МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 531.381

 И.Н. СИНИЦЫН

ФЛУКТУАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В НЕГАУССОВОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Рассматриваются флуктуации эйлерова движения твердого тела с неподвижной точкой в негауссовой случайной среде на основе анализа уравнений Пугачева для одномерных и конечномерных характеристических функций найдены точные и приближенные (по методу нормальной аппроксимации) одномерные и конечномерные распределения флуктуаций для различных типов сред. Установлены условия эквивалентности воздействия на тело негауссовых и гауссовых (нормальных) сред.

1. Поставим задачу нахождения одномерных и конечномерных распределений флуктуаций вектора угловой скорости тела с неподвижной точкой в негауссовой случайной среде. Задача имеет важное практическое значение в статистической динамике твердого тела для установления условий эквивалентности воздействия различных типов случайных сред, например, имеющих дробовой характер, а так же распознавания и идентификации параметров сред.

В основу рассмотрения положим следующую систему нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (понимаемых в смысле Ито):

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = -\,\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{X}, \quad \boldsymbol{\omega}(t_0) = \boldsymbol{\omega}_0 \tag{1.1}$$

где ω_j (j = 1, 2, 3) – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1\omega_2\omega_3]^T$ (T – символ транспонирования), I_j (j = 1, 2, 3) – осевые моменты инерции тела ($I_1 \leqslant I_2 \leqslant I_3$), $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$, Φ_j (j = 1, 2, 3) – коэффициенты моментов сил вязкого трения, $\boldsymbol{\Phi} = \mathrm{diag}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, $\mathbf{X} = [X_1X_2X_3]^T$, $X_j = \dot{W}_j$ (j = 1, 2, 3) – независимые негауссовые белые шумы, являющиеся слабой средней квадратической производной по времени от произвольного процесса с независимыми приращениями $W_j = W_j(t)$ вида [1]:

$$W_j = W_{0j} + \int_R c_j(u)dP^\circ(t,du) \quad (j=1,2,3) \tag{1.2}$$

Здесь $W_{0j} = W_{0j}(t)$ – скалярный винеровский процесс интенсивности $\nu_{0j} = \nu_{0j}(t)$, $c_j(u)$ – скалярная функция вспомогательного скалярного параметра u. При этом вычисленные на интервале времени Δ интегралы

$$\int_\Delta d\overset{\circ}{P_j}(t,A) = \int_\Delta dP_j(t,A) - \int_\Delta \nu_{Pj}(t,A)dt, \qquad \int_\Delta dP_j(t,A)$$

представляют собой соответственно центрированную пуассонову меру и число скачков пуассонова процесса $P_j(t, A)$ в интервале Δ, а $\nu_{Pj}(t, A)$ – является интенсивностью пуассонова процесса $P_j(t, A)$. Интеграл в (1.2) в общем случае берется по всему пространству с выколотым началом координат.

Логарифмическая производная по времени $\chi_j(\rho_j;\, t) = \partial \ln h_j(\rho_j;\, t)/\partial t$ от одномерной характеристической функции $h_j(\rho_j;\, t)$ процесса (1.2) определяется известной формулой:

$$\chi_j(\rho_j;t) = -\frac{1}{2}\rho_j^2\nu_{0j} + \int_{R_0}\left\{\exp[-i\rho_j c_j(u)] - 1 - i\rho_j c_j(u)\right\} \times \nu_{Pj}(t,u)du \tag{1.3}$$

Ограничимся рассмотрением случайных процессов W_j, обладающих свойствами устойчивости распределений [1, 2].

Распределение вектора начальной угловой скорости $\omega_0 = [\omega_{10}\omega_{20}\omega_{30}]^T$ будем считать заданным плотностью $f_0(\omega_0) = f_0(\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})$ или характеристической функцией $g(\lambda; t_0) = g_0(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Примем вектор ω_0 независящим от вектора белого шума $\mathbf{X}$ при $t \geqslant t_0$.

Для гауссовых (нормальных) белых шумов одномерные распределения флуктуационных режимов изучены в [3–10], а конечномерные – в [10, 11]. Для негауссовых белых шумов одномерные распределения получены в [12]. Распределения первых интегралов при гауссовом распределении начальной угловой скорости рассмотрены в [13], а при эллипсоидальном распределении – в [1]. Дадим развернутое разложение и развитие [12] на случай конечномерных распределений.

2. Составим уравнения для одномерной характеристической функции вектора угловой скорости. Введем обозначения

$$\mathbf{Z} = [Z_1 Z_2 Z_3]^T, \; Z_j = \omega_j \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.1}$$

$$Э(\mathbf{Z}) = [Э_1(\mathbf{Z})Э_2(\mathbf{Z})Э_3(\mathbf{Z})]^T \tag{2.2}$$

$$Э_1(\mathbf{Z}) = -e_{32}Z_3Z_2, \; e_{32} = (I_3 - I_2)I_1^{-1}$$

$$Э_2(\mathbf{Z}) = e_{31}Z_3Z_1, \; e_{31} = (I_3 - I_1)I_2^{-1}$$

$$Э_3(\mathbf{Z}) = -e_{21}Z_2Z_1, \; e_{21} = (I_2 - I_1)I_3^{-1}$$

$$\partial Э_j(\mathbf{Z})/\partial Z_j = 0, \; \mathbf{Z}^T Э(\mathbf{Z}) = 0 \tag{2.3}$$

$$2\varepsilon\mathbf{a} = 2\varepsilon \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3), \; 2\varepsilon a_j = \Phi_j \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3] \tag{2.5}$$

$$\mathbf{b}_1 = [I_1^{-1}\; 0\; 0]^T, \; \mathbf{b}_2 = [0\; I_2^{-1}\; 0]^T, \; \mathbf{b}_3 = [0\; 0\; I_3^{-1}]^T$$

$$\mathbf{W} = [W_1W_2W_3]^T \tag{2.6}$$

тогда уравнения (1.1) примут следующий вид:

$$d\mathbf{Z} = [Э(\mathbf{Z}) - 2\varepsilon\mathbf{a}\mathbf{Z}]dt + \mathbf{b}d\mathbf{W}, \; \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0 \tag{2.7}$$

Следуя [1] (см. § 5,3), запишем уравнения Пугачева для одномерной характеристической функции

$$g_1 = g_1(\lambda; t) = \operatorname{M}\exp[i\lambda^T\mathbf{Z}(t)], \; \lambda = [\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^T \tag{2.8}$$

в следующей операторной форме:

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \left\{ i\boldsymbol{\lambda}^T Э\left(\frac{\partial}{\partial i\boldsymbol{\lambda}}\right) - 2\varepsilon\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\lambda}}\right] + \sum_{j=1}^{3}\chi_j(b_j^T\boldsymbol{\lambda}; t)\right\} g_1 \tag{2.9}$$

$$g_1(\lambda; t_0) = g_0(\lambda) \tag{2.10}$$

В (2.9) одночлен $Z_1^{r_1}Z_2^{r_2}Z_3^{r_3}$ $(r_1 + r_2 + r_3 = 1, 2)$ в $Э(\mathbf{Z})$ следует заменить соответствующим оператором $(\partial / \partial i\lambda_1)^{r_1}(\partial / \partial i\lambda_2)^{r_2}(\partial / \partial i\lambda_3)^{r_3}$.

Полагая в (2.9) $\chi_j(\rho_j; t) = \chi_j(\rho_j)$, $g_1(\lambda; t) = g_1(\lambda)$ и $\partial g_1 / \partial t = 0$, придем к соответствующему уравнению для определения стационарного (в узком смысле) режима флуктуаций:

$$\left\{ i\boldsymbol{\lambda}^T Э\left(\frac{\partial}{\partial i\boldsymbol{\lambda}}\right) - 2\varepsilon\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\lambda}}\right] + \sum_{j=1}^{3}\chi_j(b_j^T\boldsymbol{\lambda})\right\} g_1 = 0 \tag{2.11}$$

Уравнения (2.9) и (2.11) представляют собой линейные однородные уравнения в частных производных второго порядка, так как наибольшая степень полиномов $Э_j(\mathbf{Z})$ равна 2. Эти уравнения положены в основу аналитических и численных методов изучения стационарных и нестационарных одномерных распределений флуктуаций в нелинейной стохастической системе (2.7) с произвольными белыми шумами.

3. Уравнения Пугачева для конечномерных характеристических функций

$$g_n = g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;\ t_1,\ldots,t_n) = \mathrm{M}\exp\left[i\sum_{l=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_l^T\mathbf{Z}(t_l)\right],\quad \boldsymbol{\mu}_l = [\lambda_{1l}\lambda_{2l}\lambda_{3l}]^T \tag{3.1}$$

совместно с начальными условиями при $t_0 \leqslant t_1 <\ldots< t_n$:

$$g_0(\boldsymbol{\lambda};t_0) = g_0(\boldsymbol{\lambda}),\quad \boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^T \tag{3.2}$$

$$g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;\ t_1,\ldots,t_{n-1},t_{n-1}) = g_{n-1}(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_{n-2}\boldsymbol{\mu}_{n-1}+\boldsymbol{\mu}_n;\ t_1,\ldots,t_{n-1}) \tag{3.3}$$

для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (2.7) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial g_n}{\partial t_n} = \left\{i\boldsymbol{\mu}_n^T Э\left(\frac{\partial}{\partial i\boldsymbol{\mu}_n}\right) - 2\varepsilon\boldsymbol{\mu}_n^T\mathbf{a}\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}_n}\right] + \sum_{j=1}^{3}\chi_j(b_j^T\boldsymbol{\mu}_n;\ t_n)\right\}g_n\ (n=2,3,\ldots)\,. \tag{3.4}$$

Для стационарного (в узком смысле) режима флуктуаций все g_n (n = 2, 3, ...), зависят от $\tau_2 = t_2 - t_1,\ldots\ \tau_{n-2} = t_{n-1} - t_n$. Поэтому при $\chi_i(\rho_i;\ t) = \chi_j(\rho_j)$ уравнения (3.3) и (3.4) принимают вид

$$g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;t_1,\ldots,t_{n-1},t_{n-1}) = g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_{n-1}+\boldsymbol{\mu}_n;\tau_1,\ldots,\tau_{n-2}) \tag{3.5}$$

$$\partial g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;t_1,\ldots,t_{n-1},t_1+\tau_{n-1})/\partial\tau_{n-1} = \left\{i\boldsymbol{\mu}_n^T Э\left(\frac{\partial}{\partial i\boldsymbol{\mu}_n}\right) - 2\varepsilon\boldsymbol{\mu}_n^T\mathbf{a}\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}_n}\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3}\chi_j(\rho_j^T\boldsymbol{\mu}_n)\right\}g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;t_1,\ldots,t_{n-1},t_{n-1}+\tau_{n-1}) \tag{3.6}$$

Из (2.9) и (3.6) видно, что уравнения как для одномерных, так и конечномерных распределений флуктуаций угловых скоростей имеют одинаковую структуру.

4. Общее решение задачи о конечномерных распределениях флуктуаций угловой скорости вследствие негауссовых начальных условий в (2.7) дается следующей формулой [1] (см. § 6.1):

$$g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;t_1,\ldots,t_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[i\sum_{l=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_l^T\psi(t_l,\boldsymbol{\zeta})\right]f_0(\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\zeta} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{Z} = \psi(t,\mathbf{Z}_0)$ – известное решение невозмущенной системы уравнений (2.7) при $\mathbf{b} = 0$ и $\varepsilon = 0$, описываемое эллиптическими функциями [14], $f_0(\boldsymbol{\zeta})$– плотность начального значения вектора угловой скорости.

Заметим, что если удается найти какие-либо первые интегралы невозмущенной системы уравнений, то распределения этих первых интегралов определяются по данному начальному распределению вектора угловой скорости методами нахождения распределений функции случайных величин [15].

Как известно [14], уравнения (2.7) при $\mathbf{b} = 0$, $\varepsilon = 0$ допускают следующие интегралы:

$$2h = 2T = \boldsymbol{\omega}_0^T\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_0,\quad \mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3) \tag{4.2}$$

$$\eta = \mathbf{G}^T\mathbf{G} = \boldsymbol{\omega}_0^T\mathbf{I}^2\boldsymbol{\omega}_0,\quad \mathbf{I}^2 = \mathrm{diag}(I_1^2, I_2^2, I_3^2) \tag{4.3}$$

$$v = \omega_G = 2h\eta^{-1/2} \tag{4.4}$$

выражающие соответственно постоянство кинетической энергии T, квадрата модуля кинетического момента $\mathbf{G} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$, ($\mathbf{I}$ – тензор инерции тела) и проекции угловой скорости на неизменное в неподвижном пространстве направление кинетического момента ω_G. Отсюда, переходя к обозначениям (2.1), (2.2) и применяя формулы нахождения распределений функций случайных величин [15], найдем следующие выражения для распределений случайных величин $h = h(z_{10}, z_{20}, z_{30})$, $\eta = \eta(z_{10}, z_{20}, z_{30})$ и $\upsilon = \upsilon(z_{10}, z_{20}, z_{30})$:

$$f_h(h) = \iint f_0(\xi^{-1}(h, z_{20}, z_{30}),\ z_{20}, z_{30}) \left|\frac{\partial \xi^{-1}}{\partial h}\right| dz_{20} dz_{30} \tag{4.5}$$

$$z_{10} = \xi^{-1}(h, z_{20}, z_{30}) = \pm\sqrt{(2h - I_2 z_{20}^2 - I_3 z_{30}^2) / I_1^{-1}}$$

$$\left|\frac{\partial \xi^{-1}}{\partial h}\right| = \frac{1}{I_1 |\xi^{-1}|}$$

$$f_\eta(\eta) = \iint f_0(\xi_1^{-1}(\eta, z_{20}, z_{30}),\ z_{20}, z_{30}) \left|\frac{\partial \xi_1^{-1}}{\partial \eta}\right| dz_{20} dz_{30} \tag{4.6}$$

$$z_{10} = \xi_1^{-1}(\eta, z_{20}, z_{30}) = \pm\frac{1}{I_1}\sqrt{\eta - I_2^2 z_{20} - I_3^2 z_{30}}$$

$$\left|\frac{\partial \xi_1^{-1}}{\partial \eta}\right| = \frac{1}{2 I_1^2 |\xi_1^{-1}|}$$

$$f_\upsilon(\upsilon) = \iint |x| f_0(\xi_{11}^{-1}(x, \upsilon x, z_{30}),\ \xi_{12}^{-1}(x, \upsilon x), z_{30}) |J(x, \upsilon x, z_{30})| dx dz_{30} \tag{4.7}$$

$$z_{10} = \xi_{11}^{-1}(x, \upsilon x, z_{30}) = \pm\sqrt{\frac{I_2 \upsilon x - x^2 + I_3(I_3 - I_2) z_{30}^2}{I_1(I_2 - I_1)}}$$

$$z_{20} = \xi_{12}^{-1}(x, \upsilon x, z_{30}) = \pm\sqrt{\frac{x^2 - I_1 \upsilon x - I_3(I_3 - I_1) z_{30}^2}{I_2(I_2 - I_1)}}$$

$$|J(x, \upsilon x, z_{30})| = \left|\frac{\partial \xi_{11}^{-1}}{\partial x}\frac{\partial \xi_{12}^{-1}}{\partial \upsilon x} - \frac{\partial \xi_{12}^{-1}}{\partial x}\frac{\partial \xi_{11}^{-1}}{\partial \upsilon x}\right| = \frac{x}{2 I_1 I_2 (I_2 - I_1) |\xi_{11}^{-1}| |\xi_{12}^{-1}|}$$

Утверждение 1. Если существует распределение вектора случайной начальной скорости и задано плотностью f_0, тогда существуют распределения интегралов (4.2)–(4.4) и они определяются формулами (4.5)–(4.7).

Совершенно аналогично устанавливаются распределения параметров эйлерова движения в интерпретациях Пуансо, Мак-Куллага, Дарбу, Сильвестра, Жуковского и др. [14].

Примеры вычисления точных распределений по формулам (4.5)–(4.7) для различных плотностей вектора начальной угловой скорости даны в [1, 15].

5. Для тела с одинаковыми моментами инерции ($I_1 = I_2 = I_3 = I_0$) уравнения (2.7) распадаются на три независимых линейных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка:

$$dZ_r = -2\varepsilon a_r Z_r dt + I_0^{-1} dW_r$$

$$Z_r(t_0) = Z_{r0} \quad (r = 1, 2, 3) \tag{5.1}$$

Поэтому общее точное решение задачи об одномерных и конечномерных распределениях флуктуаций угловой скорости на основе уравнений (2.9), (2.11), (3.4), (3.6) дается следующими формулами [1] (см. § 5.4):

$$g_{1r}(\lambda_r;t) = g_{0r}(\lambda_r \exp(-2\varepsilon a_r t))\exp\left[\int_{t_0}^{t} \chi(I_0^{-1}\lambda_r \exp(-2\varepsilon a_r(t-\tau));\tau)d\tau\right] \tag{5.2}$$

$$g_{1r}^{(\infty)}(\lambda_r) = \exp\left[\int_0^{\infty} \chi(\lambda_r \exp(-2\varepsilon a_r \tau))d\tau\right] \tag{5.3}$$

$$g_{nr}(\lambda_{r1},\dots,\lambda_{rn};t_1,\dots,t_n) = g_{0r}\left(\sum_{l=1}^{n}\lambda_{rl}\exp(-2\varepsilon a_r t_l)\right)\times$$

$$\times\exp\left[\sum_{l=1}^{n}\int_{t_{n-1}}^{t_l}\chi\left(I_0^{-1}\sum_{l=m}^{n}\lambda_{rm}\exp(-2\varepsilon a_r(t_m-\tau));\tau\right)d\tau\right] \tag{5.4}$$

$$g_{nr}^{(\infty)}(\lambda_{r1},\dots,\lambda_{rn};t_1,\dots,t_n) = \exp\left[\int_0^{\infty}\chi\left(I_0^{-1}\sum_{l=m}^{n}\lambda_{rl}\exp(-2\varepsilon a_r(t_l-t_1+\tau))\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=2}^{n}\int_0^{t_l-t_{l-1}}\chi\left(I_0^{-1}\sum_{l=m}^{n}\lambda_{rm}\exp(-2\varepsilon a_r(t_l-t_m+\tau))\right)d\tau\right]\ (r=1,2,3;\ n=2,3,\dots) \tag{5.5}$$

Утверждение 2. Для тела с одинаковыми моментами инерции в негауссовой случайной среде одномерные и конечномерные распределения флуктуаций вектора угловой скорости определяются точными формулами (5.2) и (5.4). С течением времени при полной диссипации и стационарности среды устанавливается асимптотически стационарный в узком смысле режим флуктуаций вектора угловой скорости с распределениями (5.3) и (5.5).

6. Для симметричного тела $I_1 = I_2 = I'$, $I_3 = I''$, $I'' > I'$ одномерные и конечномерные распределения проекции угловой скорости на ось симметрии, $\omega_3 = Z_3$, определяются формулами (5.2)–(5.5) при $r = 3$. Уравнения (2.7) для $r = 1, 2$ представляют собой систему двух связанных между собой линейных стохастических дифференциальных уравнений с аддитивными негауссовыми белыми шумами b_1dW_1 и b_2dW_2 и параметрическими шумами $e_{31}Z_3(t)Z_1$ и $e_{32}Z_3(t)Z_2$, где $Z_3(t)$ представляет собой профильтрованный негауссовый случайный процесс. Точное решение (2.9) и (2.11), (3.4) и (3.6) для произвольного белого шума не представляется возможным. Приближенное решение методом нормальной аппроксимации будет дано в п. 8.

7. Пусть в (1.1) осевые моменты инерции различны $I_1 < I_2 < I_3$, а среда изотропна, т.е.

$$\Phi_r = \varphi_0,\quad X_r = \dot{W}\quad (r=1,2,3) \tag{7.1}$$

где W – скалярный процесс с независимыми приращениями, определяемый формулой (1.2). Тогда вид вектора белого шума $X = [X_1X_2X_3]^T$ не меняется при переходе к любой другой системе координат той же ориентации, но отличной от главных осей инерции [10, 11]. Поэтому уравнения (1.1) для вектора кинетического момента $\mathbf{G} = \mathbf{I}\omega$ в неподвижной системе координат станут линейными стохастическими дифференциальными вида:

$$d\mathbf{G} = -\varphi_0\mathbf{G}dt + d\mathbf{W},\quad \mathbf{G}(t_0) = \mathbf{G}_0 \tag{7.2}$$

Тогда точное решение уравнений (3.4) для одномерной и конечномерной характеристических функций вектора $\mathbf{G}$:

$$\frac{\partial g_n}{\partial t_n}=\left\{-\varphi_0\boldsymbol{\mu}_n^T\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\mu}_n}\right]+\chi(\boldsymbol{\mu}_n;t_n)\right\}g_n \tag{7.3}$$

в нестационарном и стационарном режимах флуктуаций угловой скорости определяется формулами:

$$g_n(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;\ t_1,\ldots,t_n)=g_0\left(\sum_{l=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_l\exp(-\varphi_0 t_l)\right)\times$$

$$\times\exp\left[\sum_{l=1}^{n}\int_{t_{n-1}}^{t_l}\chi\left(\sum_{l=m}^{n}\boldsymbol{\mu}_m\exp(-\varphi_0(t_m-\tau));\tau\right)\right]\quad(n=1,2,\ldots) \tag{7.4}$$

$$g_n^{(\infty)}(\boldsymbol{\mu}_1,\ldots,\boldsymbol{\mu}_n;\ t_1,\ldots,t_n)=\exp\left[\int_0^{\infty}\chi\left(\sum_{m=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_m\exp(-\varphi_0(t_m-t_1+\tau))\right)d\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=2}^{n}\int_0^{t_l-t_{l-1}}\chi\left(\sum_{l=m}^{n}\boldsymbol{\mu}_m\exp(-\varphi_0(t_l-t_m+\tau))\right)d\tau\right] \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{\mu}_m=[\lambda_{1m}\lambda_{2m}\lambda_{3m}]^T\quad(m=1,\ldots,n;\quad n=1,2,\ldots)$$

где $g_0(\mu)$ – характеристическая функция $\mathbf{G}(t_0)$.

Утверждение 3. Для тела с произвольными осевыми моментами инерции в изотропной негауссовой случайной среде одномерные и конечномерные распределения флуктуаций угловой скорости тела определяются точными формулами (7.4). С течением времени при полной диссипативности и стационарности среды асимптотически устанавливается стационарный в узком смысле режим флуктуаций вектора кинетического момента с распределением (7.5).

8. В случае произвольных I_r, Φ_r и $\chi_r(\rho_r; t)$ найти точное решение уравнений (2.9), (2.11), (3.4) и (3.6) не удается. Для анализа одномерных и конечномерных распределений флуктуаций вектора угловой скорости в общем случае можно использовать известные эффективные и достаточно универсальные приближенные методы, основанные на параметризации распределений (см. например, [1, 16]). Эффективным методом анализа (при известных ограничениях на характер медленных движений) является метод усреднения (см., например, [16]).

9. Рассмотрим решение уравнений (2.9), (2.11), (3.4) и (3.6) методом нормальной аппроксимации [1] (см. § 6.3). Аппроксимируя одномерное распределение $\mathbf{Z}$ нормальным будем иметь

$$g_1(\boldsymbol{\lambda};t)=\exp(i\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{m}-1/2\boldsymbol{\lambda}^T K\boldsymbol{\lambda},),\qquad \boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]^T \tag{9.1}$$

Здесь $\mathbf{m}=[m_1m_2m_3]^T$ и $\mathbf{K}=[K_{rl}]$ (r, l = 1, 2, 3) представляют собой неизвестные математическое ожидание и ковариационную матрицу, определяемые путем решения следующей нелинейной детерминированной системы из уравнений для математических ожиданий

$$\dot{\mathbf{m}}=-2\varepsilon\mathbf{a}\mathbf{m}+\mathbf{B}_0(\mathbf{m},\mathbf{K}),\qquad \mathbf{m}(t_0)=\mathbf{m}_0 \tag{9.2}$$

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{m},\mathbf{K})=\partial Э_0(\mathbf{m},\mathbf{K})/\partial\mathbf{m}$$

$$Э_0(\mathbf{m},\mathbf{K})=\mathrm{M}_N Э(\mathbf{Z})=\begin{bmatrix}-e_{32}(m_3m_2+K_{32})\\ e_{31}(m_3m_1+K_{31})\\ -e_{21}(m_2m_1+K_{21})\end{bmatrix} \tag{9.3}$$

и для ковариационной матрицы

$$\dot{\mathbf{K}}^\circ = \mathbf{a}^\circ \mathbf{K} + \mathbf{K}\mathbf{a}^{\circ T} + \boldsymbol{\nu}^\circ, \quad \mathbf{K} = (t_0) = \mathbf{K}_0 \tag{9.4}$$

$$\mathbf{a}^\circ = -2\varepsilon\mathbf{a} + [(\partial/\partial\mathbf{m})\mathbf{B}_0(\mathbf{m}, \mathbf{K})^T]^T \tag{9.5}$$

$$\boldsymbol{\nu}^\circ = \mathbf{I}^{-1}\nu(\mathbf{I}^{-1})^T, \ \nu = \operatorname{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$$

$$\nu_r = \nu_{0r} + \int_R c_r(u)^2 \nu_{\Pr}(t, du) \quad (r = 1,2,3) \tag{9.6}$$

где ν_r – интенсивность негауссова шума X_r, $r = 1, 2, 3$.

Полагая в (9.2) и (9.4) $\dot{m} = 0$, $\dot{K} = 0$, найдем выражения для математических ожиданий и ковариаций режима стационарных флуктуаций угловых скоростей

$$m_r^{(\infty)} = 0, \quad K_{rl}^{(\infty)} = 0 \ \ (r \neq l), \quad K_{rr}^{(\infty)} = \nu_r / (2\Phi_r I_r^2) \tag{9.7}$$

Таким образом, в стационарном режиме флуктуации угловых скоростей тела вокруг главных осей инерции тела не коррелированы между собой, а их дисперсии зависят только от отношения интенсивностей шумов и удельных коэффициентов вязкого трения. Формулы (9.5) совпадают с точными решениями для дисперсии в случаях, рассмотренных в пп. 5–7.

Условием существования стационарного (в широком смысле) режима флуктуаций в гауссовом (нормальном) приближении будет условие асимптотической устойчивости матрицы (9.5).

Совершенно так же находятся нормальные аппроксимации всех остальных конечномерных распределений $n = 2$, 3, ... Так как нормальное распределение полностью определяется моментами первого и второго порядков, а последние определяются двумерным распределением, то достаточно найти нормальную аппроксимацию двумерной характеристической функции

$$g_2(\mu_1, \mu_2; t_1, t_2) = \exp[i\mu^T\mathbf{m}_2 - 1/2\mu^T\mathbf{K}_2\mu] \tag{9.8}$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_1^T \boldsymbol{\mu}_2^T]^T, \quad \mathbf{m}_2 = [\mathbf{m}(t_1)^T \, \mathbf{m}(t_2)]^T$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{K}(t_1, t_1) & \mathbf{K}(t_1, t_2) \\ \mathbf{K}(t_2, t_1) & \mathbf{K}(t_2 t_2) \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{m}(t_l) = [m_{1l} m_{2l} \mathrm{m}_{3l}]T \quad (l = 1, 2)$$

$$\mathbf{K}(t_l, t_j) = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{11}(t_l, t_j) & \mathbf{K}_{12}(t_l, t_j) \\ \mathbf{K}_{21}(t_l, t_j) & \mathbf{K}_{22}(t_l, t_j) \end{vmatrix}$$

Для этого в свою очередь достаточно найти ковариационную функцию $\mathbf{K}(t_1, t_2) = [K_{rl}(t_1, t_2)]$ $(r, l = 1, 2, 3)$ путем решения следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{K}(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \mathbf{K}(t_1, t_2)\mathbf{B}_2(\mathbf{m}(t_2), \mathbf{K}(t_2)) \tag{9.9}$$

при любом фиксированном t_1 как функцию t_2 при начальном условии

$$\mathbf{K}(t_1, t_2) = \mathbf{K}(t_1), \ \mathbf{B}_2(\mathbf{m}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}_1(\mathbf{m}, \mathbf{K})\mathbf{K} \tag{9.10}$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{m}, \mathbf{K}) = \{-2\varepsilon\mathbf{a} + [(\partial/\partial\mathbf{m})\mathbf{B}_0(\mathbf{m}, \mathbf{K})^T]^T\} \tag{9.11}$$

где функция $\mathbf{B}_0(\mathbf{m}, \mathbf{K})$ определена (9.3).

Для стационарных флуктуаций $\mathbf{K}(t_1, t_2) = \mathbf{k}(\tau)$, $\tau = t_2 - t_1$, уравнения (9.9), (9.10) принимают вид

$$d\mathbf{k}(\tau) / d\tau = \mathbf{B}_1(\mathbf{m}, \mathbf{K})\mathbf{k}(\tau) \tag{9.12}$$

$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{K} \tag{9.13}$$

При $\tau < 0$ следует принять $\mathbf{k}(\tau) = \mathbf{k}(-\tau)^T$.

Часто вместо $\mathbf{k}(\tau)$ используют спектральную плотность $\mathbf{s}(\Omega)$, являющуюся ее Фурье преобразованием:

$$\mathbf{s}(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{k}(\tau)\exp(-i\Omega\tau)d\tau \tag{9.14}$$

В этом случае, следуя [1], для определения $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{K}$ имеем уравнения

$$-2\varepsilon\mathbf{am} + \mathbf{B}_0(\mathbf{m}, \mathbf{K}) = 0 \tag{9.15}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{\Lambda}(i\Omega)\boldsymbol{\nu}^\circ\mathbf{\Lambda}(i\Omega)^* d\Omega \tag{9.16}$$

$$\nu^\circ = \mathbf{I}^{-1}\nu(\mathbf{I}^{-1})^T,\ \ \mathbf{a}^\circ = -2\varepsilon\mathbf{a} + [(\partial/\partial\mathbf{m})\mathbf{B}_0(\mathbf{m}, \mathbf{K})^T]^T$$

$$\Lambda(i\Omega) = \frac{1}{\mathbf{a}^\circ(\mathbf{m},\mathbf{K}) - i\Omega\mathbf{E}_3}, \quad \mathbf{E}_3 = \mathrm{diag}(1,1,1)$$

Утверждение 4. Для тела с произвольными моментами инерции в неизотропной негауссовой случайной среде одномерные и конечномерные флуктуации угловой скорости тела в гауссовом (нормальном) приближении определяются формулами (9.1)–(9.3) и (9.8), (9.12), (9.13) (или (9.15), (9.16)).

Отметим, что уравнения (9.2), (9.4) и (9.9), (9.12) позволяют изучить также вырожденные случаи, когда диссипация и случайные шумы вокруг некоторых осей отсутствует. В этих случаях, имеют место флуктуационные дрейфы, сопровождающиеся ростом дисперсий и ковариаций со временем [6].

Для стационарных флуктуаций условия дисперсионной эквивалентности воздействия на тело негауссовых шумов X_r ($r = 1, 2, 3$) интенсивности ν_r и гауссовых (нормальных) шумов интенсивности ν_r^N устанавливаются формулами (9.6). В частности, если шумы X_r представляют собой сумму гауссового шума интенсивности ν_{0r} и общего пуассоновского процесса с дисперсией скачков D_r' и интенсивностью скачков ν_r', то из (9.6) находим следующее условие эквивалентности:

$$\nu_r^N = \nu_{0r} + D_r'\nu_r' \quad (r = 1,2,3) \tag{9.17}$$

Для нестационарных флуктуаций условия эквивалентности устанавливаются численно на основе эквивалентности решений уравнений (9.2) и (9.4) для дисперсий и отношения сигнал-шум $\zeta_r = m_r / \sqrt{D_r}$. Для установления корреляционной (или спектральной) эквивалентности используются решения уравнений (9.9) (или (9.12), (9.15), (9.16)) для ковариационных функций (или спектральных плотностей) [18].

Замечания. 1. Аналогично п. 4 находятся плотности распределения интегралов (4.2)–(4.4) в силу уравнений (2.7) и соответствующие условия эквивалентности.

2. Полученные в пп. 2–9 результаты могут быть использованы для приближенных расчетов флуктуаций для случая широкополосного негауссового шума, а также для автокоррелированного ("окрашенного") шума, описываемого линейными или нелинейным уравнением формирующего фильтра [1].

3. Для приближенного (по методу нормальной аппроксимации) определения одномерных и конечномерных распределений угловых параметров движения, например, направляющих косинусов углов или углов Эйлера или Крылова [19], к уравнениям (1.1) следует добавить кинематические уравнения Пуассона или Эйлера и применить метод к расширенному вектору состояния. При этом для численных экспериментов может быть использовано разработанное в ИПИ РАН программное обеспечение: ППП "СтС-анализ", "СтС-фильтр" и библиотеки программ "NALIB" и "TRANSTATLIB" [9, 10, 17].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N95-01-00426).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. М.: Наука, 632 с.
2. *Золотарев В.М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.
3. *Крутков Ю.А.* Об одном частном случае броуновского вращательного движения // Докл. АН СССР. 1934. Т. 3. № 3. С. 153-159.
4. *Крутков Ю.А.* Броуновское вращательное движение частицы с осью симметрии // Докл. АН СССР. 1935. Т. 1. № 6. С. 366–371.
5. *Яглом А.М.* О статистической обратимости броуновского движения // Мат. сб. 1949. Т. 24. Вып. 3 С. 457–492.
6. *Синицын И.Н.* О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 23–31.
7. *Moshchuk N.K., Sinitsyn I.N.* On stationary distributions in nonlinear stochastic differential systems // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1991. V. 44. Pt. 4. P. 571–579.
8. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* О стационарных и приводимых к стационарным режимах в нормальных стохастических дифференциальных системах // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 895–903.
9. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* Стационарные флуктуации тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случайной среде // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1337–1339.
10. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* О флуктуациях в случайной среде тела с неподвижной точкой // Изв. АН. МТТ. 1993. № 1. С. 39–44.
11. *Синицын И.Н.* Конечномерные распределения с инвариантной мерой в стохастических механических системах // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 3. С. 308–310.
12. *Синицын И.Н.* Стационарные флуктуации твердого тела с неподвижной точкой в негуассовой случайной среде // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 3. С. 1–4.
13. *Красовский А.А.* Фазовое пространство и статистичесая теория динамических систем. М.: Наука, 1974. 232 с.
14. *Суслов Т.К.* Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
15. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979. 496 с.
16. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
17. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические системы. Теория и программное обеспечение // Юбилейный сб. тр. институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации. М., 1993. Т. 1. С. 75–93.
18. *Синицын И.Н.* Методы статистической линеаризации (Обзор) // Автоматика и телемеханика. 1974. № 5. С. 82–94.
19. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.V.1995