МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. Л.М. ЗУБОВ

НЕПРЕРЫВНО РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ДИСЛОКАЦИИ И ДИСКЛИНАЦИИ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ

Сформулирована геометрически линейная теория оболочек с непрерывно распределенными дефектами в виде дислокаций и дисклинаций. Выведена система уравнений, описывающих равновесие оболочки при заданных плотностях дислокаций и дисклинаций. За основу принята модель оболочки типа Коссера, в рамках которой возможен полный и непротиворечивый учет распределенных ротационных дефектов – дисклинаций. Полученные результаты могут иметь значение для установления связи между микро- и макросвойствами поверхностных кристаллов, пленок, биологических мембран, а также для математического моделирования указанных двумерных физических систем.

1. Плотности дислокаций и дисклинаций. Система уравнений, описывающих малые деформации упругой оболочки типа Коссера, состоит [1, 2] из уравнений равновесия в усилиях и моментах

$$\operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{f} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{l} = 0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{r}^\alpha \cdot \partial\mathbf{\Phi} / \partial y^\alpha, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \mathbf{r}^\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{r}_\beta = \partial\mathbf{r} / \partial y^\beta \quad (\alpha, \beta = 1,\ 2), \quad \mathbf{T}_\times = (\mathbf{E}\times\mathbf{E}) \cdot\cdot \mathbf{T}$$

уравнений состояния, называемых также определяющими соотношениями

$$\mathbf{T} = \partial W / \partial \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{M} = \partial W / \partial \boldsymbol{\varkappa}, \quad W = W(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\varkappa}) \tag{1.2}$$

и геометрических соотношений

$$\boldsymbol{\epsilon} = \operatorname{grad}\mathbf{u} + \mathbf{g}\times\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varkappa} = \operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi} \tag{1.3}$$

$$\operatorname{grad}\mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{r}^\alpha \cdot \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial y^\alpha}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{E} - \mathbf{nn}$$

В (1.1)–(1.3) $\mathbf{T}$ – тензор усилий, $\mathbf{M}$ – тензор моментов, $\mathbf{f}$ – вектор интенсивности распределенной по поверхности оболочки σ внешней силовой нагрузки, $\mathbf{l}$ – вектор интенсивности распределенной по σ внешней моментной нагрузки, $\boldsymbol{\epsilon}$ – тензор деформаций, $\boldsymbol{\varkappa}$ – тензор изгибных деформаций, W – удельная (на единицу площади поверхности σ) потенциальная энергия деформации оболочки, y^1, y^2 – гауссовы координаты на поверхности σ, $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к σ, $\mathbf{E}$ – трехмерный единичный тензор, $\mathbf{g}$ – первый фундаментальный тензор поверхности, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки поверхности σ, $\mathbf{r}_\beta$ и $\mathbf{r}^\alpha$ – основной и взаимный базисы на σ, $\mathbf{\Phi}(y^1, y^2)$ – некоторый тензор произвольного ранга в трехмерном евклидовом пространстве, grad и div – операторы градиента и дивергенции на поверхности, δ_β^α – символ Кронекера, $\mathbf{u}(y^1, y^2)$ – векторное поле смещений оболочки σ, $\boldsymbol{\varphi}(y^1, y^2)$ – векторное поле поворотов оболочки, которое кинематически независимо от поля смещений $\mathbf{u}$. Символ $\mathbf{T}_\times$ означает векторный инвариант тензора второго ранга $\mathbf{T}$. В частности, для диады векторов имеем $(\mathbf{ab})_\times = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Тензоры деформаций, изгибных деформаций, усилий и моментов удовлетворяют соотношениям $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\varkappa}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}=0$. Вектор $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{n}$ является количественной характеристикой поперечных сдвигов в упругой оболочке, а вектор $\mathbf{T}\cdot\mathbf{n}$ характеризует перерезывающие усилия.

Зависимости (1.2) усилий и моментов от деформаций и изгибных деформаций могут быть нелинейными, т.е. материал оболочки может обладать физической нелинейностью.

Исключив вектор смещений и вектор поворотов из соотношений (1.3), придем к уравнениям совместности деформаций

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa})=0,\quad \operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\epsilon})+(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa})_\times=0 \tag{1.4}$$

$$\mathbf{e}=-\mathbf{E}\times\mathbf{n}=-\mathbf{g}\times\mathbf{n}$$

Здесь $\mathbf{e}$ – дискриминантный тензор поверхности [3]. При выводе (1.4) использовано тождество [3] $\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi})=0$ справедливое для любого дважды дифференцируемого тензорного поля, определенного на σ.

Рассмотрим задачу определения полей перемещений и поворотов оболочки при заданных непрерывно дифференцируемых на σ тензорных полях деформаций $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$. На основании (1.3) имеем

$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}_0+\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\varkappa},\quad \boldsymbol{\varphi}_0=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}_0) \tag{1.5}$$

$$d\mathbf{u}=d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{\varphi}\times d\mathbf{r} \tag{1.6}$$

Подставив (1.5) в (1.6) и интегрируя, получим выражение для $\mathbf{u}$ в виде двукратного интеграла. Меняя порядок интегрирования, можно двукратный интеграл свести к однократному и найти следующее представление для поля перемещений оболочки

$$\mathbf{u}(\mathbf{r})=\mathbf{u}_0+\boldsymbol{\varphi}_0\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)+\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'\cdot[\boldsymbol{\epsilon}'+\boldsymbol{\varkappa}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] \tag{1.7}$$

$$\mathbf{u}_0=\mathbf{u}(\mathbf{r}_0),\quad \boldsymbol{\epsilon}'=\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}'),\quad \boldsymbol{\varkappa}'=\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{r}')$$

Штрихом в (1.7) отмечена переменная интегрирования. Легко видеть, что необходимые и достаточные условия независимости интегралов в (1.5), (1.7) от пути интегрирования в односвязной области σ совпадают с уравнениями совместности деформаций (1.4). Предположим теперь, что поверхность σ многосвязна и гомеоморфна кругу с круговыми отверстиями, а функции $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r})$ и $\boldsymbol{\varkappa}(\mathbf{r})$ однозначны в этой многосвязной области. Рассмотрим замкнутый контур C_k, охватывающий одно из отверстий. Полагая в (1.5), (1.7) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$, найдем приращение векторов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{u}$ при обходе этого контура

$$\boldsymbol{\varphi}_+-\boldsymbol{\varphi}_-=\mathbf{q}_k,\quad \mathbf{u}_+-\mathbf{u}_-=\mathbf{b}_k+\mathbf{q}_k\times\mathbf{r}_0 \tag{1.8}$$

$$\mathbf{q}_k=\oint_{C_k} d\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\varkappa},\quad \mathbf{b}_k=\oint_{C_k} d\mathbf{r}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}-\boldsymbol{\varkappa}\times\mathbf{r}) \tag{1.9}$$

Векторы $\mathbf{b}_k$ и $\mathbf{q}_k$, называемые соответственно вектором Бюргерса и вектором Франка, не зависят от выбора замкнутого контура C_k при условии, что контур охватывает только k-е отверстие. Если неограниченно уменьшать диаметры отверстий, то получим оболочку с дискретным набором дислокаций Вольтера, или изолированных дефектов, каждый из которых представляет собой комбинацию трансляционной дислокации и дисклинации и характеризуется двумя векторными параметрами – вектором Бюргерса и вектором Франка. При этом оси дефектов следует представлять себе как прямые, пересекающие поверхность σ и ортогональные к ней, т.е. имеющие направление нормали $\mathbf{n}$ в точке расположения дефекта.

Перейдем от дискретного набора дислокаций Вольтерра к непрерывному распределению дислокаций и дисклинаций в оболочке, следуя методу, применявшемуся в [4–7] для трехмерной упругой среды. При помощи (1.9) найдем суммарный вектор Франка для системы дефектов, расположенных на некотором участке σ_0 поверхности σ:

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{q}_k = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varkappa} \tag{1.10}$$

В силу известных свойств криволинейных интегралов и однозначности тензорного поля $\boldsymbol{\varkappa}$ сумму интегралов в (1.10) можно заменить одним интегралом по замкнутому контуру C_0, охватывающему все дефекты в области σ_0

$$\mathbf{Q} = \oint_{C_0} d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varkappa} \tag{1.11}$$

Предположим теперь, что дефекты распределены непрерывно по поверхности σ и будем считать, что для результирующего вектора Франка всех дефектов, содержащихся в области σ_0, ограниченной контуром C_0, сохраняется формула (1.11). При непрерывном распределении дефектов тензорное поле $\boldsymbol{\varkappa}$ можно считать непрерывным и дифференцируемым в σ_0, что позволяет преобразовать контурный интеграл в (1.11) в интеграл по поверхности σ_0. Кроме того, надо иметь в виду, что при переходе к непрерывному распределению дефектов происходит качественное изменение физического смысла тензоров деформаций, в частности, тензора изгибной деформации $\boldsymbol{\varkappa}$. В континуальной теории дислокаций [5–7] составляющая деформации, обусловленная наличием распределенных дефектов, называется необратимой или пластической и обозначается $\boldsymbol{\varkappa}_p$. Таким образом, суммарный вектор Франка дефектов, распределенных по участку оболочки σ_0, представляется формулой

$$\mathbf{Q} = \iint_{\sigma_0} \mathbf{n} \cdot (\mathrm{rot}\boldsymbol{\varkappa}_p) d\sigma = \iint_{\sigma_0} \mathrm{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varkappa}_p) d\sigma$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Phi} \equiv \mathbf{r}^\alpha \times \partial \boldsymbol{\Phi} / \partial y^\alpha \tag{1.12}$$

Поскольку участок σ_0 можно взять произвольным, формула (1.12) дает основание назвать подынтегральное выражение плотностью дисклинаций $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varkappa}_p) \tag{1.13}$$

Заметим, что в отличие от трехмерной среды [6], плотность дисклинаций в оболочках является не тензорной, а векторной величиной.

Сравнивая (1.4) и (1.13), видим, что при $\boldsymbol{\beta} \neq 0$ тензор $\boldsymbol{\varkappa}_p$ не удовлетворяет уравнениям совместности. Это означает, что не существует векторного поля $\boldsymbol{\varphi}_p$ такого, что $\mathrm{grad}\, \boldsymbol{\varphi}_p = \boldsymbol{\varkappa}_p$.

Чтобы ввести понятие плотности дислокаций в оболочке, рассмотрим сначала случай, когда дисклинации отсутствуют, т.е. плотность дисклинаций $\boldsymbol{\beta}$ равна нулю. Тогда $\mathbf{n} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{\varkappa}_p = 0$ и существует вектор $\boldsymbol{\varphi}_p$, для которого $\mathrm{grad}\boldsymbol{\varphi}_p = \boldsymbol{\varkappa}_p$. Следовательно, существует пластическая дисторсия, определяемая согласно (1.3) соотношением

$$(\mathrm{grad}\, \mathbf{u})_p = \boldsymbol{\epsilon}_p - \mathbf{g} \times \boldsymbol{\varphi}_p \tag{1.14}$$

Если векторы Франка для каждого из изолированных дефектов, расположенных на участке σ_0, равны нулю, то вектор Бюргерса дефекта определяется более простой по сравнению с (1.9) формулой

$$\mathbf{b}_k = \oint_{C_k} d\mathbf{r} \cdot (\mathrm{grad}\, \mathbf{u}) = \oint_{C_k} d\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{g} \times \boldsymbol{\varphi})$$

а суммарный вектор Бюргерса всех дефектов, расположенных в области σ_0, выражается так

$$\mathbf{B}=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{b}_k=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}d\mathbf{r}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}-\mathbf{g}\times\boldsymbol{\varphi})=\oint_{C_0}d\mathbf{r}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}-\mathbf{g}\times\boldsymbol{\varphi}) \tag{1.15}$$

Переходя к непрерывному распределению трансляционных дислокаций, преобразуем контурный интеграл в (1.15) в поверхностный, а дисторсию будем считать, аналогично предыдущему, пластической дисторсией. Это приводит с учетом (1.14) к такому выражению для результирующего вектора Бюргерса

$$\mathbf{B}=\iint_{\sigma_0}\boldsymbol{\alpha}d\sigma,\quad \boldsymbol{\alpha}=\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_p-\mathbf{e}\times\boldsymbol{\varphi}_p) \tag{1.16}$$

Используя непосредственно проверяемое тождество

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\psi})=-(\mathbf{e}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{\psi})_\times$$

где $\boldsymbol{\psi}$ – дифференцируемое на σ векторное поле, исключим из выражения (1.16) вектор $\boldsymbol{\varphi}_p$

$$\boldsymbol{\alpha}=\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_p)+(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa}_p)_\times \tag{1.17}$$

На основании (1.16) векторную величину $\boldsymbol{\alpha}$ следует назвать плотностью трансляционных дислокаций. Выражение (1.17) примем в качестве определения плотности дислокаций оболочки также и в общем случае, т.е. тогда, когда плотность дисклинаций $\boldsymbol{\beta}\neq 0$.

Теперь вычислим, используя определения плотностей дислокаций и дисклинаций (1.17) и (1.13) результирующий вектор Бюргерса для системы непрерывно распределенных дефектов, отказавшись от упрощающего предположения об отсутствии дисклинаций. На основании общей формулы (1.9) имеем

$$\mathbf{B}=\oint_{C_0}d\mathbf{r}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}_p-\boldsymbol{\varkappa}_p\times\mathbf{r})=\iint_{\sigma_0}\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_p-\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa}_p\times\mathbf{r})d\sigma \tag{1.18}$$

Преобразуем, используя (1.13), второе слагаемое в подынтегральном выражении (1.18): $\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa}_p\times\mathbf{r})=\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}-(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa}_p)_\times$. Отсюда с учетом (1.17) получаем

$$\mathbf{B}=\iint_{\sigma_0}(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{r}\times\boldsymbol{\beta})d\sigma \tag{1.19}$$

Формула (1.19) показывает, что при непрерывном распределении дефектов общего вида результирующий вектор Бюргерса определяется не только плотностью дислокаций, но и плотностью дисклинаций. Аналогичное утверждение справедливо в трехмерной континуальной теории дисклинаций [6].

Отметим, что отличие континуальной теории дислокаций и дисклинаций в оболочках от соответствующей трехмерной теории [6] состоит не только в том, что плотности $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ являются векторными, а не тензорными величинами, но и в том, что в теории оболочек векторные поля $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ не обязаны удовлетворять никаким дифференциальным уравнениям.

2. Система уравнений равновесия. Для формулировки краевой задачи о равновесии оболочки с заданными плотностями дислокаций и дисклинаций надо учесть, что в геометрически линейной теории полная деформация $\boldsymbol{\epsilon}_0$, также как полная изгибная деформация $\boldsymbol{\varkappa}_0$ складывается из двух составляющих: упругой и пластической

$$\boldsymbol{\epsilon}_0=\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{\epsilon}_p,\quad \boldsymbol{\varkappa}_0=\boldsymbol{\varkappa}+\boldsymbol{\varkappa}_p \tag{2.1}$$

Упругие деформации $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ являются параметрами состояния оболочки и связаны с внутренними усилиями $\mathbf{T}$ и моментами $\mathbf{M}$ определяющими соотношениями (1.2).

Полные деформации $\boldsymbol{\epsilon}_0$ и $\boldsymbol{\varkappa}_0$ удовлетворяют уравнениям совместности (1.4). Отсюда и из (1.13), (1.17), (2.1) получаем уравнения для упругих деформаций

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa})+\boldsymbol{\beta}=0, \quad \operatorname{div}(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\epsilon})+(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa})_\times+\boldsymbol{\alpha}=0 \tag{2.2}$$

Если выразить при помощи определяющих соотношений (1.2) тензоры усилий и моментов через упругие деформации и подставить в уравнения равновесия (1.1), то они вместе с уравнениями (2.2) составят полную систему уравнений для определения тензорных полей $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ при заданных внешних нагрузках $\mathbf{f}$, $\mathbf{l}$ и заданных плотностях дислокаций и дисклинаций $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

Уравнения (2.2), которые можно назвать уравнениями несовместности деформаций, с точностью до обозначений повторяют уравнения равновесия (1.1) в усилиях и моментах. Очевидно, что системы уравнений (1.1) и (2.2) переходят одна в другую при следующих заменах:

$$\mathbf{T}\rightleftarrows \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\varkappa}, \quad \mathbf{M}\rightleftarrows \mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{f}\rightleftarrows\boldsymbol{\beta}, \quad \mathbf{l}\rightleftarrows\boldsymbol{\alpha} \tag{2.3}$$

Идентичность уравнений равновесия в усилиях и моментах при отсутствии распределенных по σ нагрузок уравнениям совместности (неразрывности) хорошо известна в теории оболочек и составляет содержание статико-геометрической аналогии [8]. Здесь указанная аналогия обобщена на случай наличия поверхностной нагрузки, причем интенсивности силовой нагрузки $\mathbf{f}$ в этой аналогии соответствует плотность дисклинаций $\boldsymbol{\beta}$, а интенсивности моментной распределенной нагрузки $\mathbf{l}$ соответствует плотность дислокаций $\boldsymbol{\alpha}$.

3. Вариационный метод построения теории оболочек с распределенными дефектами. К полученной выше системе уравнений равновесия оболочки с непрерывно распределенными дефектами можно прийти другим путем, используя вариационный принцип дополнительной энергии и не вводя в рассмотрение пластических деформаций. Рассмотрим многосвязную упругую оболочку, поверхность которой σ ограничена простым замкнутым внешним контуром γ и простыми замкнутыми внутренними контурами Γ_k ($k = 1, 2,..., n$). Систему уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние оболочки, можно записать как систему относительно тензоров усилий $\mathbf{T}$ и моментов $\mathbf{M}$. Для этого необходимо обратить определяющие соотношения (1.2), т.е. выразить тензоры деформаций $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$ через тензоры $\mathbf{T}$ и $\mathbf{M}$. После этого уравнения совместности (1.4) будут содержать в качестве неизвестных функций тензоры усилий и моментов и вместе с уравнениями равновесия (1.1) образуют полную систему разрешающих уравнений упругой оболочки. К этим уравнениям, помимо граничных условий на γ и Γ_k, следует присоединить интегральные соотношения (1.9), выражающие заданные векторы Бюргерса и Франка изолированных дефектов через поле усилий и моментов в оболочке. При этом в качестве контуров C_k в (1.9) можно взять контуры отверстий Γ_k.

Предполагая однозначную разрешимость уравнений состояния (1.2) относительно тензоров $\boldsymbol{\epsilon}$ и $\boldsymbol{\varkappa}$, введем в рассмотрение удельную дополнительную энергию оболочки V как функцию тензоров усилий $\mathbf{T}$ и моментов $\mathbf{M}$, связанную с удельной потенциальной энергией деформации W преобразованием Лежандра

$$V(\mathbf{T},\mathbf{M})=\mathbf{T}\cdot\cdot\boldsymbol{\epsilon}^T+\mathbf{M}\cdot\cdot\boldsymbol{\varkappa}^T-W$$

По свойству преобразования Лежандра имеем

$$\boldsymbol{\epsilon}=\partial V/\partial\mathbf{T}, \quad \boldsymbol{\varkappa}=\partial V/\partial\mathbf{M} \tag{3.1}$$

Для упрощения записи будем предполагать, что оболочка свободна от внешних нагрузок, распределенных по поверхности σ, а также от краевых нагрузок, распределенных по контурам γ и Γ_k ($k = 1, 2,... n$). Пользуясь статико-геометрической аналогией, легко заметить, что уравнениям равновесия (1.1) при $\mathbf{f} = \mathbf{l} = 0$ можно тождественно удовлетворить, положив

$$\mathbf{T} = \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{e} \cdot (\operatorname{grad} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\eta}) \tag{3.2}$$

Векторно-значные функции $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\eta}$ будем называть функциями напряжений. Краевые условия на свободной от нагрузки границе оболочки $\mathbf{m} \cdot \mathbf{T} = 0$, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{M} = 0$, где $\mathbf{m}$ – единичная нормаль к граничному контуру ($\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$), согласно (3.2) формулируются через функции напряжений следующим образом:

$$d\boldsymbol{\eta} / ds = 0, \quad d\boldsymbol{\lambda} / ds + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\eta} = 0 \tag{3.3}$$

Здесь $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{m}$ – единичный вектор касательной к граничному контуру, s – длина дуги. Решая уравнения (3.3), получим

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\eta}\big|_\gamma = \mathbf{A}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}\big|_\gamma = \mathbf{D}_0 + \mathbf{A}_0 \times \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\eta}\big|_{\Gamma_k} = \mathbf{A}_k, \quad \boldsymbol{\lambda}\big|_{\Gamma_k} = \mathbf{D}_k + \mathbf{A}_k \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{D}_k$ ($k = 1, 2,..., n$) – векторные постоянные, $\mathbf{r}_k$ – радиус-вектор некоторой точки внутри области, ограниченной контуром Γ_k. Поскольку согласно (3.2) добавление к функциям напряжений $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ соответственно выражений вида $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D} + \mathbf{A} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{D}$ – постоянные векторы, не влияет на тензоры усилий и моментов, без ограничения общности можно положить $\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}_0 = 0$. Постоянные $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{D}_k$ на контурах отверстий остаются неизвестными.

При использовании общего решения (3.2) уравнений статики оболочки разрешающая система уравнений сводится к уравнениям совместности деформаций (1.4), записанным через функции напряжений. Краевые условия имеют вид (3.4) при $\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}_0 = 0$. Интегральные соотношения (1.9) при заданных значениях $\mathbf{b}_k$, $\mathbf{q}_k$ служат уравнениями для определения неизвестных постоянных $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{D}_k$ ($k = 1, 2,... n$). Докажем, что указанная краевая задача эквивалентна вариационному принципу

$$\begin{gathered} \delta\Pi[\boldsymbol{\eta}(r), \boldsymbol{\lambda}(r), \mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_n, \mathbf{D}_1, \ldots \mathbf{D}_n] = 0 \\ \Pi = \iint_\sigma V d\sigma + \sum_{k=1}^{n} [(\mathbf{b}_k + \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{A}_k + \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{D}_k] \end{gathered} \tag{3.5}$$

В функционале Π варьируются дважды непрерывно дифференцируемые функции напряжений, удовлетворяющие краевым условиям (3.4), а также постоянные $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{D}_k$ ($k = 1, 2,..., n$). Согласно (3.1), (3.2) вариация функционала Π имеет вид

$$\begin{gathered} \delta\Pi = \iint_\sigma [\operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} \delta\boldsymbol{\eta}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varkappa}^T \cdot (\mathbf{e} \cdot \operatorname{grad} \delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{e} \times \delta\boldsymbol{\eta}))] d\sigma + \\ + \sum_{k=1}^{n} [(\mathbf{b}_k + \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k) \cdot \delta\mathbf{A}_k + \mathbf{q}_k \cdot \delta\mathbf{D}_k] \end{gathered} \tag{3.6}$$

После интегрирования по частям и учета краевых условий (3.4) при $\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}_0 = 0$, выражение (3.6) преобразуется так

$$\begin{gathered} \delta\Pi = \iint_\sigma [(\operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) + (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varkappa})_\times) \cdot \delta\boldsymbol{\eta} + (\operatorname{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varkappa})) \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}] d\sigma + \\ + \sum_{k=1}^{n} [(\mathbf{b}_k + \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k - \oint_{\Gamma_k} \mathbf{t} \cdot [\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\varkappa} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)] ds) \cdot \delta\mathbf{A}_k + \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{q}_k - \oint_{\Gamma_k} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varkappa} ds) \cdot \delta\mathbf{D}_k \end{gathered} \tag{3.7}$$

Из выражения (3.7) следует, что условие стационарности функционала Π эквивалентно уравнениям совместности (1.4) и интегральным соотношениям (1.9).

Будем теперь неограниченно уменьшать диаметры отверстий таким образом, чтобы каждый контур Γ_k стягивался в точку, имеющую радиус-вектор $\mathbf{r}_k$. Тогда согласно (3.4) постоянные $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{D}_k$ совпадут соответственно со значениями функций $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ в точке $\mathbf{r}_k$ и функционал (3.5) будет иметь выражение

$$\Pi = \iint_\sigma V d\sigma + \sum_{k=1}^{n}[(\mathbf{b}_k + \mathbf{q}_k \times \mathbf{r}_k)\cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r}_k) + \mathbf{q}_k \cdot \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r}_k) = \iint_\sigma V d\sigma + \iint_\sigma (\boldsymbol{\alpha}' \cdot \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\beta}' \cdot \boldsymbol{\lambda}) d\sigma \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = \sum_{k=1}^{n}(\mathbf{b}_k + \mathbf{q}_k \times \mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k), \quad \boldsymbol{\beta}' = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{q}_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)$$

Здесь $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k)$ – дельта-функция двух переменных, сосредоточенная в точке $\mathbf{r}_k$. От функционала (3.8), соответствующего дискретному набору сосредоточенных дефектов, легко перейти к случаю непрерывно распределенных дислокаций и дисклинаций. Для этого достаточно заменить в (3.8) обобщенные функции $\boldsymbol{\alpha}'$ и $\boldsymbol{\beta}'$ на обычные $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, назвав последние соответственно плотностью дислокаций и плотностью дисклинаций. Функционал дополнительной энергии для случая непрерывно распределенных дислокаций и дисклинаций примет вид

$$\Pi[\boldsymbol{\eta}(r), \boldsymbol{\lambda}(r)] = \iint_\sigma V d\sigma + \iint_\sigma (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\lambda}) d\sigma \tag{3.9}$$

Нетрудно убедиться в том, что требование стационарности функционала (3.9) при условиях $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\lambda} = 0$ на контуре γ влечет уравнения несовместности (2.2), записанные через функции напряжений.

4. Принцип двойственности в теории оболочек. Рассмотрим подробнее краевую задачу о равновесии оболочки с заданными плотностями непрерывно распределенных дислокаций и дисклинаций. Чтобы сформулировать граничные условия на краю оболочки, сначала обратимся к задаче равновесия при отсутствии распределенных дефектов, т.е. при $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = 0$. В этом случае упругие деформации будут совместными и существует упругое перемещение $\mathbf{u}$ и упругий поворот $\boldsymbol{\varphi}$. Одним из распространенных типов краевых условий в теории оболочек являются кинематические условия, при которых на некоторой части γ_1 границы γ задаются перемещения и поворот

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), \quad \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0(s) \quad \text{на} \quad \gamma_1 \tag{4.1}$$

где $\mathbf{u}_0(s)$, $\boldsymbol{\varphi}_0(s)$ – известные функции текущей длины дуги граничного контура. На основании (1.3) из (4.1) получим на γ_1:

$$\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\varkappa} = d\boldsymbol{\varphi}_0 / ds, \quad \mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = d\mathbf{u}_0 / ds + \mathbf{t}\times\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{4.2}$$

Условия (4.2) накладывают ограничения на граничные значения тензора деформаций и тензора изгибных деформаций и называются деформационными. Впервые деформационные граничные условия были сформулированы в [9] в рамках линейной теории оболочек типа Лява. Деформационные условия (4.2), вообще говоря, не эквивалентны кинематическим условиям (4.1). Однако, если участок границы γ_1 связный, то, как легко видеть, кинематические условия восстанавливаются по деформационным с точностью до движения абсолютно твердого тела. Поскольку добавление жесткого движения не влияет на напряженное состояние оболочки, в случае связной части γ_1 граничного контура γ краевые условия (4.1) и (4.2) можно считать эквивалентными. Для оболочки с непрерывно распределенными дефектами упругие перемещения и повороты не существуют, поэтому кинематические граничные условия не имеют смысла. Однако деформационные условия можно применять и в случае несовместных деформаций. Таким образом, будем считать, что на связном участке γ_1 границы области σ поставлены деформационные условия

$$\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{v}(s), \quad \mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\varkappa} = \mathbf{w}(s) \tag{4.3}$$

где $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{w}(s)$ – заданные функции. Очевидно, что условия (4.3) при помощи (3.1), (3.2) можно сформулировать в терминах функций напряжений $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\lambda}$.

Другой распространенный тип граничных условий в теории оболочек состоит в задании на контуре внешних нагрузок: силовой и моментной

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}(s), \ \ \mathbf{m} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{L}(s) \ \text{ на } \ \gamma_2 \tag{4.4}$$

Будем предполагать, что часть границы γ_2 также связна и дополняет кривую γ_1 до полной границы γ. Тогда из (3.2) можно видеть, что с точностью до слагаемых вида (3.4), не влияющих на значения тензоров усилий и моментов, условия (4.4) эквивалентны условиям на контурные значения функций напряжений

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0(s), \ \ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0(s) \ \text{ на } \ \gamma_2 \tag{4.5}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_0(s)$, $\boldsymbol{\eta}_0(s)$ – заданные функции.

Краевая задача о равновесии оболочки с заданными плотностями дислокаций и дисклинаций при отсутствии распределенных по поверхности σ нагрузок состоит из уравнений несовместности деформаций, определяющих соотношений, выражающих тензоры деформаций через тензоры усилий и моментов, выражений усилий и моментов через функции напряжений и граничных условий (4.3), (4.5). Рассмотрим параллельно задачу статики для оболочки при заданных поверхностных нагрузках $\mathbf{f}, \mathbf{l}$ и при отсутствии распределенных дефектов, с кинематическими краевыми условиями на γ_1 и с заданными контурными нагрузками на γ_2. Уравнения последней задачи состоят из уравнений равновесия в усилиях и моментах, определяющих соотношений, выражающих усилия и моменты через деформации, и соотношений, выражающих тензоры деформаций через перемещения и повороты. Будем считать, что все уравнения и краевые условия приведены к безразмерному виду, т.е. представляют собой соотношения между безразмерными величинами. Введя обозначения $\overset{*}{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$, $\overset{*}{\boldsymbol{\varkappa}} = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varkappa}$, выпишем полные системы уравнений и краевых условий указанных двух задач в виде таблицы, состоящей из двух столбцов. Левый столбец соответствует первой задаче, а правый – второй.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div}\boldsymbol{\varkappa}^* + \boldsymbol{\beta} = 0, & \operatorname{div}\mathbf{T} + \mathbf{f} = 0 \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\epsilon}^* + \boldsymbol{\varkappa}^*_\times + \boldsymbol{\alpha} = 0, & \operatorname{div}\mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{l} = 0 \end{array} \tag{4.6}$$

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\varkappa}^* = G(\mathbf{T}, \mathbf{M}), & \mathbf{T} = G_1(\boldsymbol{\varkappa}^*, \boldsymbol{\epsilon}^*) \\ \boldsymbol{\epsilon}^* = H(\mathbf{T}, \mathbf{M}), & \mathbf{M} = H_1(\boldsymbol{\varkappa}^*, \boldsymbol{\epsilon}^*) \end{array} \tag{4.7}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{T} = \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad}\boldsymbol{\eta}, & \boldsymbol{\varkappa}^* = \mathbf{e} \cdot \operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{M} = \mathbf{e} \cdot (\operatorname{grad}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\eta}), & \boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{e} \cdot (\operatorname{grad}\mathbf{u} + \mathbf{g} \times \boldsymbol{\varphi}) \end{array} \tag{4.8}$$

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0(s), \ \ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_0(s), & \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(s), \ \ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0(s) \\ \text{на } \gamma_1 & \text{на } \gamma_1 \end{array} \tag{4.9}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\varkappa}^* = \mathbf{w}(s), \ \ \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* = \mathbf{v}(s) & \mathbf{m} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}(s), \ \ \mathbf{m} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{L}(s) \\ \text{на } \gamma_2 & \text{на } \gamma_2 \end{array} \tag{4.10}$$

Две упругие оболочки с одинаковой поверхностью σ назовем сопряженными, если функции G и H в определяющих соотношениях (4.7) первой оболочки совпадают соответственно с функциями G_1 и H_1 в определяющих соотношениях второй оболочки. Таким образом, две упругие оболочки будут взаимно сопряженными, если тензоры $\overset{*}{\boldsymbol{\varkappa}}$ и $\overset{*}{\boldsymbol{\epsilon}}$ в одной оболочке выражаются через тензоры усилий и моментов точно так же, как тензоры усилий и моментов в другой оболочке выражаются через тензоры $\overset{*}{\boldsymbol{\varkappa}}$ и $\overset{*}{\boldsymbol{\epsilon}}$. Согласно (4.7) сопряженные оболочки имеют, вообще говоря, различные физические свойства, т.е. изготовлены из разных материалов.

Из таблицы (4.6)–(4.10) вытекает следующий принцип двойственности теории оболочек.

Краевая задача о равновесии упругой оболочки с заданными плотностями дислокаций и дисклинаций при отсутствии поверхностных нагрузок, с деформационными граничными условиями на части границы γ_1 и с заданными на другой части границы γ_2 функциями напряжений математически эквивалентна краевой задаче о равновесии сопряженной оболочки с заданными поверхностными нагрузками при отсутствии дислокаций и дисклинаций, с заданными на γ_1 контурными нагрузками и кинематическими граничными условиями на γ_2.

Сформулированный принцип двойственности, который можно распространить и на другие типы граничных условий, обобщает известные [10–12] результаты о математической эквивалентности некоторых частных задач теории оболочек.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (МТА 300) и Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-01427).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhilin P.A.* Mechanics of deformable directed surfaces // Int. J. Solids Structures. 1976. V. 12. № 9/10. P. 635–648.
2. *Альтенбах Х., Жилин П.А.* Общая теория упругих простых оболочек // Успехи механики. 1988. Т. 11. Вып. 4. С. 107–148.
3. *Зубов Л.М.* Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1982. 143 с.
4. *Nye J.F.* Some geometrical relations in dislocated crystals // Acta Metallurg. 1953. V. 1. № 2. P. 153–162.
5. *Крёнер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965. 103 с.
6 *Де Вит Р.* Континуальная теория дисклинаций. М.: Мир, 1977. 208 с.
7. *Вакуленко А.А.* Связь микро- и макросвойств в упругопластических средах // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ. 1991. Т. 22. С. 3–54.
8. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
9. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 2. Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. 395 с.
10. *Лурье А.И.* О статико-геометрической аналогии в теории оболочек // Проблемы механики сплошных сред. М. Изд-во АН СССР, 1961. С. 233–240.
11. *Черных К.Ф.* Сопряженные задачи теории тонких оболочек // Проблемы механики сплошных сред. М. Изд-во АН СССР, 1961. С. 499–503.
12. *Чернина В.С.* Некоторые математически эквивалентные задачи статики оболочек вращения // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 3. С. 120–128.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
20.VI.1995