МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. **В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**

О ДВУХ ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ И ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО ШПАНГОУТА

Исследованию передачи локальных нагрузок цилиндрической оболочке через кольцевое ребро посвящено большое количество работ[1]. Анализ публикаций по этой проблеме показывает, что в большинстве из них основное внимание уделялось определению перемещений и изгибающих моментов в ребре, в распределение контактных реакций выпадало с поля зрения. Но с позиций контактной задачи это распределение представляет первостепенный интерес, так как раскрывает характер силового воздействия одного тела на другое [1]. Поэтому далее поставлена цель выяснить как влияют разные допущения о характере контактного взаимодействия на напряженно-деформированное состояние системы оболочка – шпангоут при нагружении ребра сосредоточенными силами или моментами. Реализовано два предположения о характере контактного взаимодействия. В первом принято, что воздействие шпангоута на оболочку сводится к потоку касательных усилий по направляющей окружности цилиндра. Такая гипотеза характерна для большинства работ по этой проблеме. Свое начало она берет из ранних публикаций [2], [3], в которых оболочка считалась безмоментной, т.е. не сопротивлялась локальному изгибу. Затем его стали применять и для уравнений полубезмоментной теории. Во втором варианте контактной задачи предполагается, что оболочка и шпангоут взаимодействуют посредством не касательных, а нормальных к срединной поверхности усилий, распределенных по направляющей окружности. Исследование дало неожиданный результат, состоящий в том, что решение обоих вариантов контактной задачи с применением уравнений полубезмоментной теории оболочек и условия нерастяжимости ребра привело к одинаковым формулам для вычисления перемещений, усилий и моментов в ребре и оболочке. Компоненты напряженно-деформированного состояния оказались не зависящими от того, как взаимодействуют тела – через поток касательных или нормальных к срединной поверхности усилий.

1. Исходные уравнения и допущения. Введем безразмерную систему координат α и β. Первую координату направим вдоль оси цилиндра, а второй определим угол по направляющей окружности. Оболочку считаем бесконечной в направлении α и замкнутой по окружной координате $\beta \in [-\pi, \pi]$. Обозначим через R и h – радиус срединной поверхности и толщину оболочки. Модуль упругости и коэффициент Пуассона её материала примем равными E и ν. Замкнутый круговой шпангоут считаем расположенным в сечении $\alpha = 0$. Под действием сосредоточенных нагрузок он деформируется в своей плоскости. Момент инерции и площадь поперечного сечения шпангоута обозначим через I_2, F_2, а модуль упругости его материала – через E_2. Радиус ребра считаем равным радиусу оболочки, а возможной эксцентричностью подкрепления пренебрегаем.

Если на ребро действует система k радиальных сил P, регулярно расположенных по контуру, то деформации замкнутой оболочки с ребром можно представить в виде суммы осесимметричной и неосесимметричной составляющих. Первую легко найти решив совместно контактную задачу для уравнения краевого эффекта [4] и растя-

---

[1] *И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, В.П. Ольшанский.* Оболочки при локализованных воздействиях (обзор работ, основные результаты и направления исследований). М., 1988. 192 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.02.88, № 1222.

жения кольца. Это решение имеет вид

$$w_0(0)=\frac{kPR}{2\pi E_2 F_2},\quad q_0=\frac{kP}{2\pi R}\frac{1}{1+\mu},\quad \mu=\frac{E_2F_2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2Eh^2}$$

Здесь $w_0(0)$, q_0 – осесимметричные составляющие радиального перемещения и нормальной контактной реакции на линии подкрепления ($\alpha=0$).

Определим далее неосесимметричные составляющие. Деформации оболочки будем описывать уравнением полубезмоментной теории, записанным относительно разрешающей функции $\Phi=\Phi(\alpha,\beta)$ [5]:

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}+c^2\left(\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2\Phi=\frac{R^3}{Eh}\left(\frac{\partial q_\beta}{\partial\beta}+\frac{\partial q_z}{\partial\beta^2}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $c^2=D(R^2Eh)^{-1}$, $D=Eh^3/12$ – цилиндрическая изгибная жесткость; q_β, q_z – касательная и нормальная составляющие поверхностной нагрузки на оболочку.

Основные компоненты напряженного состояния в зоне ребра: тангенциальное усилие T_1 и изгибающий момент G_2 связаны с разрешающей функцией соотношениями [5]:

$$T_1=\frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2},\quad G_2=-\frac{D}{R^3}\left(\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\Phi \tag{1.2}$$

При необходимости их можно уточнить по методу синтеза напряженного состояния [4].

К дифференцированию разрешающей функции сводится также определение неосесимметричных составляющих радиального $W(\alpha,\beta)$ и касательного $V(\alpha,\beta)$ перемещений оболочки [5]:

$$V=-\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta},\quad W=\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} \tag{1.3}$$

Радиальные перемещения шпангоута $w(\beta)$ в его плоскости определим дифференциальным уравнением [6]:

$$\frac{E_2I_2}{R^4}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{d^2}{d\beta^2}+1\right)^2 w=\frac{d}{d\beta}Q(\beta)-T(\beta) \tag{1.4}$$

Здесь $Q(\beta)$, $T(\beta)$ – погонные нормальная и касательная нагрузки на ребро.

Ось шпангоута считаем нерастяжимой, что дает связь между радиальным и тангенциальным перемещениями

$$w(b)=-\frac{d}{d\beta}v\,(\beta) \tag{1.5}$$

Она согласуется с аналогичной зависимостью (1.3) для оболочки.

Используя записанные выше уравнения рассмотрим далее некоторые конкретные случаи локального нагружения ребра.

2. Изгиб шпангоута системой радиальных сил. Пусть k радиальных сил **P** расположены по периметру шпангоута, причем точка приложения одной из них имеет координаты (0, 0). Учитывая циклическую симметрию разложим внешнее воздействие в ряд по косинусам

$$p(k,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\cos(kn\beta),\quad p_n=\frac{kP}{\pi R} \tag{2.1}$$

В этом разложении отсутствует нулевая гармоника, поскольку речь идет об определении неосесимметричной составляющей деформаций.

Рассмотрим первый вариант контактной задачи. Предположим, что оболочка и ребро взаимодействуют только через поток касательных усилий с плотностью

$$T(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sin(kn\beta) \tag{2.2}$$

Тогда, положив $Q(\beta) = p(k, \beta)$ после подстановки выражений (1.5), (2.1), (2.2) в (1.4), получаем уравнение относительно тангенциальных перемещений шпангоута

$$\frac{E_2 I_2}{R^4}\frac{d^2}{d\beta^2}\left(\frac{d^2}{d\beta^2}+1\right)^2 v = \sum_{n=1}^{\infty}(knp_n + t_n)\sin(kn\beta) \tag{2.3}$$

Аналогичные перемещения в оболочке определим с помощью уравнения (1.1), положив там $q_z = 0$, $q_\beta = T(\beta)R^{-1}\delta(\alpha - 0)$, где $\delta(\alpha - 0)$ – функция Дирака.

Затухающее при $|\alpha| \to \infty$ решение уравнения изгиба оболочки

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4} + c^2\left(\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2 \Phi = \frac{R^2}{Eh}\delta(\alpha - 0)\sum_{n=1}^{\infty} t_n kn\cos(kn\beta)$$

легко построить косинус-преобразованием Фурье. Этот метод дает

$$\Phi = \frac{R^2}{\pi Eh}\sum_{n=1}^{\infty} knt_n \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda\alpha)d\lambda}{\lambda^4 + c^2(kn)^4(k^2n^2-1)^2}\cos(kn\beta) \tag{2.4}$$

Продифференцировав разрешающую функцию в соответствии с формулой (1.3), находим тангенциальные перемещения оболочки. На линии контакта с ребром решение имеет вид

$$V(0,\beta) = \frac{R}{\pi Eh}\sum_{n=1}^{\infty}(kn)^2 t_n \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda\alpha)d\lambda}{\lambda^4 + c^2(kn)^4(k^2n^2-1)^2}\sin(kn\beta) \tag{2.5}$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4 + a^4} = \frac{\pi}{(2a)^{3/2}} \tag{2.6}$$

выражение (2.5) сводим к более простому виду

$$V(0,\beta) = \frac{R}{Eh(2c)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n \sin(kn\beta)}{kn(k^2n^2-1)^{3/2}} \tag{2.7}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты t_n воспользуемся условием совместности деформаций ребра и оболочки, выражающем равенство тангенциальных перемещений $v(\beta) = V(0, \beta)$. Подставив ряд (2.7) в уравнение (2.3) получаем

$$-Rt_n(Eh(2c)^{3/2})^{-1} kn(k^2n^2-1)^{3/2} = knp_n + t_n$$

Откуда следует, что

$$t_n = -\frac{knap_n}{kn(k^2n^2-1)^{1/2} + a}, \quad a = \frac{R^3 Eh(2c)^{3/2}}{E_2 I_2}$$

Таким образом, в первом варианте контактной задачи взаимодействие тел сводится к потоку касательных усилий

$$T(\beta)=-\frac{kPa}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{kn\sin(kn\beta)}{kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a} \tag{2.8}$$

и ему соответствуют следующие выражения перемещений и разрешающей функции:

$$V(0,\beta)=-\frac{kPR^3}{\pi E_2I_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(kn\beta)}{(k^2n^2-1)^{3/2}(kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a)}$$

$$W(0,\beta)=-\frac{kPR^3}{\pi E_2I_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{kn\cos(kn\beta)}{(k^2n^2-1)^{3/2}(kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a)} \tag{2.9}$$

$$\Phi(\alpha,\beta)=-\frac{kPR^4(2c)^{3/2}}{\pi^2E_2I_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^2n^2}{kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda\alpha)d\lambda}{\lambda^4+c^2(kn)^4(k^2n^2-1)^2}\cos(kn\beta)$$

Заметим, что ряд для $W(0, \beta)$ совпадает с полученным в [7] путем решения краевой задачи для однородного уравнения деформаций оболочки.

Рассмотрим второй вариант контактной задачи. Предположим, что взаимодействие тел происходит за счет погонных контактных усилий

$$Q(\beta)=q(k,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\cos(kn\beta) \tag{2.10}$$

нормальных к срединной поверхности оболочки. Тогда $T(\beta) = 0$ и уравнение (1.4) можно понизить до четвертого порядка

$$\frac{E_2I_2}{R^4}\left(\frac{d^2}{d\beta^2}+1\right)^2w=p(k,\beta)-q(k,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-q_n)\cos(kn\beta) \tag{2.11}$$

Чтобы найти радиальные перемещения оболочки преобразуем уравнение (1.1), положив в нем $q_\beta = 0$, $q_z = R^{-1}q(k, \beta)\delta(\alpha - 0)$. С учетом (2.10) оно примет вид

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial\alpha^4}+c^2\left(\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2\Phi=-\frac{R^2}{Eh}\delta(\alpha-0)\sum_{n=1}^{\infty}q_nk^2n^2\cos(kn\beta)$$

Затухающее при $|\alpha| \to \infty$ решение, как прежде, построим косинус-преобразованием Фурье. Этот метод дает

$$\Phi=-\frac{R^2}{\pi Eh}\sum_{n=1}^{\infty}q_nk^2n^2\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda\alpha)d\lambda}{\lambda^4+c^2(kn)^4(k^2n^2-1)^2}\cos(kn\beta) \tag{2.12}$$

Продифференцировав разрешающую функцию в соответствии с (1.3) для определения радиальных перемещений при $\alpha = 0$ получаем выражение

$$W(0,\beta)=\frac{R}{\pi Eh}\sum_{n=1}^{\infty}q_n(kn)^4\int_0^{\infty}\frac{\cos(kn\beta)d\lambda}{\lambda^4+c^2(kn)^4(k^2n^2-1)^2}$$

Оно упрощается благодаря аналитическому вычислению несобственных интегралов по формуле (2.6) и принимает вид

$$W(0,\beta)=\frac{R}{Eh(2c)^{3/2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{knq_n}{(k^2n^2-1)^{3/2}}\cos(kn\beta) \tag{2.13}$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты q_n воспользуемся условием совместности деформаций, выражающем равенство радиальных перемещений контактирующих тел $w(\beta) = W(0, \beta)$. Подставив разложение (2.13) в уравнение (2.11), приходим к соотношению

$$E_2 I_2 (k^2 n^2 - 1)^{1/2} k n q_n (R^3 E h (2c)^{3/2})^{-1} = p_n - q_n$$

Из него следует, что

$$q_n = \frac{kP}{\pi R} \frac{a}{kn(k^2 n^2 - 1)^{1/2} + a} \tag{2.14}$$

Для вычисления нормальных контактных реакций и радиальных перемещений вместо (2.10) и (2.13) получаем ряды

$$Q(\beta) = q(k, \beta) = \frac{kP}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cos(kn\beta)}{kn(k^2 n^2 - 1)^{1/2} + a} \tag{2.15}$$

$$W(0, \beta) = \frac{kPR^3}{\pi E_2 I_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{kn \cos(kn\beta)}{(k^2 n^2 - 1)^{3/2} (kn(k^2 n^2 - 1)^{1/2} + a)}$$

Последний из них оказывается таким же как и при решении первого варианта контактной задачи, т.е. совпадает с (2.9). Если подставить значение q_n из (2.14) в (2.12), то аналогичное совпадение получим и для разрешающей функции $\Phi(\alpha, \beta)$, через которую выражаются внутренние силовые факторы. Таким образом, компоненты напряженно-деформированного состояния оболочки, связанные с разрешающей функцией соотношениями (1.2), (1.3), в рамках принятых допущений не зависят от того как взаимодействуют оболочка и шпангоут – через поток касательных или нормальных к срединной поверхности сил. Это относится и к изгибающему моменту в ребре, который можно найти по формуле [6]:

$$G(\beta) = -\frac{E_2 I_2}{R^2} \left(\frac{d^2 w}{d\beta^2} + w \right)$$

Преобразуем далее решения для контактных реакций к приближенным замкнутым формам. Для этого воспользуемся известными суммами рядов [8]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(nx)}{n^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \omega(\pi - |x|)}{\operatorname{sh}(\pi\omega)} \operatorname{sign}(x) \tag{2.16}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2\omega} \frac{\operatorname{ch} \omega(\pi - |x|)}{\operatorname{sh}(\pi\omega)} - \frac{1}{2\omega^2}$$

Учитывая их запишем

$$T(\beta) = -\frac{Pa}{\pi R} \left(\sum_{n=1}^{3} \left(\frac{1}{(n^2 - k^{-2})^{1/2} + a n^{-1} k^{-2}} - \frac{1}{n + a n^{-1} k^{-2}} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \sin(kn\beta) + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\beta) \frac{\operatorname{sh} \omega(\pi - k|\beta|)}{\operatorname{sh} \pi\omega} \right) \tag{2.17}$$

$$Q(\beta) = \frac{Pa}{k\pi R} \left(\sum_{n=1}^{3} \left(\frac{1}{n(n^2 - k^{-2})^{1/2} + a k^{-2}} - \frac{1}{n^2 + a k^{-2}} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \cos(kn\beta) + \frac{\pi}{2\omega} \frac{\operatorname{ch} \omega(\pi - k|\beta|)}{\operatorname{sh} \pi\omega} - \frac{1}{2\omega^2} \right), \quad \omega = \frac{\sqrt{a}}{k}, \quad |\beta| \leqslant \frac{\pi}{k}$$

Это преобразование показывает, что распределение касательных контактных усилий имеет разрывы первого рода в точках приложения внешних радиальных сил к ребру. Высота скачка в точках разрыва равна Pa/R. Во втором варианте постановки контактной задачи нормальные контактные усилия являются непрерывными величинами, что лучше согласуется с физическими представлениями о контактном взаимодействии тел.

Заслуживает внимания то, что точность приближенных замкнутых форм решений (2.17) будет повышаться с увеличением количества внешних сил в нагрузке.

Аналогичные формы решений можно предложить и для других искомых величин. Дадим их для радиальных перемещений и изгибающих моментов в ребре. Воспользовавшись известной суммой ряда [8]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2-\varepsilon^2}=\frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{\pi}{2\varepsilon}\frac{\cos\varepsilon(\pi-|x|)}{\sin\varepsilon\pi},\quad \varepsilon\notin N$$

и тождеством

$$\frac{1}{(n^2-k^{-2})(n^2+(a-1)k^{-2})}=\frac{k^2}{a}\left(\frac{1}{n^2-k^{-2}}-\frac{1}{n^2+(a-1)k^{-2}}\right)$$

запишем для перемещений

$$w(\beta)=\frac{PR^3}{\pi E_2 I_2 k^3}\left(\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{(n^2-k^{-2})^2+ak^{-2}n^{-1}(n^2-k^{-2})^{3/2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(-1)}{(n^2-k^{-2})^2+ak^{-2}(n^2-k^{-2})}\cos(kn\beta)+\frac{k^4}{2a}\times\left(1-\frac{\pi\cos(\pi/k-|\beta|)}{k\sin(\pi/k)}+f(k,\beta)\right)\right)\right) \tag{2.18}$$

$$f(k,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{k\sqrt{1-a}}\dfrac{\cos(\sqrt{1-a}(\pi/k-|\beta|))}{\sin(\sqrt{1-a}\pi/k)}-\dfrac{1}{1-a} & \text{при } a<1\\[2ex] \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\pi}{k}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{k}-|\beta|\right)^2 & \text{при } a=1\\[2ex] \dfrac{1}{a-1}-\dfrac{\pi}{k\sqrt{a-1}}\dfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{a-1}(\pi/k-|\beta|))}{\operatorname{sh}(\sqrt{a-1}\pi/k)} & \text{при } a>1\end{cases} \tag{2.19}$$

Случай $a = 0$ соответствует изгибу ребра без оболочки. Для него

$$w(\beta)=\frac{PR^3}{4\pi E_2 I_2}\left(\frac{\pi}{\sin(\pi/k)}\left(\frac{\pi\cos\beta}{k\sin(\pi/k)}+\cos(\pi/k-|\beta|)+|\beta|\sin(|\beta|-\pi/k)\right)-2k\right) \tag{2.20}$$

К этой формуле приходим предельным переходом, устремив в (2.18) $a\to 0$.

Чтобы найти приближенное замкнутое решение для моментов в ребре требуется просуммировать ряд

$$G(\beta)=\frac{PR}{\pi k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(kn\beta)}{n^2-k^{-2}+ak^{-2}n^{-1}(n^2-k^{-2})^{1/2}} \tag{2.21}$$

Выполнив преобразования аналогичные предыдущим получаем

$$G(\beta)=\frac{PR}{\pi k}\left(\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{h^2-k^{-2}+ak^{-2}n^{-1}(n^2-k^{-2})^{1/2}}-\frac{1}{n^2+(a-1)k^{-2}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos(kn\beta)-0,5k^2 f(k,\beta)\right) \tag{2.22}$$

где функция $f(k, \beta)$ задана выражениями (2.19).

При изгибе кольца без оболочки предельным переходом $a \to 0$ из (2.22) находим

$$G(\beta) = -\frac{PR}{2}\left(\frac{\cos(\pi/k - |\beta|)}{\sin(\pi/k)} - \frac{k}{\pi}\right) \tag{2.23}$$

Заметим, что в [7] суммы (2.20) и (2.23) использовались для ускорения сходимости рядов (2.15) и (2.21). Здесь же удалось эти ряды свернуть к элементарным функциям.

3. Изгиб шпангоута сосредоточенными моментами. Предположим, что вместо радиальных сил в шпангоуту приложены сосредоточенные моменты M. Тогда полученные выше ряды нужно продифференцировать по β и заменить P на M. Это касается и замкнутых форм решений. Не выписывая результатов дифференцирования проанализируем к каким особенностям в распределениях контактных реакций приводит этот вид нагружения. Поскольку

$$(\operatorname{sign}\beta)'_\beta = 2\delta(\beta - 0), \quad (|\beta|)'_\beta = \operatorname{sign}\beta$$

то из решений (2.17) следует, что касательные контактные реакции в точках приложения моментов будут иметь сосредоточенные силы величиной Ma/R, а нормальные контактные реакции скачка такой же высоты.

4. Нагружение шпангоута касательными силами. Пусть ребро нагружено системой касательных сил F, регулярно расположенных по периметру шпангоута, так что одна из них имеет координаты точки приложения (0, 0). Разложим внешнюю касательную нагрузку в ряд по косинусам

$$\tau(k,\beta) = \frac{kF}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(kn\beta)$$

и решим контактную задачу, как и выше, в двух постановках. Предположим сначала, что взаимодействие тел сводится к потоку касательных усилий $T(\beta)$. В этом случае

$$T(\beta) = \frac{kFa}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(kn\beta)}{kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a} \tag{4.1}$$

$$\Phi(\alpha,\beta) = -\frac{kF(2c)^{3/2}}{\pi^2 E_2 I_2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{kn}{kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda\alpha)d\lambda}{\lambda^2+c^2(kn)^4(k^2n^2-1)^2}\sin(kn\beta)$$

При второй постановке контактной задачи распределение нормальных реакций $Q(\beta)$ имеет вид

$$Q(\beta) = \frac{Fa}{\pi R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(kn\beta)}{n(kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a)} \tag{4.2}$$

Выражение разрешающей функции оказывается таким же как и в первом случае, т.е. совпадает с (4.1).

Таким образом, и при действии касательных внешних нагрузок независимо от постановки контактной задачи вычисление внутренних силовых факторов и перемещений в ребре и оболочке сводится к одним и тем же формулам, причем между контактными реакциями выполняется соотношение $T(\beta) = (Q(\beta))'_\beta$.

Преобразуем ряды (4.1), (4.2), выражающие распределения контактных реакций, к

Таблица 1

a	m	$\overline{T}(\beta)$	$\overline{T}_n(\beta)$	$\overline{Q}(\beta)$	$\overline{Q}_n(\beta)$
	0	–	78,540	41,347	41,330
	1	63,092	63,098	19,100	19,117
0,5	2	47,551	47,626	1,712	1,704
	3	31,834	31,762	–10,764	–10,764
	4	15,961	16,013	–18,276	–18,270
	5	0,000	0,000	–20,785	–20,794
	0	–	157,080	76,542	76,508
	1	117,636	117,649	33,568	33,600
	2	83,861	84,009	2,030	2,014
1	3	53,925	53,784	–19,537	–19,537
	4	26,387	26,489	–32,109	–32,097
	5	0,000	0,000	–36,240	–36,257
	0	–	785,398	260,541	260,385
	1	402,367	402,477	80,592	80,737
5	2	204,481	205,127	–11,416	–11,489
	3	99,948	99,332	–57,581	–57,580
	4	40,771	41,226	–78,924	–78,872
	5	0,000	0,000	–85,112	–85,187
	0	–	1570,796	404,731	404,478
	1	596,449	596,741	88,679	88,935
10	2	226,451	227,562	–31,453	–31,583
	3	84,819	83,773	–76,916	–76,912
	4	28,298	29,082	–93,450	–93,357
	5	0,000	0;000	–97,588	–97,717

элементарным функциям. Учитывая сумму (2.16) находим

$$T(\beta)=\frac{Fa}{\pi kR}\left(\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{n(n^2-k^{-2})^{1/2}+ak^{-2}}-\frac{1}{n^2+ak^{-2}}\right)\cos(kn\beta)+\right.$$

$$\left.+\frac{k^2}{2}\left(\frac{\pi}{\omega k^2}\frac{\operatorname{ch}\omega(\pi-k|\beta|)}{\operatorname{sh}(\pi\omega)}-\frac{1}{a}\right)\right),\quad |\beta|\leqslant\frac{\pi}{k} \tag{4.3}$$

$$Q(\beta)=\frac{F}{\pi R}\left(\sum_{n=1}^{3}\left(\frac{1}{kn(k^2n^2-1)^{1/2}+a}-\frac{1}{k^2n^2+a}\right)\frac{a}{n}\sin(kn\beta)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sign}(\beta)\left(\frac{\pi-k|\beta|}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sh}\omega(\pi-k|\beta|)}{\operatorname{sh}(\pi\omega)}\right)\right)$$

Заметим, что при $a\to 0$ эти замкнутые решения имеют неопределенности типа 0/0. Они легко раскрываются и дают $T(\beta)=Q(\beta)=0$, что соответствует физическим представлениям.

5. Анализ результатов расчета. В табл. 1 приведены безразмерные значения контактных усилий $\overline{T}(\beta)=-100\pi RT(\beta)/P$ и $\overline{Q}(\beta)=100\pi RQ(\beta)/P$, а в табл. 2 – безразмерные значения перемещений $\overline{w}(\beta)=10^3w(\beta)E_2I_2/(PR^3)$ и изгибающих моментов в ребре $\overline{G}(\beta)=100G(\beta)/(PR)$. Они получены двумя способами: путем численного сумми-

Таблица 2

a	m	$w(\beta)$	$w_n(\beta)$	$\overline{G}(\beta)$	$\overline{G}_n(\beta)$
	0	65,370	65,370	28,978	28,981
	1	50,486	50,486	14,192	14,192
0,5	2	16,576	16,576	1,737	1,737
	3	–20,904	–20,904	–7,706	–7,706
	4	–49,086	–49,086	–13,601	–13,601
	5	–59,470	–59,470	–15,605	–15,606
	0	58,354	58,354	26,737	26,740
	1	44,863	44,863	12,491	12,491
	2	14,509	14,509	1,211	1,211
1	3	–18,703	–18,703	–6,983	–6,983
	4	–43,512	–43,512	–11,963	–11,963
	5	–52,624	–52,624	–13,634	–13,634
	0	31,832	31,832	17,889	17,891
	1	23,742	23,742	6,087	6,087
	2	6,948	6,948	–0,463	–0,463
5	3	–10,309	–10,309	–4,090	–4,090
	4	–22,696	–22,696	–5,931	–5,931
	5	–27,160	–27,160	–6,497	–6,498
	0	20,597	20,597	13,730	13,732
	1	14,942	14,942	3,424	3,426
10	2	4,000	4,000	–0,853	–0,853
	3	–6,688	–6,688	–2,725	–2,725
	4	–14,138	–14,138	–3,538	–3,538
	5	–16,787	–16,787	–3,771	–3,772

рования рядов (2.8), (2.15). (2.21) на персональном компьютере и с помощью приближенных замкнутых решений (2.17), (2.18), (2.22).

Величины, вычисленные вторым способом с помощью замкнутых форм решений отмечены в таблицах индексом n. При суммировании рядов на ПЭВМ в первом способе расчета удерживали 4000 членов. Расчет проведен в предположении, что шпангоут нагружен двумя (k = 2) радиальными силами для различных значений параметра a и угла $\beta = m\pi/10$. Сравнение соответствующих величин с индексом n и без него показывает, что приближенные замкнутые решения обеспечивают хорошую точность расчета, причем она будет повышаться с увеличением количества сил в нагрузке. Наибольшие расхождения наблюдаются для касательных контактных реакций $T(\beta)$ и это обусловленно медленной сходимостью ряда (2.8). Для радиальных перемещений и изгибающих моментов в ребре имеем совпадение до трех значащих цифр. К тому же эти величины находятся в хорошем соответствии с числовыми данными на графиках в [7], [9]. С увеличением параметра a, при фиксированной изгибной жесткости ребра, происходит существенное увеличение контактных реакций и значительное уменьшение радиальных перемещений и изгибающих моментов. При этом усиливается концентрация контактных реакций в окрестности точки приложения радиальной силы к ребру.

В табл. 3 даны безразмерные значения контактных реакций $\overline{T}(\beta) = 100\pi RT(\beta) / F$ и $\overline{Q}(\beta) = 100\pi RQ(\beta) / F$, вычисленные в предположении, что шпангоут нагружен тремя (k = 3) касательными силами. Величины без индекса n найдены с помощью рядов (4.1) и (4.2), в которых удерживали 4000 членов. Индексом n отмечены результаты расчета по формулам (4.3). Проведенные вычисления в широком интервале значений пара-

Таблица 3

a	m	$\overline{T}(\beta)$	$\overline{T}_n(\beta)$	$\overline{Q}(\beta)$	$\overline{Q}_n(\beta)$
	0	52,968	52,962	0,000	0,000
	1	23,824	23,834	7,914	7,913
1	2	1,771	1,767	10,475	10,475
	3	–13,656	–13,656	9,118	9,117
	4	–22,784	–22,781	5,194	5,194
	5	–25,806	–25,811	0,000	0,000
	0	212,471	212,446	0,000	0,000
	1	80,557	80,603	29,633	29,632
5	2	–1,847	–1,870	37,180	37,183
	3	–51,195	–51,195	31,152	31,150
	4	–77,347	–77,330	17,345	17,346
	5	–85,522	–85,546	0,000	0,000
	0	353,397	353,353	0,000	0,000
	1	111,404	111,491	45,959	45,957
10	2	–14,583	–14,627	54,658	54,662
	3	–78,772	–78,771	44,105	44,101
	4	–108,790	–108,757	24,015	24,018
	5	–117,542	–117,587	0,000	0,000
	0	557,675	557,608	0,000	0,000
	1	128,587	128,742	65,048	65,046
20	2	–41,478	–41,557	71,456	71,464
	3	–108,406	–108,404	54,675	54,667
	4	–133,563	–133,507	28,883	28,888
	5	-139,989	–140,067	0,000	0,000

метра a и различных углах $\beta = m\pi/15$ показали, что приближенные замкнутые решения дают хорошую точность и отпадает потребность численно суммировать медленно сходящиеся ряды при определении контактных реакций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
2. *Hoff N.I.* Stress in Reinforced Monocoque Cylinder under Concentrated Symmetric Transwerse Loads // J. Appl. Mech. 1944. V. 11. N 4. P. 235–239.
3. *Балабух Л.И.* Прочность и устойчивость шпангоута, связанного с тонкой обшивкой // Тр. ЦАГИ, 1949. Вып. 681. 40 с.
4. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
5. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
6. *Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М.* Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. Киев: Наук. думка, 1988. 288 с.
7. *Власов В.В., Бокучава М.Б.* Расчет неограниченных цилиндрических оболочек на сосредоточенные нагрузки, передающиеся через упругий шпангоут // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение. 1981. Вып. 22. С. 271–290.
8. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. *Власов В.В., Бокучава М.Б.* Расчет цилиндрических оболочечных конструкций на сосредоточенные нормальные нагрузки, передающиеся через упругий шпангоут // Прочность, устойчивость и колебания тонкостенных конструкций летательных апааратов. М.: МАИ, 1981. С. 40–45.

Харьков

Поступила в редакцию
27.IV.1995