

УДК 539.3

© 1996 г. А.Ю. КОПНИН, Л.Ю. КОССОВИЧ, С.А. ПЕТРОКОВСКИЙ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ УДАРНЫХ КРАЕВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

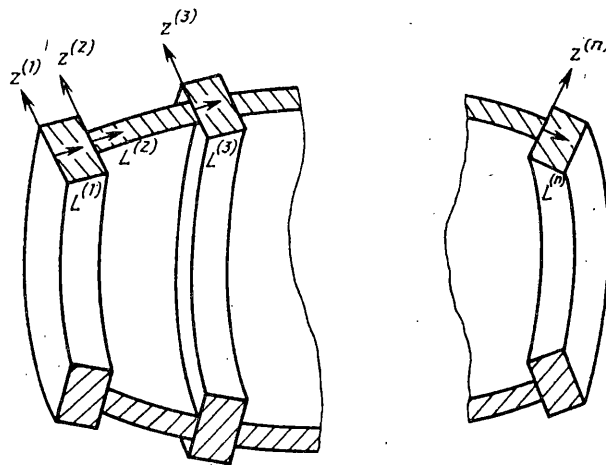
Асимптотические методы, разработанные в [1] для исследования нестационарного напряженно-деформированного состояния (НДС) однородных оболочек вращения, применяются к анализу и решению задач о нестационарном изгибном волновом процессе в подкрепленных оболочках вращения. Решение ищется в виде наложения волн, инициируемых границами элементов конструкции. Каждая волна определяется с помощью моментной составляющей Кирхгофа – Лява, динамического плоского антисимметричного погранслоя, квазистатического погранслоя типа Сен-Венана. Поставлены краевые задачи для двумерной составляющей и погранслоев. Выявлен характер влияния квазистатического погранслоя на НДС колец.

На примере подкрепленных цилиндрических оболочек установлены аналитические оценки, характеризующие влияние процесса распространения волн в шпангоутах на распространение волн в оболочках.

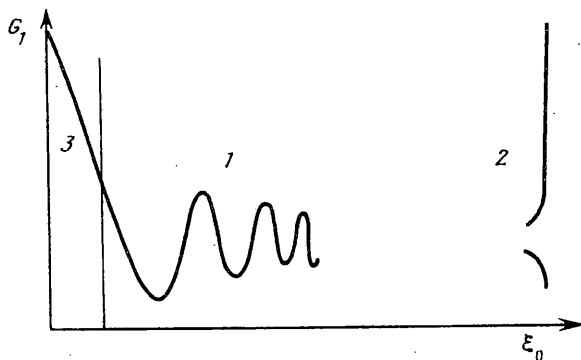
1. Постановка задачи. Рассматривается задача распространения изгибных волн в осесимметричной оболочечной конструкции с произвольной образующей, подкрепленной системой колец. Подобные конструкции широко применяются в ракетно-космической технике. Одним из источников ударной волны является подрыв кольцевых пирозарядов.

Изучение процесса распространения волн в подкрепленных оболочках на базе точной постановки задачи в рамках трехмерной теории упругости требует детального описания условия их подкрепления. Будем рассматривать класс конструкций, схематическое изображение которых в разрезе представлено на фиг. 1. Считаем, что подкрепление оболочек шпангоутами является центральным: срединные поверхности оболочек и шпангоутов (колец) составляют непрерывную поверхность. Предполагаем, что срединная поверхность конструкции не имеет изломов (т.е. непрерывна не только функция B , представляющая расстояние от срединной поверхности до оси вращения, но и ее производная по координате вдоль образующей).

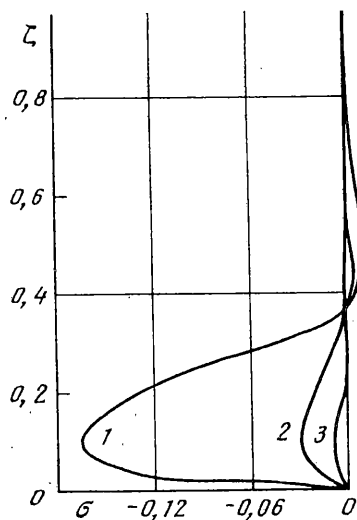
Пусть в начальный момент времени к торцу конструкции, находящейся в состоянии покоя, прикладывается ударное продольное воздействие изгибающего типа (зависимость нагрузки от времени представляется функцией Хевисайда). Тогда от торца вглубь конструкции начинают распространяться нестационарные волны деформаций, которые на границах раздела подкреплений и оболочек инициируют волны отраженные и прошедшие. Предположим, что на поверхности контакта оболочек и колец имеют место жесткие условия сцепления. Вводим для каждого элемента конструкции локальную систему координат $(\alpha^{(i)}, \varphi^{(i)}, z^{(i)})$, где $\alpha^{(i)}$ – длина дуги вдоль образующей, отмеряемая от левого торца элемента, $\varphi^{(i)}$ – угол в окружном направлении, $z^{(i)}$ – координата внешней нормали срединной поверхности (фиг. 1.) Назовем пару соседних элементов конструкции с номерами $i, i + 1$ парой первого типа с номером i , если элемент с номером i является оболочкой и второго типа с номером i , если элемент с номером i является кольцом. Граничные условия на участке контакта эле-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ментов пары первого типа имеют вид

$$\alpha^{(i)} = l^{(i)}: \begin{cases} \sigma_{1k}^{(i+1)} = \begin{cases} 0, & |z^{(i+1)}| > h^{(i)} \\ \sigma_{1k}^{(i)}, & |z^{(i+1)}| \leq h^{(i)} \end{cases} \\ \nu_k^{(i+1)} = \nu_k^{(i)}, & |z^{(i+1)}| \leq h^{(i)} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, 3) \quad (1.1)$$

Граничные условия на участке контакта элементов пары второго типа имеют вид

$$\alpha^{(i)} = l^{(i)}: \begin{cases} \sigma_{1k}^{(i)} = \begin{cases} 0, & |z^{(i)}| > h^{(i+1)} \\ \sigma_{1k}^{(i+1)}, & |z^{(i)}| \leq h^{(i+1)} \end{cases} \\ \nu_k^{(i)} = \nu_k^{(i+1)}, & |z^{(i)}| \leq h^{(i+1)} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, 3) \quad (1.2)$$

где $\sigma_{1k}^{(i)}$, $\nu_k^{(i)}$ — напряжения и перемещения в i -м элементе, $h^{(i)}$ — полутолщина элемента.

В представленном исследовании рассматривается класс воздействий, распределенных по всей окружности торца конструкции. Передние фронты волн на срединной поверхности представляют собой окружности (параллели), движущиеся вдоль оси вращения конструкции. Разложим компоненты НДС в ряд Фурье по окружной координате. Такое разложение в рамках рассматриваемого класса воздействий является эффективным, поскольку компоненты разложения имеют такие же фронты, как и искомые волны, и, следовательно, их волновые свойства совпадают с волновыми свойствами искомого решения. Все уравнения в дальнейшем будем записывать для членов разложения компонент НДС в эти ряды.

При математическом моделировании процесса распространения волн в конструкции будем использовать асимптотический метод расчленения нестационарного НДС на составляющие, разработанный для оболочек вращения в [1]. Согласно этому методу, при нагрузке изгибающего типа, приводящей на торце к отличному от нуля изгибающему моменту и нулевым продольному усилию, сдвигающему усилию и перерезывающей силе, в полубесконечной оболочке при временах, больших времени пробега волной пути, соизмеримого с ее толщиной, НДС вдали от фронта и торца описывается двумерной теорией Кирхгофа – Лява, в окрестности продольной волны – динамическим погранслоем, а в окрестности торца порядка толщины – наложением двумерной составляющей и быстрозатухающего квазистатического погранслоя. На фиг. 2 приведена схема решения для изгибающего момента G_1 в некоторый фиксированный момент времени: цифрой 2 обозначен динамический погранслой, 1 – двумерная составляющая, 3 – область наложения двумерной составляющей и квазистатического погранслоя.

Двумерная составляющая ищется в виде наложения двух компонент. Первая описывается безмоментными и плоскостными [2, 3] интегралами динамических уравнений теории упругости и названа в [1] безмоментной составляющей Кирхгофа – Лява. Вторая – изгибно-плоскостными и изгибными интегралами и названа в [1] моментной составляющей. Моментная составляющая в рассматриваемом случае торцевого воздействия служит для удовлетворения нетангенциальной части граничных условий. Безмоментная составляющая снимает невязку в тангенциальной части граничных условий, появляющуюся после построения моментной составляющей. С асимптотической погрешностью теории Кирхгофа – Лява при определении прогиба и изгибающего момента безмоментной составляющей можно пренебречь [3].

Для удовлетворения граничным условиям на торце в точной трехмерной форме в малой приторцевой области достраивается квазистатический погранслой: удовлетворение граничным условиям в паре с моментной составляющей проводится с помощью антисимметричного по нормальной координате типа погранслоя, а в паре с безмоментной составляющей – с помощью симметричного погранслоя.

Отметим принципиальную разницу между квазистатическим и динамическим погранслоями. Динамический погранслой движется по оболочке в соответствии с движением фронта волны, а статический погранслой остается неподвижным в окрестности торца оболочки.

Будем называть в дальнейшем рассмотренный тип нестационарного НДС моментным. При определении двумерной составляющей ограничимся моментной составляющей.

2. НДС элементов конструкций. Волновой процесс в конструкции будем рассматривать с учетом распространения волн в подкреплениях. Удар о торец крайнего стержня инициирует в нем волну; эта волна при достижении фронтом противоположного торца вызывает отраженную волну и прошедшую волну в соседней оболочке. Прошедшая волна падает на второй торец оболочки и вызывает появление двух других новых волн и так далее. Назовем пакеты волн, инициируемые границами соседних элементов конструкции, обобщенными элементарными волнами. Каждая обобщенная элементарная волна формируется комбинацией элементарных волн: головной волны (инициируемой непосредственно границей элементов) и волн, отраженных от лицевых

поверхностей. Поскольку обобщенная волна (и в оболочках, и в кольцах подкрепления) является волной в полубесконечной оболочке, то к ее описанию могут быть применены методы, разработанные в [1]. Будем искать решение в виде наложения обобщенных элементарных волн. Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с обобщенными элементарными волнами, то термин «обобщенный» в названии этих волн будем опускать.

Таким образом, в нестационарной динамике любую оболочку можно считать полубесконечной, даже если это кольцо.

При рассматриваемом воздействии первая элементарная волна в торцевом шпангоуте имеет моментный тип. Поскольку при падении на стык элементов волна, имеющая моментный тип НДС, порождает волны (отраженную и прошедшую) также моментного типа, то моментный характер имеют все элементарные волны и нестационарное НДС конструкции в целом.

Согласно приведенной в предыдущем пункте концепции расчленения нестационарного НДС в полубесконечной оболочке, нестационарное НДС для элементарной волны в начальный промежуток времени после ее инициирования и в окрестности переднего фронта поперечной волны (изгибной) описывается динамическим погранслоем. Главный вклад в формирование скачков напряжений и деформаций на фронте изгибной волны при рассматриваемом типе граничных условий вносит динамический плоский антисимметричный погранслой, для которого НДС в асимптотически главной части антисимметрично по нормальной координате, а асимптотически главная часть его разрешающих уравнений совпадает с плоскими уравнениями теории упругости [1, 7]. Отметим, что антисимметричный погранслой следует учитывать только в малой окрестности переднего фронта волны порядка толщины оболочки. Вне этой окрестности имеет место незначительная по величине малоамплитудная осцилляция.

Моментная составляющая описывает [1] НДС в области $\xi_0 = \alpha / R = O(\varepsilon^{1/4} \tau_0^{3/4})$, где $\tau_0 = [E / \rho(1 - \nu)]^{1/2} t / R$, t – время, R – характерное значение радиуса кривизны; $\varepsilon = h/R$ – параметр относительной тонкостенности оболочки; E, ν, ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки. Согласно [3] связь между перемещениями v_i , асимптотически главными напряжениями σ_{ij} и в безразмерной форме перемещениями точек срединной поверхности u^*, v^*, w^* , поворотами γ_i^* , усилиями T_i^*, S^* , моментами G_i^*, H^* имеет вид

$$\begin{aligned} v_1 &= h(\varepsilon^q u^* - \varepsilon^{1-q} \gamma_1^* \zeta), \quad v_2 = h(\varepsilon^q v^* - \varepsilon^{1-q} \gamma_2^* \zeta), \quad v_3 = -hw^* \\ \sigma_{ii} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon I_i^* - \varepsilon^{2-2q} 3G_i^* \zeta) \\ \sigma_{12} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon S^* - \varepsilon^{2-2q} 3H^* \zeta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где q – показатель изменяемости НДС по координате α , связанный с показателем θ условием $q = 1/2$, если $\theta \leq 1/2$ и $q = \theta$, если $\theta > 1/2$; θ – определяет величину числа волн по параллели n : $n = \bar{\varepsilon}^\theta n_*$, где n_* – величина порядка единицы; ζ – безразмерная нормальная координата $\zeta = z / h$.

Уравнения для моментной составляющей записываются в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^*}{\partial \xi} + \frac{n_*}{B_*} S^* + \varepsilon^q \frac{B_*'}{B_*} (T_1^* - T_2^*) &= 0 \\ \frac{\partial S^*}{\partial \xi} - \frac{n_*}{B_*} T_2^* + \varepsilon^q \frac{2B_*'}{B_*} S^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1^*}{\partial \xi} + \frac{n_*}{B_*} N_2^* + \varepsilon^q \frac{B_*'}{B_*} N_1^* + \varepsilon^{4q-2} \left(\frac{T_1^*}{R_1} + \frac{T_2^*}{R_2} \right) - \frac{\partial^2 w_*}{\partial \tau^2} &= 0 \\
\frac{\partial G_1^*}{\partial \xi} + \frac{n_*}{B_*} H^* + \varepsilon^q \frac{B_*'}{B_*} (G_1^* - G_2^*) - N_1^* &= 0 \\
\frac{\partial H^*}{\partial \xi} - \frac{n_*}{B} G_2^* + \varepsilon^q \frac{2B_*'}{B} H^* + N_2^* &= 0 \\
T_1^* = \frac{\partial u_*}{\partial \xi} + \nu \frac{n_*}{B_*} \nu_* + \varepsilon^\theta \nu \frac{B_*'}{B_*} u_* - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) w_* & \\
T_2^* = \nu \frac{\partial u_*}{\partial \xi} + \frac{n_*}{B_*} \nu_* + \varepsilon^\theta \frac{B_*'}{B_*} u_* - \left(\frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) w_* & \\
S^* = \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \nu_*}{\partial \xi} - \frac{n_*}{B_*} \nu_* - \varepsilon^\theta \frac{B_*'}{B_*} \nu_* \right) & \quad (2.3) \\
G_i^* = -\frac{1}{3} (\kappa_i^* + \nu \kappa_j^*), \quad H^* = \frac{1-\nu}{3} \tau^* & \\
\kappa_1^* = -\frac{\partial \gamma_1^*}{\partial \xi}, \quad \kappa_2^* = -\frac{n_*}{B} \gamma_2^* - \varepsilon^q \frac{B_*'}{B} \gamma_1^* & \\
\gamma_1^* = -\frac{\partial w_*}{\partial \xi}, \quad \gamma_2^* = \frac{n_*}{B} w^*, \quad \tau^* = \frac{n_*}{B} \gamma_1^* + \varepsilon^q \frac{B_*'}{B_*} \gamma_2^* &
\end{aligned}$$

где N_i^* – перерезывающие силы в безразмерной форме, $B^* = B/R$, $R_i^* = R_i/R$, B и R_i – расстояние до оси вращения оболочки и радиусы кривизн ее срединной поверхности, а безразмерная переменная ξ введена при операции растяжения масштаба по формуле $\xi = \varepsilon^{-q} \xi_0$. Безразмерные усилия, моменты и перемещения связаны с их размерными аналогами следующими соотношениями [1]:

$$\begin{aligned}
u &= h \varepsilon^q u^*, \quad \nu = h \varepsilon^q \nu^*, \quad w = h w^*, \quad \gamma = h \varepsilon^q \gamma_i^* \\
T_i &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \varepsilon T_i^*, \quad S = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \varepsilon S^*, \quad N_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \varepsilon^{3-3q} N_i^* \\
G_i &= \frac{2Eh^2}{1-\nu^2} \varepsilon^{2-2q} G_i^*, \quad H_i = \frac{2Eh^2}{1-\nu^2} \varepsilon^{2-2q} H_i^*
\end{aligned}$$

Квазистатический погранслои типа Сен-Венана при рассматриваемом виде воздействия характеризует установившееся по времени перераспределение напряжений и деформаций в узкой приторцевой зоне порядка толщины и описывается в плоском случае уравнениями плоской задачи теории упругости [4]. Асимптотически главной составляющей погранслоя является антисимметричный погранслои, позволяющий точно удовлетворить граничным условиям на торце в трехмерной форме в паре с моментной составляющей. Размерные перемещения и напряжения для погранслоя связаны с их безразмерными аналогами соотношениями [1]:

$$\begin{aligned}
\nu_i &= h \nu_i^* \quad (i=1,3), \quad \nu_3 = h \varepsilon^{1-4q} \nu_3^* \\
\sigma_{ij} &= \frac{E}{1+\nu} \sigma_{ij}^* \quad (i,j=1,3) \\
\sigma_{i2} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon^{1-q} \sigma_{i2}^*
\end{aligned}$$

Несмотря на то, что общая структура решения для элементарных волн во всех элементах конструкции одинакова, характеры НДС ее кольцевых и оболочечных элементов принципиально различны. Это обусловлено разницей в величинах протяженности элементов в продольном направлении. Поскольку «длина» шпангоутов (размер в продольном направлении) порядка толщины, то в начальный промежуток времени здесь имеет место динамический погранслой, а спустя некоторое время, большее времени пробега фронтом волны толщины, на шпангоут приходится та часть НДС, которую можно рассматривать как наложение безмоментной составляющей, определяемой теорией оболочек, и квазистатического погранслоя. Таким образом, несмотря на то, что шпангоуты являются стержнями, использовать классические одномерные теории стержней не удастся вследствие того, что в рассматриваемом классе задач передний фронт волны распространяется не вдоль срединной линии стержня, а в направлении координаты $\alpha^{(i)}$, перпендикулярной срединной линии (в направлении одного из малых размеров кольца). Отсюда следует, что анализ НДС подкреплений следует проводить на базе трехмерных уравнений теории упругости, рассматривая кольца как очень короткие оболочки. Далее исследуются роль моментной составляющей и квазистатического погранслоя в волнах в шпангоуте на формирование волн в соседних оболочках, выявляя ведущую роль в этом моментной составляющей.

Рассмотрим взаимодействие волн в i -х парах элементов первого и второго типов. Пусть падающая волна распространяется в i -м элементе и порождает отраженную (в i -м элементе) и прошедшую (в $(i+1)$ -м элементе) волны. Динамический погранслой имеет место [1] в области $\xi_{0m} \leq \xi_0$, где левая граница ξ_{0m} определяется асимптотической оценкой $\xi_{0m} = O(\varepsilon^{1/4} \tau_0^{3/4})$, причем важно отметить, что при ударных нагрузках существенное по значению НДС имеет место только в узкой окрестности фронта поперечной волны изгиба $O(\varepsilon)$ (в остальной области решение имеет малоамплитудный быстроосциллирующий характер). Падающая волна, начиная от момента прихода первого фронта к противоположному торцу до момента прихода к нему границы ξ_{0m} , на этом торце описывается решением для динамического погранслоя сама и порождает решения для отраженной и прошедшей волн также типа динамического погранслоя.

Будем считать, что гармонический закон изменения НДС по окружной координате для всех секций одинаков, поэтому из-за разницы в относительной толщине показатели интенсивности θ для различных секций различны и связаны друг с другом соотношением

$$\varepsilon_i^{-\theta_i} = \varepsilon_{i+1}^{-\theta_{i+1}} \quad (2.4)$$

По простейшии указанного выше промежутка времени решение в элементах конструкций определяется теорией Кирхгофа – Лява с учетом квазистатического погранслоя типа Сен-Венана. Поскольку двумерная составляющая описывается [1] четырьмя моментными интегралами, выбираемыми из решений системы (2.2) (2.3), то граничные условия контакта для нее поставим относительно нетангенциальных компонент НДС:

$$\begin{aligned} h_i \varepsilon_i^{2q_i-1} w_*^{(i)} &= h_{i+1} \varepsilon_{i+1}^{2q_{i+1}-1} w_*^{(i+1)} \\ h_i \varepsilon_i^{q_i-1} \gamma_1^{*(i)} &= h_{i+1} \varepsilon_{i+1}^{q_{i+1}-1} \gamma_1^{*(i+1)} \\ \frac{E_i h_i^2}{1-\nu_i^2} G_1^{*(i)} &= \frac{E_{i+1} h_{i+1}^2}{1-\nu_{i+1}^2} G_1^{*(i+1)} \\ \frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2} \varepsilon_i^{1-q_i} N_1^{*(i)} &= \frac{E_{i+1} h_{i+1}}{1-\nu_{i+1}^2} \varepsilon_{i+1}^{1-q_{i+1}} N_1^{*(i+1)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

НДС, построенное по моментному решению, удовлетворяющему граничным условиям (2.5), не удовлетворяет граничным условиям (1.1)–(1.2). Остановимся на удовлетворении с помощью плоского квазистатического погранслоя той части граничных

условий (1.1)–(1.2), которые характеризуют компоненты НДС в плоскости (α, z) . Удовлетворение остальной части граничных условий (для σ_{12} и ν_2) может быть произведено с помощью антиплоского погранслоя.

Рассмотрим сначала пару элементов первого типа. Поскольку падающая волна распространяется в оболочке, то влияние квазистатического погранслоя со стороны левого торца не имеет места и необходимо учитывать погранслойные решения только в окрестности контакта. Касательные напряжения σ_{13} по двумерной теории [3] имеют асимптотический порядок $O(\varepsilon^{1-q})$ по сравнению с нормальными. Пренебрежем с указанной асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^{1-q})$ компонентой σ_{13} по двумерной теории Кирхгофа – Лява по сравнению с σ_{13} по теории погранслоя. Тогда, обозначая величину контактного значения изгибающего момента через $G^{(i)}$, запишем граничные условия (1.1) в рамках рассматриваемой асимптотической погрешности через компоненты моментной составляющей и квазистатического погранслоя в форме

$$\frac{E_{i+1}}{1+\nu_{i+1}} \sigma_{11}^{*(i+1)} - \frac{3G^{(i+1)}}{2h_{i+1}^3} z^{(i+1)} = \begin{cases} 0, & |z^{(i+1)}| > h_i \\ \frac{E_i}{1+\nu_i} \sigma_{11}^{*(i)} - \frac{3G^{(i)}}{2h_i^3} z^{(i)}, & |z^{(i+1)}| \leq h_i \end{cases}$$

$$\frac{E_{i+1}}{1+\nu_{i+1}} \sigma_{13}^{*(i+1)} = \begin{cases} 0, & |z^{(i+1)}| > h_i \\ \frac{E_i}{1+\nu_i} \sigma_{13}^{*(i)}, & |z^{(i+1)}| \leq h_i. \end{cases} \quad (2.6)$$

$$h_{i+1} \nu_1^{*(i+1)} + h_{i+1} (\varepsilon_{i+1}^{3q_{i+1}-2} u_*^{(i+1)} - \varepsilon_{i+1}^{q_i-1} \gamma_1^{*(i+1)} \zeta^{(i+1)}) =$$

$$= h \nu_1^{*(i)} + h_i (\varepsilon_i^{3q_{i+1}-2} u_*^{(i)} - \varepsilon_i^{q_i-1} \gamma_1^{*(i)} \zeta^{(i+1)})$$

$$h_{i+1} \nu_3^{*(i+1)} - h_{i+1} \varepsilon_{i+1}^{2q_{i+1}-2} w_*^{(i+1)} = h \nu_3^{*(i)} - h_i \varepsilon_i^{2q_{i+1}-2} w_*^{(i)}$$

Представим квазистатический погранслой в кольце в виде наложения двух типов погранслоя: погранслоя, отвечающего осредненным значениям напряжений в зоне контакта с протяженностью порядка толщины кольца и погранслоя, уточняющего значения напряжений в зоне контакта с протяженностью порядка толщины оболочки. Тогда, учитывая малость толщины оболочки по сравнению с толщиной подкрепления, пренебрежем влиянием на НДС погранслоя второго типа. Это соответствует принятию такой модели НДС состыкованных оболочки и кольца, когда НДС оболочки в зоне контакта описывается только моментной составляющей, а волна в кольце – моментной составляющей и квазистатическим погранслоем, соответствующим двумерному характеру распределения напряжений и перемещений в зоне контакта. Тогда, учитывая асимптотическую модель решений для перемещений по теории погранслоя по сравнению с соответствующими решениями для безмоментной составляющей (контактные условия для перемещений определяются, соответственно, с асимптотической погрешностью $O(\varepsilon^{1-q})$ двумерной составляющей), можно построить рекуррентный процесс последовательного определения составляющих разложения моментного решения и плоского погранслоя в ряд по малому параметру относительной тонкостенности. Асимптотически главные члены разложения для моментной составляющей определяются условиями (2.5), а плоского погранслоя для волны в кольце – следующими условиями на стыке:

$$\frac{E_{i+1}}{1+\nu_{i+1}} \sigma_{11}^{*(i+1)} = \begin{cases} + \frac{3}{2h_{i+1}^3} G^{(i)} z^{(i+1)}, & |z^{(i+1)}| > h_i \\ - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{h_i^3} - \frac{1}{h_{i+1}^3} \right) G^{(i)} z^{(i)}, & |z^{(i+1)}| \leq h_i \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\sigma_{13}^{*(i+1)} = 0$$

Таким образом, погранслоя первого типа обусловлен необходимостью снять невязку, появившуюся на свободной поверхности торца кольца при построении двумерной составляющей. Граничные условия (2.7) определяют затухание решения плоской задачи теории упругости для полуполосы [6]. Проанализируем его влияние на НДС кольца построением решения задачи для полуполосы с граничными условиями (2.7) по методике [6]. Разложение решения по функциям Папковича дает формулу для напряжения $\sigma_{11}^{(i+1)}$:

$$\sigma_{11}^{(i+1)} = -\frac{3}{2} h_i \left(\frac{1}{h_i^3} - \frac{1}{h_{i+1}^3} \right) G^{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{u_k \xi_2} F_k'(\xi) \quad (2.8)$$

где $F_k(\xi)$ – функции Папковича, а a_k – коэффициенты, определенные следующим выражением

$$a_k = \frac{1}{1 - \mu_i^3} \frac{1}{2u_k^3 \sin^3 u_k} [\operatorname{tg}(u_k)(\sin(u_k \mu_i) - u_k \mu_i \cos(u_k \mu_i)) - u_k \mu_i^2 \sin(u_k \mu_i)], \quad \mu_i = h_i / h_{i+1}$$

Постоянные u_k являются корнями уравнения [6]:

$$\sin 2u - 2u = 0$$

На фиг. 3 представлены графики распределения по нормальной координате приведенных значений напряжений

$$\sigma_{11}^{** (i+1)} = 2\sigma_{11}^{(i+1)} \left(3h_i \left(\frac{1}{h_i^3} - \frac{1}{h_{i+1}^3} \right) G^{(i)} \right)^{-1}$$

для погранслоя первого типа: кривые 1, 2, 3 представляют напряжения в сечениях $\xi_0 = 0,2, 0,4, 0,8$ соответственно при $\nu = 0,3, \mu_i^{(1)} = 0,1$.

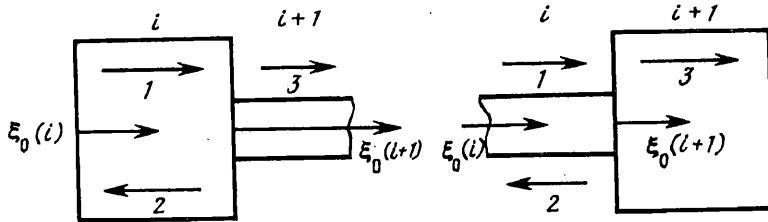
Расчеты показали, что практическое затухание погранслоя наступает на расстоянии 0,5 толщины кольца (максимальное значение напряжения уменьшается в 25 раз).

В случае пары элементов второго типа падающая волна распространяется в кольце, и вопрос об учете квазистатического погранслоя падающей волны при постановке граничных условий на стыке зависит от протяженности кольца. Однако, поскольку в каждом продольном (проходящем через ось кольца) сечении напряжения для квазистатического погранслоя падающей волны самоуравновешены, то на постановку двумерной задачи они не влияют и изменяют только граничные условия для квазистатического погранслоя первого типа отраженной волны.

Проведенные исследования позволили сделать важные выводы о характере НДС конструкции. Основной ее компонентой является моментная составляющая Кирхгофа – Лява, как для оболочечных элементов, так и для подкреплений (рассматриваемых как короткие оболочки). Для получения полного решения к основной компоненте пристраивается в соответствующей области фазовой плоскости решение для динамического погранслоя (имеющее существенные значения только в узкой окрестности фронта), а в случае колец на основную компоненту накладывается квазистатический погранслоя первого типа.

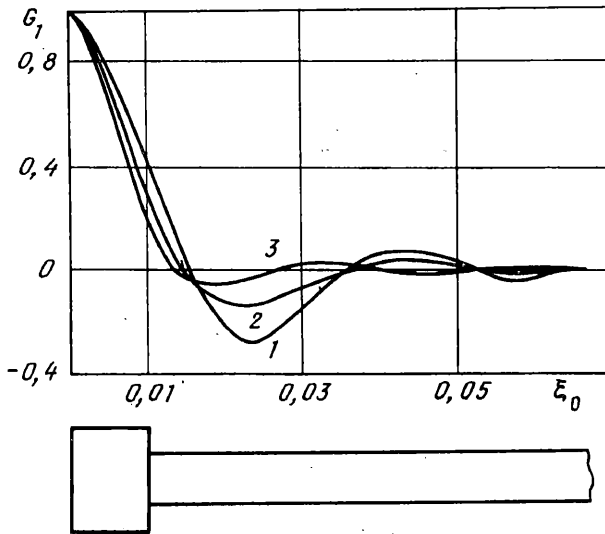
3. Анализ нестационарных волн в подкрепленных цилиндрических оболочках. Рассмотрим осесимметричное нестационарное НДС системы подкрепленных цилиндрических оболочек. Пусть граничные условия на левой границе торцевого подкрепления моделируют ударное воздействие $G_1^{*(1)} = HC(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда.

На фиг. 4 изображена пара элементов второго типа с падающей волной в кольце. Стрелками изображены волны: 1 – падающая, 2 – отраженная и 3 – прошедшая. Решения для изображений по Лапласу изгибающего момента падающей волны $\bar{G}_{1,1}^{(i)}$



Фиг. 4

Фиг. 5



Фиг. 6

в общем виде записывается следующим образом [1]:

$$\bar{G}_{1,1}^{(i)} = \frac{4E_i h_i^2}{3(1-\nu_i^2)} p_i^2 (W_2 \cos(p_i \xi^{(i)}) - W_1 \sin(p_i \xi^{(i)})) e^{-p_i \xi^{(i)}} \quad (3.1)$$

$$p_i = 3^{1/4} (1 - \nu_i^2 + s_i^2) / 2^{1/2}$$

где s_i – параметр преобразования Лапласа, W_i – постоянные интегрирования. Проведем исследования без конкретизации условий возникновения падающей волны, в соответствии с чем не будем задавать выражений для постоянных W_i .

Представление решений для изображений изгибающего момента отраженной волны ($\bar{G}_{1,2}^{(i)}$) и прошедшей ($\bar{G}_1^{(i)}$) волны записываются в виде

$$\bar{G}_{1,2}^{(i)} = \frac{4E_i h_i^2}{3(1-\nu_i^2)} p_i^2 (W_4 \cos p_i (-l^{(i)} + \xi^{(i)}) - W_3 \sin p_i (l^{(i)} - \xi^{(i)})) e^{-p_i (l^{(i)} - \xi^{(i)})} \quad (3.2)$$

$$\bar{G}_1^{(i+1)} = \frac{4E_{i+1} h_{i+1}^2}{3(1-\nu_{i+1}^2)} p_{i+1}^2 (W_6 \cos p_{i+1} \xi^{(i+1)} - W_5 \sin p_{i+1} \xi^{(i+1)}) e^{-p_{i+1} \xi^{(i+1)}}$$

Удовлетворяя решениями (3.1)–(3.2) граничным условиям (2.5), получим рекуррентные зависимости постоянных интегрирования для отраженной и прошедшей волн от постоянных интегрирования падающей волны, представленные пер-

выми членами разложений в степенные ряды по малому параметру $\mu_i = h_{i+1} / h_i$:

$$W_k = (W_k^{(1)} \cos p_i l^{(i)} + W_k^{(2)} \sin p_i l^{(i)}) e^{-p_i l^{(i)}} \quad (k = 3, 6) \quad (3.3)$$

$$W_3^{(1)} = W_1 + 2W_2 - \mu^{3/2} \frac{4p_{i+1}^3}{Dep_i^3} (W_1 + W_2)$$

$$W_3^{(2)} = -2W_1 + W_2 + \mu^{3/2} \frac{4p_{i+1}^3}{Dep_i^3} (W_1 - W_2)$$

$$W_4^{(1)} = -W_2 + \mu^2 \frac{2p_{i+1}^2}{Dep_i^2} (W_1 + W_2)$$

$$W_4^{(2)} = W_1 + \mu^2 \frac{2p_{i+1}^2}{Dep_i^2} (-W_1 + W_2)$$

$$W_5^{(1)} = \frac{2}{Cp} \left(1 - \mu^{3/2} \frac{2p_{i+1}^3}{Dep_i^3} \right) (W_1 + W_2)$$

$$W_5^{(2)} = \frac{2}{Cp} \left(1 - \mu^{3/2} \frac{2p_{i+1}^3}{Dep_i^3} \right) (-W_1 + W_2)$$

$$W_6^{(1)} = \frac{2}{Cp} \left(W_1 + W_2 + \mu^{1/2} \frac{2p_i}{p_{i+1}} W_2 \right)$$

$$W_6^{(2)} = \frac{2}{Cp} \left(-W_1 + W_2 - \mu^{1/2} \frac{2p_i}{p_{i+1}} W_1 \right)$$

$$Cp = \frac{C_3^{(i)}}{C_3^{(i+1)}}, \quad De = \frac{E_i(1 - v_{i+1}^2)}{E_{i+1}(1 - v_i^2)}, \quad C_3^{(i)} = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i(1 - v_i^2)}}$$

Обращение изображений (3.1)–(3.2) с учетом (3.3) может быть произведено методом разложения изображений по отрицательным степеням корня квадратного из параметра преобразования Лапласа, разработанном для изгибных волн в полубесконечной оболочке в [1]. В рассматриваемом случае отраженных и прошедших волн используются не только функции $D_{m,c}$ и $D_{m,s}$, применяющиеся в случае прямой волны в полубесконечной оболочке (Γ – гамма-функция):

$$\frac{1}{s^{(m+1)/2}} \exp(-\gamma\sqrt{s}) \cos(\gamma\sqrt{s}) \Rightarrow D_{m,c}(\gamma\tau)$$

$$\frac{1}{s^{(m+1)/2}} \exp(-\gamma\sqrt{s}) \sin(\gamma\sqrt{s}) \Rightarrow D_{m,s}(\gamma\tau) \quad (3.4)$$

$$D_{m,c} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{m/2-1}}{\sqrt{t}} \cos \frac{\gamma^2}{2t} dt$$

$$D_{m,s} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{m/2-1}}{\sqrt{t}} \sin \frac{\gamma^2}{2t} dt$$

но и их обобщения, которые мы обозначим $DE_{m,c}$ и $DE_{m,s}$

$$\frac{1}{s^{(m+1)/2}} \exp(-\gamma_1\sqrt{s}) \cos(\gamma_2\sqrt{s}) \Rightarrow DE_{m,c}(\gamma_1, \gamma_2, \tau)$$

$$\frac{1}{s^{(m+1)/2}} \exp(-\gamma_1\sqrt{s}) \sin(\gamma_2\sqrt{s}) \Rightarrow DE_{m,s}(\gamma_1, \gamma_2, \tau) \quad (3.5)$$

$$DE_{m,c}(\gamma_1, \gamma_2, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{m/2-1}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4t}\right) \cos\left(\frac{2\gamma_1\gamma_2}{4t}\right) dt$$

$$DE_{m,s}(\gamma_1, \gamma_2, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{m/2-1}}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{4t}\right) \sin\left(\frac{2\gamma_1\gamma_2}{4t}\right) dt$$

Разложение рассматриваемых изображений в ряды по отрицательным степеням параметра преобразования дает представление исходных оригиналов в виде рядов, быстроходящихся в моменты времени, соизмеримые со временем прохождения фронтом волны расстояния, равного радиусу оболочки. Отметим, что с ростом времени такое разложение становится неэффективным. Задавая главные члены разложений для постоянных

$$W_j \sim \frac{1}{s_i^k} W_j^* \quad (j=1,2) \quad (3.6)$$

приходим к следующим выражениям для оригиналов:

$$\begin{aligned} G_{1,2}^{(i)} = & \frac{4E_i h_i^2 \gamma_1^2 C_p^k}{3(1-\nu_i^2)} [(W_4^{*(1)} + W_3^{*(2)}) D_{2k-3,c}(\gamma_1(2l^{(i)} - \xi^{(i)}), \tau^{(i+1)}) + \\ & + (W_4^{*(1)} - W_3^{*(2)}) DE_{2k-3,c}(\gamma_1(2l^{(i)} - \xi^{(i)}), \gamma_1 \xi^{(i)}, \tau^{(i+1)}) + \\ & + (W_4^{*(2)} - W_3^{*(1)}) D_{2k-3,s}(\gamma_1(2l^{(i)} - \xi^{(i)}), \tau^{(i+1)}) + \\ & + (W_4^{*(2)} + W_3^{*(1)}) DE_{2k-3,s}(\gamma_1(2l^{(i)} - \xi^{(i)}), \gamma_1 \xi^{(i)}, \tau^{(i+1)})] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} G_1^{(i+1)} = & \frac{2E_{i+1} h_{i+1}^2 \gamma_2^2 C_p^k}{3(1-\nu_{i+1}^2)} [(W_6^{*(1)} + W_5^{*(2)}) D_{2k-3,c}(\gamma_1 l^{(i)} + \gamma_2 \xi^{(i+1)}, \tau^{(i+1)}) + \\ & + (W_6^{*(1)} - W_5^{*(2)}) DE_{2k-3,c}(\gamma_1 l^{(i)} + \gamma_2 \xi^{(i+1)}, \gamma_1 l^{(i)} - \gamma_2 \xi^{(i+1)}, \tau^{(i+1)}) + \\ & + (W_6^{*(1)} - W_5^{*(2)}) D_{2k-3,s}(\gamma_1 l^{(i)} + \gamma_2 \xi^{(i+1)}, \tau^{(i+1)}) + \\ & + (W_6^{*(1)} - W_5^{*(2)}) DE_{2k-3,s}(\gamma_1 l^{(i)} + \gamma_2 \xi^{(i+1)}, \gamma_1 l^{(i)} - \gamma_2 \xi^{(i+1)}, \tau^{(i+1)})] \end{aligned}$$

$$W_n^{(l)} \sim \frac{C_p^k}{s_{i+1}^k} W_n^{*(l)} \quad (n=3, \dots, 6, l=1, 2)$$

$$W_3^{*(1)} = W_1^* + 2W_2^* - \mu^{3/2} \frac{4C_p^{3/2}}{De} (W_1^* + W_2^*)$$

$$W_3^{*(2)} = -2W_2^* + W_1^* + \mu^{3/2} \frac{4C_p^{3/2}}{De} (W_1^* - W_2^*)$$

$$W_4^{*(1)} = -W_2^* + \mu^2 \frac{2C_p}{De} (W_1^* + W_2^*), \quad W_4^{*(2)} = W_1^* - \mu^2 \frac{2C_p}{De} (W_1^* - W_2^*)$$

$$W_5^{*(1)} = \frac{2}{C_p} \left(1 - \mu^{3/2} \frac{2C_p^{3/2}}{De}\right) (W_1^* + W_2^*), \quad W_5^{*(2)} = \frac{2}{C_p} \left(1 - \mu^{3/2} \frac{2C_p^{3/2}}{De}\right) (-W_1^* + W_2^*)$$

$$W_6^{*(1)} = \frac{2}{C_p} (W_1^* + W_2^* + \mu^{1/2} 2C_p^{1/2} W_2^*)$$

$$W_6^{*(2)} = \frac{2}{C_p} (-W_1^* + W_2^* - \mu^{1/2} 2C_p^{1/2} W_1^*), \quad \gamma_2 = \frac{3^4}{2^2}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 / C_p^{1/2}$$

Анализ решений (3.7) позволяет сделать вывод, что прошедшая волна мала по сравнению с падающей: $G_1^{(i+1)} / G_{1,1}^{(i)} = O(\mu^2)$ и главная часть энергии отражается.

Таким образом, большая разница толщин элементов обуславливает, что НДС в кольце для одной падающей элементарной волны близко к НДС кольца со свободным краем. На границе раздела отношение изгибающих моментов рассматриваемых волн представляется следующей элементарной формой

$$\frac{G_1^{(i+1)}}{G_{1,1}^{(i)}} = \mu^2 \frac{2\rho_{i+1}}{\rho_i C\rho} \left(1 + \frac{W_1^*}{W_2^*} + \mu^{1/2} \frac{2}{C\rho^{1/2}} \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{G_{1,2}^{(i)}}{G_{1,1}^{(i)}} = -1 + \mu^2 \frac{2\rho_{i+1}}{\rho_i C\rho} \left(1 + \frac{W_1^*}{W_2^*} + \mu^{1/2} \frac{2}{C\rho^{1/2}} \right)$$

Отметим, что решение (3.7) для волны в кольце может быть упрощено, учитывая малую протяженность кольца в продольном направлении: решение для падающей и отраженной волн по истечении некоторого начального промежутка времени может быть разложено в ряд по продольной координате.

Аналогичное исследование может быть проведено для случая пары элементов первого типа (фиг. 5). Обозначения стрелок аналогичны фиг. 4. Большая разница толщин элементов обуславливает то, что НДС в оболочке для одной элементарной волны близко к НДС кольца с закрепленным краем. На границе раздела отношения изгибающих моментов прошедшей и падающей, отраженной и падающей волн имеют вид

$$\frac{G_1^{(i+1)}}{G_{1,1}^{(i)}} = 2 + \frac{W_1^*}{W_2^*} (2 + \mu^{3/2} C\rho) \quad (3.9)$$

$$\frac{G_{1,2}^{(i)}}{G_{1,1}^{(i)}} = 1 + \frac{W_1^*}{W_2^*} (2 + \mu^{3/2} C\rho)$$

Рассмотренные законы взаимодействия элементарных волн объясняют полные волновые картины для изгибающего момента в подкрепленных оболочках. На фиг. 6 представлено распределение G_1^* вдоль срединной поверхности конструкции (подкрепленная на торце цилиндрическая оболочка) при $\epsilon_1 = 0,01$; $\epsilon_2 = 0,001$ в момент времени $\tau_0^{(2)} = 0,09$.

Графики 1, 2, 3 представляют здесь случаи, когда, соответственно, кольцо и оболочка сделаны из алюминия и стали, стали и стали, стали и алюминия.

Авторы благодарят А.Л. Гольденвейзера за обсуждение работы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. 176 с.
2. Гольденвейзер А.Л. Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек. // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 591–603.
3. Каплунов Ю.Д., Кириллова И.В., Коссович Л.Ю. Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек. // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 83–91.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
5. Гольденвейзер А.Л. О краевом напряженно-деформированном состоянии тонких упругих оболочек. // Изв. АН Эстонии. Сер. Физ. Мат. 1993. Т. 42. Вып. 1. С. 32–44.
6. Гусейн-Заде М.И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 393–399.
7. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. Динамический погранслои в задачах колебаний оболочек. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 152–162.