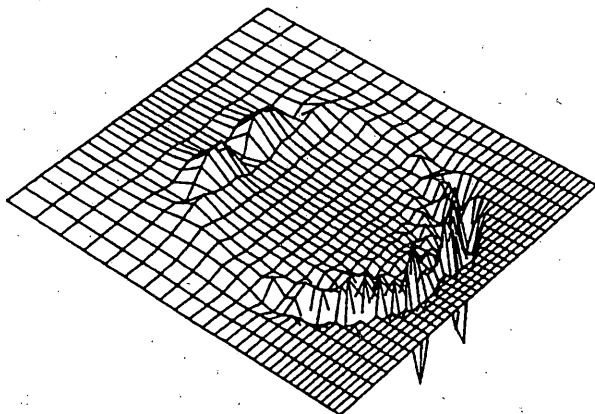
Фиг. 9



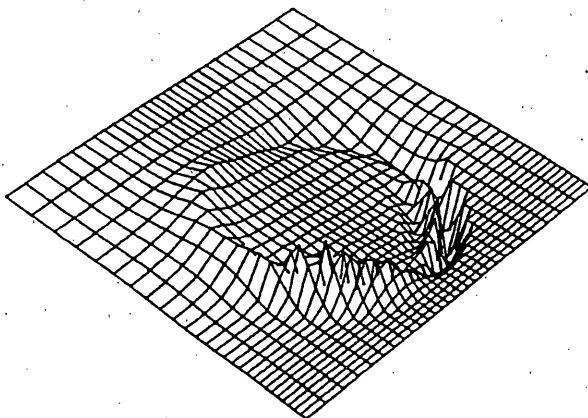
Фиг. 10



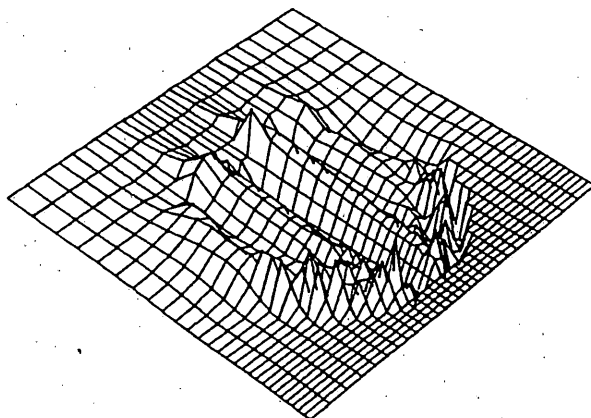
Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13



Фиг. 14

На фиг. 9–14 представлены распределения компонент напряжения трения скольжения $\tau_{sx}(x, y)$ (фиг. 9, 10) и напряжения трения качения $\tau_{rx}(x, y)$ (фиг. 11, 12), $\tau_{ry}(x, y)$ (фиг. 13, 14) для рассмотренных выше вариантов входной границы смазочной пленки. Поведение функции $\tau_{sx}(x, y)$, как видно на фиг. 9, 10, качественно повторяет поведение соответствующей функции $p(x, y)$ (фиг. 1, 5). Соответственно и поверхности функции $\tau_{sx}(x, y)$ заметно отличаются друг от друга. Причем значительно увеличилось значение $\tau_{sx}(x, y)$ в случае входной границы с вырезами (максимальное значение равно 2,662) по сравнению со случаем обильной смазки (максимальное значение равно 0,8392). Значительно более сложное поведение имеет функция $\tau_r(x, y)$, пропорциональная градиенту давления ∇p . Это показывают функции $\tau_{rx}(x, y)$ (фиг. 11, 12) и $\tau_{ry}(x, y)$ (фиг. 13, 14) для двух вариантов входной границы. На фиг. 11–14 видно, что компоненты напряжения трения качения имеют области отрицательных и положительных значений. Изменения функции $\tau_{rx}(x, y)$ наблюдаются в основном в окрестности входной и выходной границ. При обильной смазке минимальное и максимальное значения функции $\tau_{rx}(x, y)$ составляют соответственно $-0,5313$ и $0,2156$. В случае же с вырезами у входной границы эти значения соответственно равны $-0,6207$ и $0,2582$. Из сопоставления фиг. 13 и фиг. 14 следует, что наличие вырезов у входной границы значительно усложняет характер функции $\tau_{ry}(x, y)$ во всей области контакта. Однако минимальные и максимальные значения несколько меньше (равны соответственно $\pm 0,3497$), чем при обильной смазке (равны соответственно $\pm 0,3858$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Oh. K.P. The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // Trans. ASME. J. Tribol. 1984. V. 106. No. 1. P. 88–95.
2. Evans H.P., Snidle R.W. The isothermal elastohydrodynamic lubrication of spheres // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubric. Technol. 1981. V. 103. No. 4. P. 547–557.
3. Hamrock B.J., Dowson D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts. Pt 1. Theoretical formulation // Trans. ASME. Ser. F.J. Lubric. Technol. 1976. V. 98. No. 2. P. 223–229.
4. Lubrecht A.A., Ten Napel W.E., Bosma R. Multigrid, an alternative method of solution for two-dimensional elastohydrodynamically lubricated point contact calculations // Trans. ASME. J. Tribol. 1987. V. 109. No. 3. P. 437–443.
5. Kostreva M.M. Elasto-hydrodynamic lubrication: a nonlinear complementarity problem // Intern. J. Numer. Methods in Fluids. 1984. V. 4. No. 4 P. 377–397.
6. Dowson D., Higginson G.R. Elasto-hydrodynamic lubrication. N. Y.: Pergamon press, 1966. 235 P.
7. Галахов М.А., Гусятников П.Б., Новиков А.П. Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 294 с.
8. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.1995