МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. М.В. БЕЛУБЕКЯН, И.А. ЕНГИБАРЯН

ВОЛНЫ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ВДОЛЬ СВОБОДНОЙ КРОМКИ ПЛАСТИНКИ С КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассматривается тонкая пластинка постоянной толщины, изготовленная из анизотропного материала, обладающего свойствами кристаллов кубической симметрии. Плоскости, ограничивающие пластинку не совпадают с плоскостями симметрии кубической анизотропии. Исследуются локализованные изгибные волны и волны типа Рэлея, распространяющиеся вдоль свободной кромки пластинки. Получены условия существования указанных волн. Изучено влияние анизотропии.

1. Пусть прямоугольная в плане пластинка в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z занимает область $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $-h \leqslant z \leqslant h$.

Материал пластинки изготовлен из кристаллов обладающих свойствами кубической симметрии. Плоскость yoz совпадает с одной из плоскостей симметрии кристаллов, плоскости xoy и xoz составляют угол φ с двумя другими плоскостями симметрии. В этом случае закон Гука записывается в виде [1]:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{11}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\\
&\sigma_{22} = c_{11}\varepsilon_{22} + c_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) + \tfrac{1}{2}(1-\eta)(c_{11} - c_{12})[(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22})\sin^2 2\varphi + \varepsilon_{23}\sin 4\varphi]\\
&\sigma_{33} = c_{11}\varepsilon_{33} + c_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \tfrac{1}{2}(1-\eta)(c_{11} - c_{12})[(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{22})\sin^2 2\varphi + \varepsilon_{23}\sin 4\varphi]\\
&\sigma_{12} = 2c_{44}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = 2c_{44}\varepsilon_{13}\\
&\sigma_{23} = 2c_{44}\varepsilon_{23} + (1-\eta)(c_{11} - c_{12})\left[\frac{(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})}{4}\sin 4\varphi + \varepsilon_{23}\sin^2 2\varphi\right]
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\eta = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$ – фактор анизотропии и для изотропного материала равен единице.

Согласно (1.1) обратная связь между деформациями и напряжениями получается в виде

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}[\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})]\\
&\varepsilon_{22} = \frac{1}{(1-\chi)E}\left[-(1-\chi)\nu\sigma_{11} + \left(1 - \frac{1-\nu}{2}\chi\right)\sigma_{22} - \left(\nu + \frac{1-\nu}{2}\chi\right)\sigma_{33} + (1+\nu)\chi_1\sigma_{23}\right]\\
&\varepsilon_{33} = \frac{1}{(1-\chi)E}\left[-(1-\chi)\nu\sigma_{11} - \left(\nu + \frac{1-\nu}{2}\chi\right)\sigma_{22} + \left(\nu - \frac{1-\nu}{2}\chi\right)\sigma_{33} - (1+\nu)\chi_1\sigma_{23}\right]\\
&E = \frac{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})}{c_{11} + c_{12}}, \quad \nu = \frac{c_{12}}{c_{11} + c_{12}}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\chi = (1-\eta)\sin^2 2\varphi\left[1 + 2\frac{1-\eta}{\eta}\cos^2 2\varphi\left(1 + \frac{1-\eta}{2\eta}\sin^2 2\varphi\right)^{-1}\right] \tag{1.3}$$

$$\chi_1 = \frac{1-\eta}{2\eta}\sin 4\varphi\left(1+\frac{1-\eta}{2\eta}\sin^2 2\varphi\right)^{-1}$$

Приведем также выражения для остальных компонент тензора деформаций

$$\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E\eta}\sigma_{12},\quad \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E\eta}\sigma_{13}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{(1-\chi)E}\left(1+\frac{1-\eta}{2\eta}\sin^2 2\varphi\right)^{-1}\left[\left(1-\chi+\frac{1-\eta}{\eta}\chi_1\right)\sigma_{23}-\frac{1-\eta}{2\eta}(\sigma_{33}-\sigma_{22})\right]$$

2. Принимая гипотезу Кирхгофа и используя (1.2), получим выражения для основных напряжений в пластинке

$$\sigma_{11} = E_1\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}-z\left(\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{22} = E_1\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] \tag{2.1}$$

$$\sigma_{12} = \frac{\eta E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

где u, v, w – перемещения срединной поверхности пластинки

$$E_1 = \frac{(1-\chi)E}{1+\nu}\left(1-\nu-\frac{1-2\nu}{2}\chi\right)^{-1},\quad \alpha=(1-\chi)^{-1}\left(1-\frac{1-\nu}{2}\chi\right) \tag{2.2}$$

Усилия и моменты выражаются через перемещения срединной поверхности следующим образом:

$$T_1 = 2hE_1\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad T_2 = 2hE_1\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$M_1 = -D\left(\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{w}{\partial y^2}\right),\quad M_2 = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$S = \frac{\eta Eh}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad H = -\frac{2\eta Eh^3}{3(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$N_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(\nu+\eta\alpha_1)\frac{w}{\partial y^2}\right),\quad N_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(\nu+\eta\alpha_1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{2.3}$$

$$D = \frac{2E_1h^3}{3},\quad \alpha_1 = (1-\chi)^{-1}\left(1-\nu-\frac{1-2\nu}{2}\chi\right) \tag{2.4}$$

При допущениях гипотезы Кирхгофа, как и в случае изотропной пластинки, задачи обобщенного плоского напряженного состояния и изгиба пластинки отделяются. Уравнения колебаний для обобщенного плоского напряженного состояния в перемещениях имеют вид

$$c_2^2\Delta u+(\alpha c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\nu c_1^2+c_2^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$c_2^2\Delta v+(c_1^2-c_2^2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(\nu c_1^2+c_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

$$c_1^2=E_1/\rho,\ \ c_2^2=\eta E/[2(1+\nu)\rho] \tag{2.6}$$

Изгибные колебания пластинки определяются следующим уравнением

$$D\left[\alpha\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(\nu+\eta\alpha_1)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{2.7}$$

3. Рассмотрим изгибные волны локализованные вдоль кромки полубесконечной пластинки. Пусть пластинка занимает область $-\infty<x<\infty$, $0\leqslant y<\infty$, $-h\leqslant z\leqslant h$. Решение, удовлетворяющее уравнению (2.7) и условию затухания при $y\to\infty$ имеет вид

$$W=(A_1e^{-k\Gamma_1 y}+A_2e^{-k\Gamma_2 y})\exp i(\omega t-kx) \tag{3.1}$$

$$\Gamma_{1,2}=\left\{\nu+\eta\alpha_1\pm\left[(\nu+\eta\alpha_1)^2-\alpha(1-P^2)\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \tag{3.2}$$

$$P^2=2\rho h\omega^2/(\alpha Dk^4)\ \ (0<P^2<1) \tag{3.3}$$

В случае, когда край пластинки свободен, имеем

$$M_2=0,\ \ \overline{N}_2=N_2+\partial H/\partial x=0\ \ \text{при}\ y=0 \tag{3.4}$$

подстановка (3.1) в (3.4) и условие существования нетривиального решения относительно A_1 и A_2 приводят к следующему характеристическому уравнению:

$$\begin{gathered}\Gamma_2[\Gamma_2^2\Gamma_1-(\nu+2\eta\alpha_1)\Gamma_1^2-\nu\Gamma_2^2+\nu(\nu+2\eta\alpha_1)]-\\-\Gamma_1[\Gamma_1^2\Gamma_2-\nu\Gamma_1^2-(\nu+2\eta\alpha_1)\Gamma_2^2+\nu(\nu+2\eta\alpha_1)]=0\end{gathered} \tag{3.5}$$

Группировка соответствующих членов в (3.5) дает

$$(\Gamma_2-\Gamma_1)(\Gamma_1^2\Gamma_2^2+2\eta\alpha_1\Gamma_1\Gamma_2-\nu^2)=0$$

Отсюда, так как $\Gamma_2\neq\Gamma_1$ с учетом (3.2) получается уравнение относительно параметра p^2 характеризующего фазовую скорость изгибной волны, локализованной вдоль кромки $y=0$:

$$K(P)\equiv\alpha(1-P^2)+2\eta\alpha_1\sqrt{\alpha(1-P^2)}-\nu^2=0 \tag{3.6}$$

из которого, в частности, для изотропной пластинки получается результат, совпадающий с результатом статьи [2]. Уравнение вида (3.6) получено также в [3]. Нетрудно показать, что уравнение (3.6) всегда имеет решение при произвольных значениях параметров α, α_1, η, ν удовлетворяющее условию затухания $p^2<1$.

Можно показать, что когда край $y=0$ закреплен, либо свободно оперт, либо имеют место условия скользящего контакта, локализованная волна не существует.

Аналогично для волны, локализованной вдоль свободного края $x=0$ полубесконечной пластинки $0\leqslant x<\infty$, $-\infty<y<\infty$ фазовая скорость волны определяется из уравнения

$$K(P)\equiv\alpha(1-\alpha P^2)+2\eta\alpha_1\sqrt{\alpha(1-\alpha P^2)}-\nu^2=0 \tag{3.7}$$

при условии $0<p^2<\alpha^{-1}$.

4. Рассмотрим волны типа Рэлея локализованные вдоль края $y=0$ полубесконечной пластинки на основе уравнений обобщенного плоского напряженного состояния (2.5).

Представление решения системы (2.5) в виде

$$u = Ae^{-kqy} \exp i(\omega t - kx)$$
$$v = Be^{-kqy} \exp i(\omega t - kx) \tag{4.1}$$

приводит к следующему характеристическому уравнению относительно q:

$$q^4 - [(\alpha - \theta\xi) + (1-\xi) + (\alpha - 1)(1+\nu)(1-\nu)^{-1}]q^2 + (\alpha - \theta\xi)(1-\xi) = 0 \tag{4.2}$$

$$\xi = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}, \quad \theta = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{\eta}{2}(1-\chi)^{-1}\left(1 - \nu - \frac{1-2\nu}{2}\chi\right)$$

Отсюда следует, что условия затухания решений (4.1) следующие:

$$0 < \xi < 1 \qquad \text{при } \alpha \geqslant \theta$$
$$0 < \xi < \alpha\theta^{-1} \qquad \text{при } 0 < \alpha < \theta \tag{4.3}$$

Решение уравнений (2.5) соответствующее условиям затухания имеет вид

$$u = (A_1 e^{-kq_1 y} + A_2 e^{-kq_2 y}) \exp i(\omega t - kx)$$
$$v = (B_1 e^{-kq_1 y} + B_2 e^{-kq_2 y}) \exp i(\omega t - kx) \tag{4.4}$$

$$q_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{[(\alpha - \theta\xi) + (1-\xi) + (\alpha-1)(1+\nu)(1-\nu)^{-1}] \pm$$
$$\pm\sqrt{[(\alpha-\theta\xi) + (1-\xi) + (\alpha-1)(1+\nu)(1-\nu)^{-1}]^2 - 4(\alpha-\theta\xi)(1-\xi)}\Big\}^{1/2} \tag{4.5}$$

$$B_i = -i(\nu + \theta)q_i[q_i^2 - \theta(1-\xi)]^{-1} A_i$$

Пусть край $y = 0$ свободен $T_2 = 0$, $S = 0$, что соответствует граничным условиям

$$\partial v / \partial y + \nu \partial u / \partial x = 0, \quad \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = 0 \tag{4.6}$$

Подстановка (4.4) в (4.6) приводит к однородным уравнениям относительно двух независимых произвольных постоянных A_1 и A_2. Приравнивание нулю детерминанта системы указанных уравнений, после ряда преобразований, приводит к следующему уравнению относительно безразмерной характеристики скорости поверхностной волны ξ:

$$R_1(\xi) \equiv \xi - \theta_1(\alpha - \alpha_0)\frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{\alpha - \theta\xi} + \sqrt{1-\xi}} = 0 \tag{4.7}$$

$$\alpha_0 = \frac{1-\nu+\nu^2}{2-\nu}, \quad \theta_1 = \frac{(2-\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)(\nu+\theta)} > 0$$

Уравнение (4.7) в случае изотропной пластинки $\eta = 1$ приводится к одной из форм классического уравнения Рэлея [4]. Замечая, что

$$R_1(0) = -\frac{\theta_1(\alpha - \alpha_0)}{\sqrt{\alpha} + 1}, \quad R_1(1) = 1, \quad R_1\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = \frac{\alpha}{\theta} - \theta_1(\alpha - \alpha_0) \tag{4.8}$$

согласно (4.3) получаем условия существования поверхностной волны действительного корня уравнения (4.7) удовлетворяющего условию затухания (4.3). В случае $\alpha \geqslant \theta$

Таблица 1

	η	ν	χ (0)	$\chi(\pi/8)$	$\chi(\pi/6)$	$\chi(\pi/4)$
Натрий	7	0,45	0	0,27	–1,66	–6
Медь	3,2	0,44	0	–0,187	–1,268	–2,2
Алюминий	1,22	0,362	0	–0,09	–0,15	–0,22
	0,508	0,19	0	0,44	0,5	0,492
	0,375	0,135	0	0,68	0,7	0,625
Силикон	1,56	0,293	0	–0,17	–0,33	–0,56

Таблица 2

	α_0	α (0)	θ (0)	$\alpha(\pi/8)$	$\theta(\pi/8)$	$\alpha(\pi/6)$	$\theta(\pi/6)$	$\alpha(\pi/4)$	$\theta(\pi/4)$
Натрий	0,485	1	1,92	1,27	2,57	0,55	0,83	0,38	0,42
Медь	0,483	1	0,89	0,87	0,77	0,6	0,45	0,51	0,35
Алюминий	0,47	1	0,39	0,94	0,36	0,91	0,34	0,82	0,33
	0,467	1	0,2	1,47	0,3	1,6	0,33	1,57	0,329
	0,474	1	0,16	2,2	0,36	2,3	0,38	1,94	0,32
Силикон	0,464	1	0,55	0,91	0,49	0,83	0,45	0,77	0,41

условием существования будет $\alpha > \alpha_0$. В случае $\alpha < \theta$ имеем

$$\begin{array}{ll} \alpha > \alpha_0 & \alpha\theta^{-1} - \theta_1(\alpha-\alpha_0) < 0 \\ \alpha < \alpha_0 & \alpha\theta^{-1} - \theta_1(\alpha-\alpha_0) > 0 \end{array} \qquad (4.9)$$

В табл. 1 приведенные значения η и ν даются из работы [5] для всех материалов кроме силикона. Для силикона использованы данные статьи [6]. Значения χ для углов $\varphi = 0$, $\pi/8$, $\pi/6$, $\pi/4$ вычислены по формуле (1.3).

В табл. 2 приведены значения α_0 и α, θ для тех же значений угла φ. Из табл. 2 видно, что для всех материалов, кроме натрия, и для всех углов выполняются условия существования локализованной волны $\alpha \geqslant \theta$ и $\alpha > \alpha_0$. Для натрия выполняются условия (4.9), причем для $\varphi = 0$, $\pi/8$, $\pi/6$ – первое условие, а для $\varphi = \pi/4$ – второе условие.

Работа выполнена по контракту с фирмой «Анушик».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
2. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне "рэлеевского" типа // Акуст. ж. 1960. Т. 6. Вып. 1. С. 124–126.
3. *Белубекян В.М., Белубекян М.В.* Об изгибной волне, локализованной вдоль кромки токонесущей пластинки // Тез. докл. 2-го совещания-семинара Инженерно-физические проблемы новой техники. М.: Изд., МГТУ. 1992. С. 58–59.
4. *Белубекян М.В.* Об условии существования волны Стоунли при скользящем контакте // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т. 43. № 4. С. 52–56.
5. *Фарнелл Дж.* Типы и свойства поверхностных акустических волн. Поверхностные акустические волны / Под ред. А. Олинер. М.: Мир, 1981. С. 26–81.
6. *Ferrari M., Lin Ch-L.* Extensional behavior of multi-crystalline beams: Report No. UCB/SEMM-92/20. 1992. Dept. of Civil Engineering Univ. California, Berkeley. 11p.

Ереван

Поступила в редакцию
8.VI.1995