

УДК 539.375

© 1996 г. Е.В. ЛОМАКИН

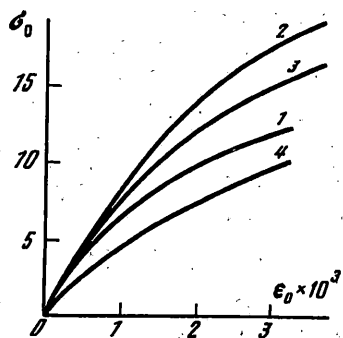
ДЕФОРМИРОВАНИЕ ДИЛАТИРУЮЩЕЙ СРЕДЫ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Процесс деформирования материалов, содержащих различного рода дефекты структуры, поры, микротрещины, как правило, сопровождается существенным изменением объема в отличие от однородных материалов. При этом также наблюдается зависимость деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния, что связано с изменением поведения дефектов при различных условиях нагружения. Такими свойствами обладают конструкционные графиты, бетон, некоторые керамические и композитные материалы и др. Представляется важным исследование деформирования данных материалов в условиях концентрации напряжений, т.е. в областях, где напряженное состояние существенно неоднородное.

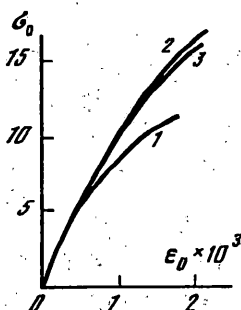
В данной работе рассмотрена возможная форма представления асимптотических решений задач о трещинах в нелинейных средах, для которых не могут быть использованы классические гипотезы о независимости процессов объемного и сдвигового деформирования, "единой кривой" зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций, несжимаемости материала и другие. Рассмотрен случай плоского напряженного состояния. Для конкретных видов функций, входящих в определяющие соотношения, проведены расчеты напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины. Кроме того получено решение в конечном виде при использовании линейной аппроксимации слабо нелинейных диаграмм. С помощью инвариантного интеграла определены условия начала роста трещины.

1. Вид напряженного состояния характеризуется соотношениями между компонентами напряжений, которые можно выразить через два параметра ξ и θ [1]. Параметр ξ представляет отношение среднего напряжения $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ к интенсивности напряжений $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$, где $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Угол θ определяется соотношением $\cos 3\theta = \frac{1}{2}(S_{III} / \sigma_0^3)$, где $S_{III} = S_{ik}S_{kj}S_{ij}$. В случае плоского напряженного состояния между этими параметрами существует связь $\frac{2}{9}\cos 3\theta = \xi(1 - 3\xi^2)$. Физический смысл и значение каждого параметра при построении определяющих соотношений достаточно подробно рассмотрены в [1, 2]. Отметим только, что поскольку напряжение σ характеризует среднее нормальное напряжение в точке сплошной среды, а σ_0 – среднее значение касательного напряжения в той же точке, то параметр $\xi = \sigma/\sigma_0$ определяет в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями. Этот параметр использован при построении определяющих соотношений.

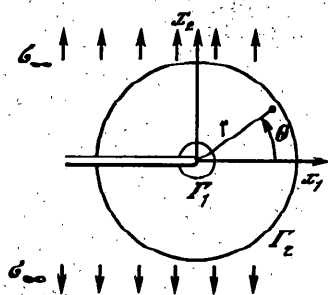
На фиг. 1 приведены обобщенные диаграммы деформирования графита АРВ, полученные при пропорциональном нагружении трубчатых образцов в условиях плоского напряженного состояния [3]. Кривая 1 соответствует одноосному растяжению, при этом параметр $\xi = 1/3$, кривая 2 – одноосному сжатию ($\xi = -1/3$), кривая 3 – сдвигу ($\xi = 0$), кривая 4 – равномерному двухосному растяжению ($\xi = 2/3$). На фиг. 2 показаны аналогичные диаграммы для графита ВПП. Наблюдается весьма значительное расхождение диаграмм. Большинство конструкционных графитов обладают определенной анизотропией, поскольку они получаются в результате формовки или экструзии смеси углеродных порошков с углеводородистым связующим с последующей термообработкой. Технология получения графитов АРВ и ВПП такова, что в ре-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

зультате получается практически изотропный материал. Для испытанной партии образцов различие средних значений деформационных характеристик в направлении прессования и перпендикулярном направлении не превышало 2% и эти характеристики находились в полосе разброса экспериментальных данных. Аналогичные экспериментальные данные могут быть приведены для многих других материалов [4].

Определяющие соотношения для материалов, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния, могут быть представлены с помощью следующего потенциала для случая нагружения [5]:

$$\Phi = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\sigma_0^2 + [1 + \kappa(\xi)]g(\sigma_0) \quad (1.1)$$

Первое слагаемое представляет потенциал для классического линейно упругого тела

$$\Phi = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\sigma_0^2, \quad A = \frac{1+\nu}{2E}, \quad B = \frac{3(1-2\nu)}{E} \quad (1.2)$$

Функция $g(\sigma_0)$ характеризует нелинейность диаграмм деформирования. Дифференцируя выражение (1.1) по σ_{ij} , получим соотношения между деформациями и напряжениями. Для степенной функции $g(\sigma_0) = k\sigma_0^n / n$ они имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}[A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\delta_{ij} + \frac{1}{3}[B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma\delta_{ij} \quad (1.3)$$

$$\lambda(\xi) = 1 + \kappa(\xi) - \kappa'(\xi)\xi / n, \quad \Lambda(\xi) = \kappa'(\xi) / (\xi n)$$

При этом для объемной деформации $\varepsilon = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}$ и интенсивности деформации $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$, где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}$, получим выражения

$$\varepsilon = [B + \Lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma, \quad \varepsilon_0 = [A + \lambda(\xi)k\sigma_0^{n-2}]\sigma_0 \quad (1.4)$$

При $\kappa(\xi) = \text{const}$ соотношения (1.3) и (1.4) совпадают с соответствующими соотношениями деформационной теории пластичности. Между функциями $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ существует связь

$$\lambda + \xi^2\Lambda = 1 + \kappa, \quad \lambda' + \xi^2\Lambda' = (n-2)\xi\Lambda \quad (1.5)$$

Из (1.4) и (1.5) следует, что объемная деформация и интенсивность деформаций взаимосвязаны. Причем характер этой взаимосвязи зависит от вида напряженного состояния, реализуемого в сплошной среде, и в случае неоднородного напряженного состояния меняется от точки к точке.

2. Исследуем случай плоского напряженного состояния тела с трещиной в предположении малости области в окрестности вершины трещины, в которой преобладает

нелинейное или пластическое деформирование, по сравнению с характерными геометрическими размерами тела и длиной трещины. На расстояниях, больших по сравнению с пластической зоной, но малых по сравнению с остальными геометрическими параметрами, напряжения определяются асимптотическим решением соответствующей задачи теории упругости. Поскольку в окрестности вершины трещины напряжения имеют особенность, то сингулярное решение зависит от вида кривых деформирования при сравнительно развитых пластических деформациях. Поэтому при построении асимптотического решения в области нелинейного деформирования можно считать трещину полубесконечной и пренебречь линейно упругими составляющими деформации, т.е. оставить в соотношениях (1.3), (1.4) только степенные члены.

Введем полярную систему координат, связанную с вершиной трещины (фиг. 3). Для напряжений имеем систему дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.1)$$

Компоненты тензора деформаций удовлетворяют уравнению совместности деформаций

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \epsilon_\theta)}{\partial r^2} \quad (2.2)$$

Уравнения равновесия (2.1) удовлетворяются, если выразить компоненты напряжения через функцию напряжений Эри $\Psi(r, \theta)$:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} \quad (2.3)$$

Среднее напряжение $\sigma = \frac{1}{2} \Delta \Psi$, где Δ – оператор Лапласа. Согласно принятым допущениям используем следующее соотношение между напряжениями и деформациями:

$$\epsilon_{ij} = [\frac{3}{2} \lambda(\xi) S_{ij} + \frac{1}{3} \Delta(\xi) \sigma \delta_{ij}] k \sigma_0^{n-2} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в уравнение (2.2), получим для функции Ψ нелинейное уравнение в частных производных

$$\begin{aligned} & \sigma_0^{n-2} \left(\lambda + \frac{1}{9} \Lambda \right) r^2 \Delta \Delta \Psi - \left[3 \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{r\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \\ & + \frac{1}{2} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \frac{2}{9} \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) + \frac{1}{9} \Delta \Psi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) - \\ & - \left[3 \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_r - \frac{5}{2} \sigma_\theta - \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} (2\sigma_\theta - \sigma_r) \right] r \frac{\partial}{\partial r} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \\ & + \frac{1}{9} \left(\Delta \Psi + r \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) r \frac{\partial}{\partial r} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) - 3r \sigma_{r\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \\ & + \frac{1}{2} (2\sigma_\theta - \sigma_r) r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\lambda \sigma_0^{n-2}) + \frac{1}{9} \Delta \Psi r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Lambda \sigma_0^{n-2}) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

При нахождении решения уравнения (2.5) можно использовать метод разделения переменных. Ограничимся рассмотрением поля напряжений и деформаций вблизи вершины трещины. Тогда сингулярную часть решения можно искать в форме

$$\Psi = K r^s f(\theta) \quad (2.6)$$

При этом выражения (2.3) для напряжений примут вид

$$\sigma_r = K r^{s-2} [s f(\theta) + f''(\theta)] = K r^{s-2} \tilde{\sigma}_r(\theta)$$

$$\sigma_{\theta} = Kr^{s-2}s(s-1)f(\theta) = Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_{\theta}(\theta) \quad (2.7)$$

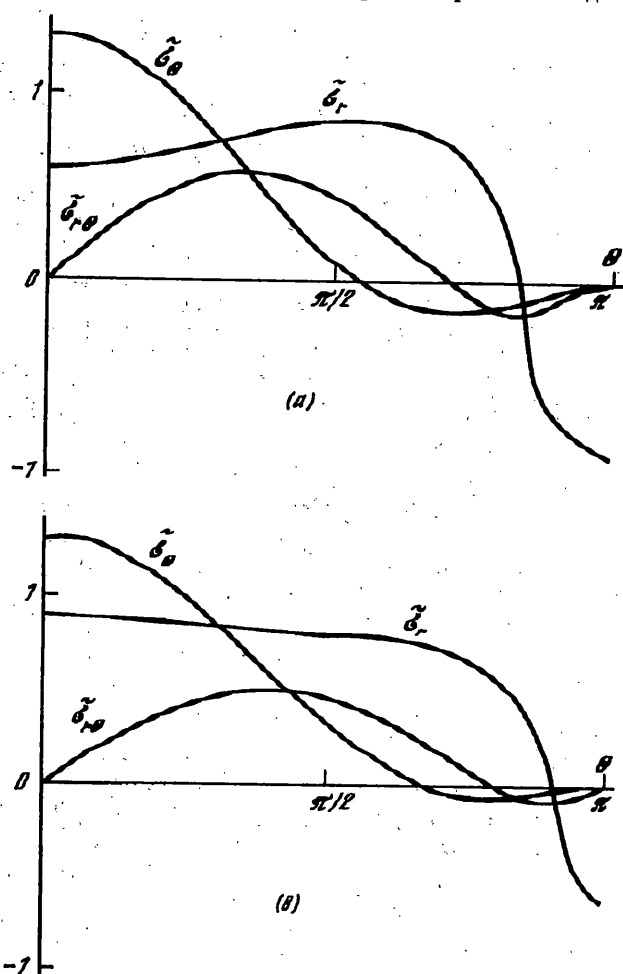
$$\sigma_{r\theta} = Kr^{s-2}(s-1)f'(\theta) = Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta)$$

Показатель степени s зависит от показателя упрочнения n и может быть определен с помощью инвариантного интеграла Черепанова – Райса [6, 7], который в декартовой системе координат имеет вид

$$J = \int_{\Gamma} (U dx_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1} ds) \quad (2.8)$$

Здесь Γ – произвольный контур, окружающий вершину трещины, $U = \sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \Phi$ – плотность энергии деформации. Одно из следствий, вытекающих из инвариантности интеграла (2.8), заключается в том, что произведение компонентов напряжения на компоненты деформации должно иметь особенность r^{-1} . Используя это условие, легко находим $s = (2n - 1)/n$.

Вследствие того, что параметр вида напряженного состояния ξ представляет собой однородную функцию напряжений нулевой степени, согласно выражениям (2.7) он не зависит от r . Поэтому не зависят от r функции $\lambda(\xi)$, $\Lambda(\xi)$ и часть членов в уравнениях (2.5) пропадает. Данный факт существенно упрощает решение задачи.



Фиг. 4

Из уравнения (2.5) после подстановки в него выражений (2.6) и (2.7) получим для функции $f(\theta)$ обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, которое можно разрешить относительно старшей производной. Данное уравнение не приводим ввиду его громоздкости.

Характер распределения напряжений и деформаций можно проиллюстрировать на задаче о трещине нормального разрыва с симметричным нагружением вдали от нее (фиг. 3). Поскольку поверхность трещины свободна от напряжений, при $\theta = \pi$, $\sigma_\theta = \sigma_{r\theta} = 0$, а также вследствие симметрии решения при $\theta = 0$, $\sigma_r = \partial\sigma_r / \partial\theta = \partial\sigma_\theta / \partial\theta = 0$. В результате получаем для функции $f(\theta)$ краевые условия

$$f'(0) = f'''(0) = 0, \quad f(\pi) = f'(\pi) = 0 \quad (2.9)$$

Поскольку функция $f(\theta)$ определяется с точностью до множителя, то можно принять условие нормировки $f(0) = 1$. Характер распределения напряжений и деформаций вблизи вершины трещины можно исследовать с помощью численного интегрирования уравнения (2.5) при граничных условиях (2.9) для конкретного вида функций $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$.

На фиг. 4,а приведены диаграммы изменения напряжений в зависимости от полярного угла, полученные в результате расчетов для функций $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$, представленных выражениями

$$\lambda(\xi) = 1 + C_1\xi + C_2\xi^2, \quad \xi\Lambda(\xi) = C_3 + C_4\xi + C_5\xi^3 \quad (2.10)$$

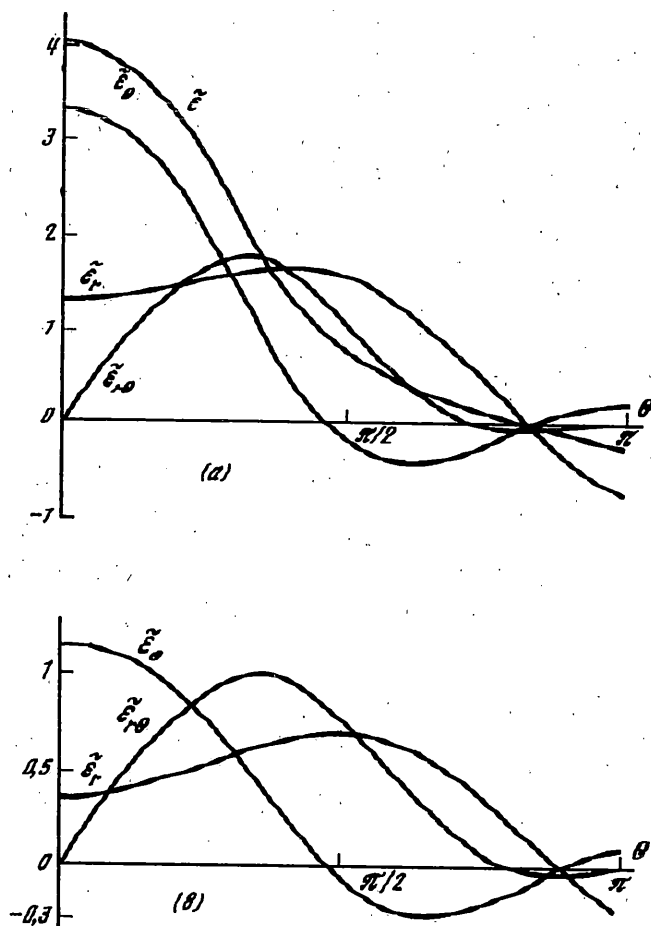
Данные функции хорошо аппроксимируют приведенные на фиг. 1 и фиг. 2 экспериментальные зависимости для конструкционных графитов. При этом показатель степени $n = 4$. Диаграммам деформирования графита ВПП (фиг. 2) соответствуют следующие значения коэффициентов: $C_1 = 0,45$; $C_2 = 0,045$; $C_3 = 0,15$; $C_4 = 0,045$; $C_5 = 14,6$. На фиг. 4,б для сравнения показаны диаграммы изменения напряжений для несжимаемого материала, когда в выражениях (2.10) все коэффициенты $C_i = 0$. Вследствие симметрии задачи графики приведены только для положительных значений угла θ .

Используя (2.7) представим выражения (2.4) для деформаций в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= kK^{n-1}r^{-(n-1)/n}\tilde{\epsilon}_{ij}(\theta) \\ \tilde{\epsilon}_r(\theta) &= [\frac{1}{2}\lambda(\xi)(2\tilde{\sigma}_r - \tilde{\sigma}_\theta) + \frac{1}{3}\xi\Lambda(\xi)\tilde{\sigma}_0]\tilde{\sigma}_0^{n-2} \\ \tilde{\epsilon}_\theta(\theta) &= [\frac{1}{2}\lambda(\xi)(2\tilde{\sigma}_\theta - \tilde{\sigma}_r) + \frac{1}{3}\xi\Lambda(\xi)\tilde{\sigma}_0]\tilde{\sigma}_0^{n-2} \\ \tilde{\epsilon}_{r\theta}(\theta) &= \frac{3}{2}\lambda(\xi)\tilde{\sigma}_r\tilde{\sigma}_\theta\tilde{\sigma}_0^{n-2} \\ \tilde{\epsilon}_z(\theta) &= [-\frac{1}{2}\lambda(\xi) + \frac{1}{3}\Lambda(\xi)](\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\theta)\tilde{\sigma}_0^{n-2} \\ \xi &= \frac{1}{3}(f'' + s^2f)[(f'')^2 + s(3-s)ff'' + 3(1-s^2)(f')^2 + s^2(3-3s+s^2)f^2]^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

На фиг. 5,а показано распределение деформаций $\tilde{\epsilon}_{ij}(\theta)$, определяемое выражениями (2.11). На фиг. 5,б для сравнения приведены соответствующие диаграммы для несжимаемого материала, аналогичные диаграммы были получены в работах [8, 9]. Наблюдается весьма существенное различие в величинах деформации. В случае пластически сжимаемого материала величины деформаций в несколько раз превышают соответствующие значения для несжимаемого материала. При этом происходит значительное объемное деформирование и величина объемной деформации ϵ достигает наибольшего значения на продолжении трещины, т.е. в том же направлении, в котором максимально среднее напряжение σ . Следует отметить, что при других видах нагружения такое совпадение не является обязательным, поскольку касательные напряжения также вызывают объемное деформирование.

3. Приведенные на фиг. 1 и 2 серии диаграмм допускают линейную аппроксимацию



Фиг. 5

в определенном диапазоне деформаций. Тогда имеем серию прямолинейных диаграмм, наклон которых определяется соответствующими значениями секущих модулей. Такая аппроксимация в значительной мере упрощает расчеты и часто используется при решении многих практических задач. При этом определяющие соотношения могут быть получены из потенциала (1.1), если показатель степени n функции $g(\sigma_0)$ принять равным 2. Естественно, что функции, описывающие зависимость деформационных характеристик от вида напряженного состояния изменятся. Здесь уже не имеет смысла пренебрегать какой-либо составляющей деформации, поскольку обе они имеют один порядок.

Исходя из (1.1), потенциал для такого тела может быть представлен в виде [10]:

$$\Phi = \frac{1}{2}[1 + \zeta(\xi)](A + B\xi^2)\sigma_0^2 \quad (3.1)$$

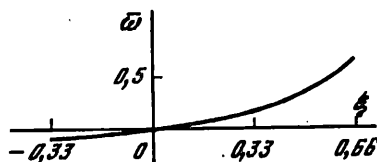
На основании (3.1) получаем зависимости между напряжениями и деформациями

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{2}{3}[A + \omega(\xi)]S_{ij} + \frac{1}{3}[B + \Omega(\xi)]\sigma\delta_{ij} \\ \omega(\xi) &= -\frac{1}{2}(A + B\xi^2)\zeta'(\xi)\xi + A\zeta(\xi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\Omega(\xi) = \frac{1}{2}(A + B\xi^2)\zeta'(\xi)/\xi + B\zeta(\xi), \quad \omega' + \xi^2\Omega' = 0$$

Зависимости (3.2) линейные только при пропорциональном нагружении. Функцию

$\omega(\xi)$ можно определить по расхождению диаграмм зависимости между интенсивностью напряжений σ_0 и интенсивностью деформаций ε_0 . Считая, что при чистом сдвиге ($\xi = 0$) значение функции $\omega(0) = 0$, константа A определяется наклоном диаграммы для данного вида нагружения при соответствующей линейной аппроксимации. Можно исходить из любого другого вида нагружения. На фиг. 6 приведен график зависимости $\bar{\omega} = \omega / A$ от ξ для графита АРВ, соответствующий линейной аппроксимации диаграмм фиг. 1 при значении интенсивности деформаций $\varepsilon_0 = 0,001$, при этом $A = 1,35 \cdot 10^{-4}$ (МПа) $^{-1}$. Аналогичная кривая для графита ВПП близка к приведенному



Фиг. 6

графику, $A = 1,08 \cdot 10^{-4}$ (МПа) $^{-1}$. Константу B можно определить из любого эксперимента, в котором напряженное состояние отлично от состояния чистого сдвига, например, при одноосном растяжении. Для графита АРВ $B = 1,76 \cdot 10^{-4}$ (МПа) $^{-1}$, для графита ВПП $B = 1,7 \cdot 10^{-4}$ (МПа) $^{-1}$. Зная функцию $\omega(\xi)$, с помощью соотношений (3.2) можно определить функцию $\Omega(\xi)$. На ограниченном интервале изменения параметра ξ можно принять линейную или кусочно-линейную аппроксимацию функции $\omega(\xi) = C\xi$. Для графита АРВ при $\xi < 0$, $C/A = 0,3$, при $\xi > 0$, $C/A = 0,45$. Для графита ВПП при $\xi < 0$, $C/A = 0,18$, при $\xi > 0$, $C/A = 0,36$.

Согласно (3.2) для компонентов тензора деформаций имеем выражения

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{2}(A + \omega)(2\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{9}(B + \Omega)(\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{2}(A + \omega)(2\sigma_\theta - \sigma_r) + \frac{1}{9}(B + \Omega)(\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{3}{2}(A + \omega)\sigma_{r\theta}, \quad \varepsilon_z = [-\frac{1}{2}(A + \omega) + \frac{1}{9}(B + \Omega)](\sigma_r + \sigma_\theta)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Из уравнения совместности деформаций (2.2), используя (3.3), получаем уравнение для функции напряжений Ψ :

$$\left(A + \frac{B}{9} + \omega + \frac{1}{9}\Omega\right)r^2\Delta\Delta\Psi + F = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}F &= \left[-3\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial\theta}(2\sigma_r - \sigma_\theta)\right]\frac{\partial\omega}{\partial\theta} + \frac{2}{9}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_r + \sigma_\theta)\frac{\partial\Omega}{\partial\theta} + \frac{1}{2}(2\sigma_r - \sigma_\theta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + \\ &+ \frac{1}{9}(\sigma_r + \sigma_\theta)\frac{\partial^2\Omega}{\partial\theta^2} - 3\sigma_{r\theta}r\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta\partial r} - \left(3\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + 2\sigma_r - \frac{5}{2}\sigma_\theta\right)r\frac{\partial\omega}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{9}(\sigma_r + \sigma_\theta)r\frac{\partial\Omega}{\partial r} + \frac{1}{2}r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[(2\sigma_\theta - \sigma_r)\frac{\partial\omega}{\partial r}\right] + \frac{1}{9}r^2\frac{\partial}{\partial r}\left[(\sigma_r + \sigma_\theta)\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right]\end{aligned}$$

В отсутствие зависимости деформационных характеристик от вида напряженного состояния, когда $\omega(\xi) = \Omega(\xi) = 0$, уравнение (3.4) становится бигармоническим, соответствующим линейной теории упругости.

Несмотря на то, что определяющие соотношения (3.2) нелинейные, для них справедлива теорема Клапейрона, при этом потенциал $\Phi = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = U$ [10]. Из ограниченности энергии следует, что показатель степени s в асимптотическом решении (2.6) равен $3/2$. Поскольку параметр ξ от r не зависит, последние пять членов в выражении (3.4) для функции F пропадают. Полагая в выражениях (2.7) $s = 3/2$, из (3.4) получаем

обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\theta)$:

$$\left(A + \frac{B}{9} + \omega + \frac{1}{9}\Omega\right)\left(f^{IV} + \frac{5}{2}f'' + \frac{9}{16}f\right) + F(f, f', f'', f''') = 0 \quad (3.5)$$

Для частного вида функции $\omega(\xi)$ решение уравнения (3.5) при граничных условиях (2.9) можно получить в конечном виде. Примем для функции $\omega(\xi)$ линейную аппроксимацию $\omega(\xi) = C\xi$, или кусочно-линейную, что вполне допустимо, поскольку при плоском напряженном состоянии параметр ξ меняется в конечных пределах от $-2/3$ до $2/3$. Тогда согласно (3.2) функция $\Omega(\xi) = C/\xi$. Используя эти выражения для функций $\omega(\xi)$ и $\Omega(\xi)$, получим

$$F = C \left[2f'' + \frac{3}{4}f' + \frac{9}{4}f - \frac{2}{9\xi^2} \left(f''' + \frac{9}{4}f' \right) + \frac{2}{9\xi^3} \left(f'' + \frac{9}{4}f \right) \xi' \right] \xi' + \\ + 3C(4f'' + 9f)^{-1} \left(\frac{3}{2}f'f - f'^2 + \frac{9}{8}f^2 \right) \xi'' \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) с нелинейной частью (3.6) можно решать с помощью метода последовательных приближений. Нулевое приближение удовлетворяет уравнению $f^{IV} + \frac{5}{2}f'' + \frac{9}{16}f = 0$ и соответствует решению задачи с использованием уравнений линейной теории упругости. Это решение имеет вид

$$f_0 = \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2} = \frac{4}{3} \cos^3 \frac{\theta}{2} \quad (3.7)$$

При вычислении следующего приближения необходимо решать уравнение (3.5), в котором функция F вычисляется на основе предыдущего приближения (3.7). Простой подстановкой убеждаемся, что при этом

$$2f_0'' + \frac{3}{4}f_0' + \frac{9}{4}f_0 - \frac{2}{9\xi^2} \left(f_0''' + \frac{9}{4}f_0' \right) + \frac{2}{9\xi^3} \left(f_0'' + \frac{9}{4}f_0 \right) \xi' = 0 \\ \frac{3}{2}f_0'f_0 - f_0'^2 + \frac{9}{8}f_0^2 = 0$$

Таким образом, задача замыкается на нулевом приближении и сингулярное распределение напряжений в окрестности вершины трещины совпадает с соответствующим решением в линейной теории упругости

$$\sigma_r = \frac{K}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{K}{\sqrt{r}} \cos^3 \frac{\theta}{2}, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{K}{\sqrt{r}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.8)$$

При этом распределение деформаций отличается от соответствующего распределения ϵ_{ij}^0 в линейно упругом теле, которое можно представить формулами

$$\epsilon_r^0 = \frac{K}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(2A + \frac{2}{9}B - \frac{3}{2}A \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \epsilon_\theta^0 = \frac{K}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(-A + \frac{2}{9}B + \frac{3}{2}A \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \epsilon_{r\theta}^0 = \frac{K}{\sqrt{r}} \frac{3}{2}A \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \epsilon_z = \frac{K}{\sqrt{r}} \left(-A + \frac{2}{9}B \right) \cos \frac{\theta}{2} \quad (3.9)$$

Используя соотношения (3.3) и (3.8), получим распределение деформаций в теле, чувствительном к виду напряженного состояния,

$$\epsilon_r = \epsilon_r^0 + \frac{2}{3}C \frac{K}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \sqrt{4 - 3 \cos^2(\theta/2)}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta} &= \varepsilon_{\theta}^0 + \frac{2}{3} C \frac{K}{\sqrt{r}} \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{4-3\cos^2(\theta/2)}} \\ \varepsilon_{r\theta} &= \varepsilon_{r\theta}^0 + C \frac{K}{\sqrt{r}} \frac{\cos^2(\theta/2)\sin(\theta/2)}{\sqrt{4-3\cos^2(\theta/2)}} \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_z^0 + C \frac{K}{\sqrt{r}} \frac{\cos(\theta/2)}{3\sqrt{4-3\cos^2(\theta/2)}} \left(2-3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (3.10)$$

Различие между ε_{ij} и ε_{ij}^0 возрастает с ростом коэффициента C , характеризующего степень чувствительности деформационных свойств материала к изменению вида напряженного состояния. При этом заметно изменяется величина объемной деформации ε , которая представляет собой важную характеристику деформирования трещиноватых материалов. На фиг. 7 показаны диаграммы изменения по углу θ величин $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\sqrt{r}(KA)^{-1}$. Отношение B/A принято равным $5/3$, что близко к значениям для рассмотренных конструкционных графитов. Диаграмма 1 соответствует распределению объемной деформации в линейно упругом теле ($C = 0$), диаграмма 2 — $C/A = 0,3$; 3 — $0,5$; 4 — $0,7$.

С помощью выражений (3.9) и (3.10) можно найти распределение перемещений вблизи вершины трещины

$$\begin{aligned}u_r &= K\sqrt{r} \cos\frac{\theta}{2} \left(A + \frac{4}{9}B + 3A\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{4}{3}C\sqrt{4-3\cos^2\frac{\theta}{2}} \right) \\ u_{\theta} &= -K\sqrt{r} \sin\frac{\theta}{2} \left(A + \frac{4}{9}B + 3A\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{4}{3}C\sqrt{4-3\cos^2\frac{\theta}{2}} \right)\end{aligned}\quad (3.11)$$

Константу K , зависящую от величины приложенной нагрузки и длины трещины, можно определить с помощью инвариантного интеграла (2.8). При построении асимптотического решения, представленного формулами (3.8)–(3.11), нелинейные диаграммы деформирования с общим наклоном при низких напряжениях заменены соответствующими прямолинейными, аппроксимирующими реальные диаграммы. Следует отметить, что вид напряженного состояния меняется существенным образом только вблизи вершины трещины, но вдали от нее реализуется однородное напряженное состояние. При этом параметр $\xi = \text{const}$ и определяющие соотношения (1.3), (2.4), (3.2) совпадают с известными соотношениями линейной теории упругости и деформационной теории пластичности. Поэтому вдали от трещины справедливо решение для линейно упругого тела при условии, что область нелинейности мала по сравнению с длиной трещины l . Таким образом, при интегрировании по контуру Γ_2 (фиг. 3) можно использовать решение (3.8), (3.9). Значение этого интеграла хорошо известно $J = (A + B/9)\pi\sigma_{\infty}^2 l$ [7, 8].

Рассматривая круговой контур и используя полярную систему координат, можно представить интеграл (2.8) в виде

$$J = r \int_{\Gamma_1} [\Phi \cos \theta - r^{-1} \chi(\theta)] d\theta$$

$$\chi(\theta) = \sin \theta [\sigma_r(u_{\theta} - u'_r) - \sigma_{r\theta}(u_r - u'_{\theta})] + \frac{1}{2} \cos \theta (\sigma_r u_r + \sigma_{r\theta} u_{\theta})$$

Штрихом обозначено дифференцирование по углу θ . Используя выражения (3.8) и (3.11), в результате преобразований получим

$$J = 2K^2 \left[\pi \left(A + \frac{B}{9} \right) + \frac{2C}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sqrt{4-3\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{3} C \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(4 - 3 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \\
& = 2K^2 \left\{ \pi \left(A + \frac{B}{2} \right) + \frac{16}{9} C \left[-F \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{14}{5} E \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

где F и E – эллиптические интегралы первого и второго рода. Приравнявая значения интеграла по контурам Γ_1 и Γ_2 , определим коэффициент K в решении (3.8)–(3.11):

$$K = \sigma_{\infty} \sqrt{l/2} \sqrt{\pi(A + B/9)} [\pi(A + B/9) + 2,195C]^{-\frac{1}{2}}$$

При $C = 0$ получаем известный результат $K = K_1 = \sigma_{\infty} \sqrt{l/2}$. В таблице приведены относительные значения коэффициента K при различных значениях коэффициента C :

C/A	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
K/K_1	0,95	0,92	0,90	0,88	0,86	0,84	0,82

Отношение B/A принято равным $5/3$. Для большинства материалов оно колеблется в пределах от 1,3 до 3. Из приведенных в таблице значений видно, что согласно силовому критерию роста трещины $K = K_1$ [11] величины критических напряжений с учетом зависимости свойств материала от вида напряженного состояния оказываются выше, чем без учета такой зависимости.

На основе полученных решений можно заключить, что при анализе полей напряжений и деформаций в окрестности трещин с использованием определяющих соотношений деформационного типа предположение о несжимаемости материала далеко не всегда может быть принято. Даже незначительное различие деформационных характеристик при разных видах нагружения может вызвать заметное объемное деформирование. При замене нелинейных диаграмм деформирования соответствующей линейной аппроксимацией степень приближенности результатов определяется различием в величинах удельной энергии деформации для реальных криволинейных диаграмм и аппроксимирующих. Учет зависимости деформационных характеристик от вида напряженного состояния, связанной с наличием в материале различного рода повреждений, позволяет уточнить критические значения напряжений, определяющие начало роста трещины, причем величина этой поправки может быть существенной.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда (гранты № NCH000 и № NCH300) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00194).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В.В. О физическом смысле инвариантов, используемых в теории пластичности // ПММ. 1952. Т. 16. Вып. 5. С. 615–619.
2. Ломакин Е.В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния. 1. Экспериментальные зависимости и определяющие соотношения // Механика композит. материалов. 1988. № 1. С. 3–9.
3. Березин А.В., Ломакин Е.В., Строков В.И., Барабанов В.Н. Сопротивление деформированию и разрушение изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния // Пробл. прочности. 1979. № 2. С. 60–65.
4. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наук. думка, 1983. 366 с.
5. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 66–75.

6. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
7. Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 1–12.
8. Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. No. 1. P. 13–31.
9. Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at crack tip // J. Mech. and Phys. Solids. 1968. V. 16. N 5. P. 337–347.
10. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
11. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. No. 3. P. 361–364.

Москва

Поступила в редакцию
6.III.1995