

УДК 539.3

© 1996 г. С.Н. КУКУДЖАНОВ

О ВЛИЯНИИ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, БЛИЗКИХ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ

Исследуется влияние нормального давления (как внешнего, так и внутреннего) на форму волнообразования и величину наименьших собственных частот оболочек вращения, близких к цилиндрическим. Вопросы эти рассмотрены для оболочек средней длины. Предполагается, что форма образующей срединной поверхности оболочки описывается достаточно гладкой, знакопостоянной функцией. На основании теории пологих оболочек получено разрешающее уравнение колебания. Для случая, когда образующая срединной поверхности оболочки изменяется по параболическому закону, приведенное уравнение отличается от известного [1] дополнительным членом, который может иметь такой же порядок как и другие учтенные члены. Рассмотрены оболочки как положительной, так и отрицательной гауссовой кривизны. Приведены формулы и универсальные кривые зависимости наименьшей частоты и формы волнообразования как от величины предварительного напряжения, так и амплитуды отклонения оболочки от цилиндра. Показано, что при наличии предварительных напряжений, отклонения оболочки от цилиндрической формы (порядок толщины) могут существенно изменять низшие частоты и формы волнообразования соответствующей цилиндрической оболочки.

1. Рассматриваются оболочки, у которых срединная поверхность образована вращением некоторой достаточно гладкой кривой вокруг оси z , прямоугольной системы координат x, y с началом в середине отрезка оси вращения. При этом радиус поперечного сечения срединной поверхности оболочки определяется равенством

$$R = r + \delta_0 F(\xi), \quad \xi = z/r \quad (1.1)$$

где $F(z)$ – положительная функция, заданная на интервале $(-l/r, l/r)$ так, что $F(\pm l/r) = 0$, $\max F(\xi) = 1$, $|F'(\xi)| \leq 1$; $L = 2l$ – длина оболочки; r – радиус торцевого сечения; δ_0 – малый параметр, характеризующий максимальное отклонение от цилиндрической формы. При $\delta_0 > 0$ образующая срединной поверхности имеет форму выпуклости, при $\delta_0 < 0$ – вогнутости. Рассматриваются оболочки средней длины [2] и считается, что $(\delta_0/r)^2, (\delta_0/L)^2 \ll 1$.

Уравнение срединной поверхности в параметрическом представлении имеет вид

$$x = R(\xi) \cos \varphi, \quad y = R(\xi) \sin \varphi \quad (1.2)$$

где φ – угловая координата. Отсюда получаем, что коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности будут

$$A^2 = r^2 + \delta_0^2 (F')^2, \quad B^2 = R(\xi)^2$$

На основании сделанных допущений в выражении A^2 можно пренебречь вторым членом. Следовательно,

$$A \approx r, \quad B = R(\xi) \quad (1.3)$$

Главные радиусы кривизны имеют вид

$$k_1 = 1/R_1 = -R''/r^2, \quad k_2 = 1/R_2 = 1/R(\xi) \quad (1.4)$$

За основные уравнения колебания принимались уравнения, соответствующие теории пологих оболочек [3]. Для рассматриваемых оболочек средней длины формы колебаний, соответствующие низшим частотам, сопровождаются слабовыраженным волнообразованием в продольном направлении в сравнении с окружным, поэтому справедливо соотношение

$$\partial^2 f / \partial \xi^2 \ll \partial^2 f / \partial \varphi^2 \quad (f = w, \psi) \quad (1.5)$$

где w, ψ – соответственно функции радиального перемещения и напряжения. В результате система уравнений теории пологих оболочек приводится к следующему разрешающему уравнению:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[\left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right] + \left(-\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \left(\frac{R''}{r} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} - \\ - \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(t_1^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(t_2^0 \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0 \\ \varepsilon = \frac{h^2}{12r^2(1-\nu^2)}, \quad t_i^0 = \frac{T_i^0}{Eh} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где T_1^0, T_2^0 – нормальные усилия исходного состояния. Исходное состояние предполагается безмоментным. На основании соответствующего решения и неравенства (1.2), (1.5) нетрудно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(T_1^0 \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \ll T_2^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \quad T_2^0 \approx -qr \quad (1.7)$$

где E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки, q – нормальное давление, которое считается положительным, если оно внешнее, и отрицательным, если оно внутреннее.

2. Рассмотрим оболочку, когда образующая срединной поверхности определяется параболической функцией

$$F(\xi) = 1 + \xi^2 (r/l)^2 \quad (2.1)$$

В этом случае, уравнение (1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^8 w}{\partial \varphi^8} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + 4\delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + t^0 \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + \frac{\rho r^2}{E} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \right) = 0, \\ \delta = \frac{\delta_0 r}{l^2}, \quad t^0 = \frac{qr}{Eh} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Дополнительным членом в этом уравнении, в сравнении с уравнением приведенным в [3], является четвертый член, который в силу неравенства (1.5) будет одного порядка с третьим членом этого уравнения.

Рассмотрим случай, когда края оболочки свободно оперты. Принятым граничным условиям удовлетворяет выражение

$$w = A \cos \lambda_m \xi \sin \varphi \sin \omega t, \quad \lambda_m = m\pi r / L \quad (2.3)$$

Подставив выражение (2.3) в уравнение (2.2), получаем следующее равенство для определения собственных частот:

$$\Omega\omega^2 = \varepsilon n^4 + \left(\frac{m\pi r}{nL}\right)^4 + 4\delta\left(\frac{m\pi r}{nL}\right)^2 + 4\delta^2 - t^0 n^4, \quad \Omega = \frac{E}{\delta r^2} \quad (2.4)$$

Видно, что при $\delta > 0$ наименьшей частоте соответствует значение $m = 1$. Можно также показать, что это условие имеет место и при $\delta < 0$, учитывая неравенства (1.2), а также что $\Omega\omega^2 > 0$.

Представим выражение (2.4) в безразмерном виде; для этого введем безразмерные величины

$$\rho = \varepsilon_*^{-1/4} \lambda_1 / n, \quad \delta_* = \varepsilon_*^{-1/2} \delta, \quad \Omega_* = \Omega \varepsilon_*^{-1} / \pi^2, \quad T = t^0 / t_*$$

$$\varepsilon_* = \frac{hr}{L^2(1-v^2)^{1/2}}, \quad t_* = 0,855(1-v^2)^{-3/4} \left(\frac{h}{r}\right)^{3/2} \frac{r}{L} \quad (2.5)$$

Тогда равенство (2.4) примет вид

$$\Omega_* \omega^2 = \frac{\pi^2}{12} \rho^{-4} + \frac{1}{\pi^2} (\rho^4 + 4\delta_* \rho^2 + 4\delta_*^2) - 0,855 T \rho^{-2} \quad (2.6)$$

Учитывая, что для незагруженной цилиндрической оболочки средней длины наименьшая частота ω_0 определяется равенством [4]:

$$\Omega\omega_0^2(\rho_0) = 2\lambda_1 \varepsilon^{1/2}, \quad \rho_0 = \pi 12^{-1/4} \quad (2.7)$$

можно представить $\Omega_* \omega^2$ в следующем виде:

$$\Omega_* \omega^2 = \omega^2 / 3^{1/2} \omega_0^2(\rho_0) \quad (2.8)$$

Кроме того введем новую переменную N , определяемую выражением $N = \pi 12^{-1/4} \rho^{-2}$ (при $\rho = \rho_0$, $N = 1$). Тогда равенство (2.6) можно записать в следующей безразмерной форме:

$$\omega^2(N) / \omega_0^2(1) = \frac{1}{2}(N^2 + N^{-2} + 2,37\delta_* N^{-1} + 1,404\delta_*^2 - 1,755TN) \\ \omega_0^2 = 2\Omega^{-1} \lambda \varepsilon^{1/2} \quad (2.9)$$

Рассмотрим случай, когда $T = 0$, тогда

$$\omega^2(N) / \omega_0^2(1) = \frac{1}{2}(N^2 + N^{-2} + 2,37\delta_* N^{-1} + 1,404\delta_*^2) \quad (2.10)$$

Нетрудно показать, что наименьшая частота в этом случае, определяется из условия $\omega^2(N)' = 0$. Отсюда получаем

$$N^4 + dN + e = 0, \quad d = -1,185\delta_*, \quad e = -1 \quad (2.11)$$

Корни уравнения (2.11) совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$N^2 + \frac{a_{1,2}}{2} N + \left(y_1 - \frac{d}{a_{1,2}}\right) = 0, \quad a_{1,2} = \pm \sqrt{8y_1} \quad (2.12)$$

Корни уравнений (2.12) имеют вид

$$N_{1,2} = -\left[\frac{y_1 \pm \sqrt{\frac{d}{8y_1} - \frac{y_2}{2}}}{2}\right]^{1/2}, \quad N_{3,4} = \left[\frac{y_1 \pm \sqrt{\frac{d}{8y_1} - \frac{y_1}{2}}}{2}\right]^{1/2} \quad (2.13)$$

где y_1 – какой-либо корень кубического уравнения $y^3 + 3py + 2q = 0$, $p = \frac{1}{3}$, $q = -1,185^2 \delta_*^2 / 16$.

Так как дискриминант этого уравнения $D > 0$, то уравнение имеет один действительный корень

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} [(\sqrt{1+0,208\delta_*^4} + 0,456\delta_*^2)^{1/3} + (\sqrt{1+0,208\delta_*^4} - 0,456\delta_*^2)^{1/3}] \quad (2.14)$$

Если принять, что

$$0,208\delta_*^4 \ll 1 \quad (2.15)$$

и разложить в ряды выражения, входящие в (2.14), отбрасывая при этом величины второго порядка малости, то получим $y_1 \approx 0,1755\delta_*^2$. Подставляя значения y_1 и d в выражения (2.13) и учитывая, что представляют интерес только положительные значения N , (так как $n^2 > 0$) получаем: при $d > 0$ ($\delta < 0$) положительным корнем является только корень N_1 , тогда как при $d < 0$ ($\delta > 0$) – корень N_3 . В результате будем иметь

$$n_1^2 = (\sqrt{1-0,0876\delta_*^2} + 0,2962\delta_*) \lambda_1 \varepsilon^{-1/4} \quad (2.16)$$

$$n_2^2 = (\sqrt{1-0,0876\delta_*^2} - 0,2962\delta_*) \lambda_1 \varepsilon^{-1/4} \quad (2.17)$$

где n_1 соответствует $\delta > 0$, а $n_2 - \delta < 0$. В частности, при $\delta = 0$ отсюда следует известная формула для цилиндрической оболочки средней длины [4]. Для $|\delta_*| \geq 0,5$ необходимо исходить из полного выражения (2.14). В этом случае, учитывая неравенства (1.2), также можно показать, что положительными корнями будут N_1 ($\delta < 0$), N_3 ($\delta > 0$). Определяя таким образом значение N_0 (при фиксированном δ_*) и подставляя его в выражение (2.10), получаем наименьшее значение частоты для незагруженной оболочки $\omega(N_0)$. На фиг. 1 приведены графики зависимости N_0 (кривая 1) и $\omega(N_0)/\omega_0(1)$ (кривая 2) от параметра δ_* , когда $T = 0$. При $\omega = 0$ из равенства (2.9) получаем

$$1,755T = N + N^{-3} + 2,37\delta_* N^{-2} + 1,404\delta_*^2 N^{-1} \quad (2.18)$$

Наименьшее значение T в зависимости от N реализуется при $T'_N = 0$. Отсюда получаем

$$N^4 - 1,404\delta_*^2 N^2 - 4,74\delta_* N - 3 = 0 \quad (2.19)$$

Положительный корень этого уравнения $N = N_*$ соответствует числу волн в поперечном направлении, при котором реализуется критическая нагрузка потери устойчивости T_* . Это уравнение рассматривалось в [5], где приведены выражения положительных корней в явном виде и соответствующие кривые зависимости N_* (кривая 1) и T_* (кривая 2) от δ_* (фиг. 2).

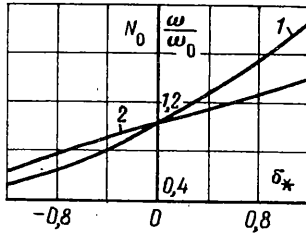
Отметим, что выражение (2.18) для определения критической нагрузки можно упростить на основании уравнений (2.19). Из уравнения (2.19) имеем

$$2,37\delta_* N^{-2} + 1,404\delta_*^2 N = -(2,37\delta_* N^{-2} + 3N_*^{-2} - N) \quad (2.20)$$

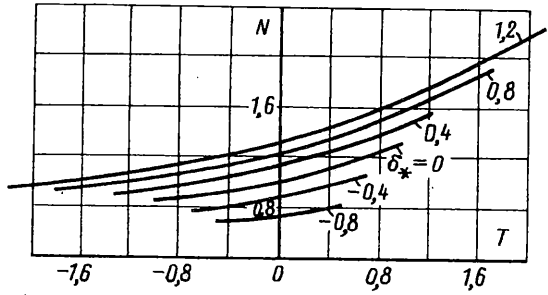
Подставляя равенство (2.20) в (2.18) получаем

$$T_* = 1,15(N_* - N_*^{-3} - 1,185\delta_* N_*^{-2}) \quad (2.21)$$

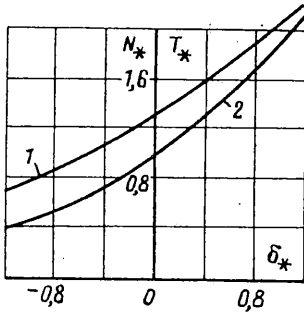
Рассмотрим теперь случай, когда $\delta_* \neq 0$, $T \neq 0$ ($T \geq 0$). Из условия минимальности



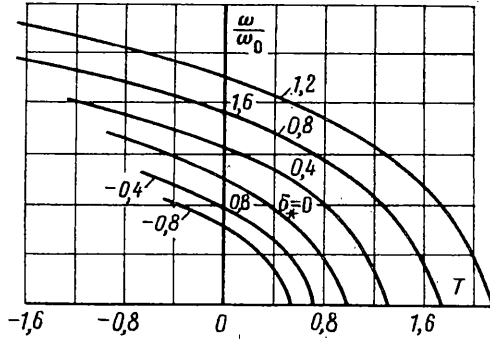
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

частоты, определяемого выражением (2.9), получаем следующую зависимость между T и N

$$T = 1,15(N - N^{-3} - 1,185\delta_* N_*^{-2}) \quad (2.22)$$

Нетрудно заметить, что из этого равенства следует также и соотношение (2.21).

На основании соотношения (2.22) при $T = 0$ получаем уравнение (2.11), корень которого $N = N_0$, как было отмечено, соответствует наименьшей частоте незагруженной оболочки $\omega(N_0)$, а при $T = T_*$ – уравнение (2.19), корень которого N_* соответствует критической нагрузке и $\omega = 0$. Таким образом при изменении T в интервале

$$0 \leq T \leq T_* \quad (2.23)$$

наименьшая частота $\omega(N, T)$ изменяется в интервале $\omega(N_0, T = 0) \geq \omega(N, T) \geq 0$.

На основании рассуждений аналогичных [4], можно показать, что при изменении T в интервале (2.23), значение N , реализующее наименьшую частоту $\omega(N, T)$ находится в интервале

$$N_0 \leq N \leq N_* \quad (2.24)$$

Значения N_0 и N_* представлены соответственно на фиг. 1, 2. В частности, при $\delta_* = 0$ неравенства (2.23), (2.24) принимают вид [4]: $0 \leq T \leq 1$, $1 \leq N \leq 1,315$.

На основании равенства (2.22) нетрудно построить кривые $N(T)$, реализующие минимальную частоту для различных значений δ_* . Для этого фиксируем δ_* и, задаваясь значениями N из интервала (2.24), определяем соответствующие значения T по формуле (2.22).

На фиг. 3 приведены кривые $N(T)$ для $\delta_* = -0,8; -0,4; 0; 0,4; 0,8; 1,2$. Приведенные кривые являются универсальными кривыми, справедливыми для любой оболочки средней длины, так как геометрические и физические параметры не фигурируют в соотношении (2.22). На основании графиков, представленных на фиг. 3, нетрудно заметить, что число окружных волн, при котором реализуется наименьшая частота нагруженной оболочки, зависит как от безразмерной амплитуды δ_* , так и от величины безразмерного напряжения T . На основании этих кривых и выражения (2.9) легко определить N и соответствующую минимальную частоту ω при заданных δ_* и T .

На фиг. 4 приведены графики изменения безразмерной наименьшей частоты в зависимости от безразмерного предварительного напряжения T для различных δ_* , при этом по оси ординат отложено отношение $\omega/\omega_0(1, 0)$ ($\omega(1, 0)$ – наименьшая частота незагруженной цилиндрической оболочки, определяемая вторым равенством (2.9)), а по оси абсцисс $T = t/t_*$ (t_* – характеризует критическое давление для цилиндрической оболочки и определяется равенством (2.5)).

В случае внутреннего давления $T = -|T|$. При этом равенства (2.9), (2.22) принимают вид

$$\omega^2 / \omega_0^2(1) = \frac{1}{2}(N^2 + N^{-2} + 2,37\delta_*N^{-1} + 1,404\delta_*^2 + 1,755|T|N) \quad (2.26)$$

$$|T| = 1,15(N^{-3} - N + 1,185\delta_*N^{-2}) \quad (2.27)$$

Выясним при каких условиях справедливо неравенство $n^2 \gg \lambda_1^2$ (в случае действия внутреннего давления), используемое для вышеизложенной теории. На основании соотношения (2.27), аналогично предыдущему, нетрудно построить $N(T)$, представленные на фиг. 3 слева от оси ординат. При этом видно, что в наихудшем случае для $\delta_* = -0,8$ при изменении $|T|$ в интервале $0 \leq T \leq T_*$ значение N находится в интервале $0,735 \geq N \geq 0,68$, тогда как при больших значениях δ_* границы интервала для N повышаются. Отсюда следует, что во всяком случае, при действии внутреннего давления, не превышающем величину внешнего критического давления, справедливо условие $n^2 \gg \lambda_1^2$ и следовательно справедливы формулы (2.26), (2.27). Кривые зависимости наименьшей частоты ω/ω_0 и соответствующего N от безразмерного внутреннего давления T и безразмерного параметра δ_* представлены слева от оси ординат на фиг. 3, 4.

Приведенные кривые показывают насколько существенно изменяются наименьшая частота и соответствующая форма волнообразования в зависимости от формы оболочки предварительного напряжения. Нетрудно видеть, что при $\delta > 0$ наименьшая частота возрастает, а при $\delta < 0$ – убывает в сравнении с наименьшей частотой цилиндрической оболочки, причем влияние малых отклонений (от цилиндрической формы) на минимальные частоты усиливается по мере возрастания внешнего давления и ослабевает по мере возрастания внутреннего давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Даревский В.М. Устойчивость оболочки, близкой по форме к цилиндрической // Проблемы расчета пространственных конструкций. М.: МИСИ, 1980. С. 35–45.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Физматгиз, 1967. 984 с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
4. Кукуджанов С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек // МТТ. 1968. № 3. С. 140–144.
5. Кукуджанов С.Н. Об устойчивости оболочек вращения, близких к цилиндрическим, при одновременном действии кручения и давления // Прикл. механика. 1992. Т. 28. № 7. С. 56–62.