МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 531.381

© 1996 г. С.А. МАТЮХИН, И.Н. СИНИЦЫН

СТАЦИОНАРНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассматривается движение механической системы, состоящей из одного или двух твердых тел, имеющих по одной неподвижной точке при наличии неголономной связи типа связи Суслова. Предполагается, что на тела со стороны среды действуют детерминированные диссипативные и случайные моменты. Получены точные выражения для одномерной плотности стационарных флуктуаций.

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из одного S_1 или двух твердых тел S_1, S_2, имеющих по одной неподвижной точке при наличии неголономной связи типа связи Суслова [1]. Примем, что на тела со стороны среды действуют детерминированные диссипативные и случайные моменты. Тогда динамические уравнения Эйлера, записанные в связанных с телами декартовых системах координат $O_i x^i y^i z^i$(O_i – неподвижная точка тела S_i, i = 1,2) имеют вид

$$\mathbf{I}^i(\boldsymbol{\omega}^i)^{\cdot} + \boldsymbol{\omega}^i \times \mathbf{I}^i\boldsymbol{\omega}^i = -\boldsymbol{\Phi}^i\boldsymbol{\omega}^i + \Lambda\boldsymbol{\lambda}^i + \mathbf{V}^i (i=1,2) \tag{1.1}$$

В случае одного тела S_1 уравнение неголономной связи запишется в виде

$$\langle \boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\omega}^1 \rangle = \Omega \tag{1.2}$$

а в случае двух тел S_1 и S_2:

$$\sum_{j=1}^{2} \langle \boldsymbol{\lambda}^i, \boldsymbol{\omega}^j \rangle = \Omega \tag{1.3}$$

Здесь введены следующие обозначения: ($\times$) и $<\cdot, \cdot>$ – символы векторного и скалярного произведения, $\boldsymbol{\omega}^i$ – вектор угловой скорости тела S_i, $\mathbf{I}^i = [I^i{}_{hm}]$ (h, m = 1, 2, 3) – тензор инерции тела, $\boldsymbol{\Phi}^i$ – некоторая положительная (в общем случае несимметричная) (3×3)-матрица диссипации, $\mathbf{V}^i = [V^i{}_1\ V^i{}_2\ V^i{}_3]^{\mathrm{T}}$ – вектор нормальных белых шумов с нулевыми математическими ожиданиями и постоянной матрицей интенсивности $\boldsymbol{\nu}^i = [\nu^i_{hm}]$ (h, m = 1, 2, 3), $\boldsymbol{\lambda}^i$ – орт некоторого известного жестко связанного с телом S_i направления, Λ – неизвестный множитель неголономной связи, Ω – известная величина, имеющая размерность угловой скорости.

Будем рассматривать систему уравнений (1.1) как систему нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в смысле Ито на многообразии (1.2) (или на (1.3)).

Поставим общую задачу нахождения стационарных одномерных распределений флуктуаций угловых скоростей.

Для тела с неподвижной точкой в случае Суслова при $\Omega = 0$ стационарные флуктуации изучены в [2–4]. В [5] изучены стационарные и нестационарные флуктуации тела при наличии сервосвязи.

Общая задача о стационарных флуктуациях тела с неподвижной точкой без неголономных связей и сервосвязей изучалась в [6, 7].

2. Теория нормальных (гауссовых) стохастических дифференциальных систем с инвариантной мерой [2–4] с помощью первых интегралов невозмущенной случайными и детерминированными диссипативными моментами динамической системы позволяет найти условия существования и точные выражения одномерных и конечномерных распределений угловых скоростей рассматриваемой динамической системы.

Приведем основные результаты для одномерных стационарных распределений при диагональных матрицах $\mathbf{I}^i$, $\mathbf{\Phi}^i$, $\boldsymbol{\nu}^i$ $(i = 1, 2)$ соответственно для одного и двух твердых тел.

3. Для одного твердого тела с неголономной связью (1.2), опуская для простоты верхний индекс (1), обозначим

$$\mathbf{I}_* = \mathrm{diag}(I_{11}, I_{22}), \quad \mathbf{\Phi}_* = \mathrm{diag}(\mathbf{\Phi}_{11}, \ \mathbf{\Phi}_{22})$$

$$\boldsymbol{\nu}_* = \mathrm{diag}(\boldsymbol{\nu}_{11}, \ \boldsymbol{\nu}_{22}), \quad \boldsymbol{\lambda} = [0 \ \ 0 \ \ 1]^T$$

Тогда при $\Omega \neq 0$ справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть главные моменты инерции тела S_1 удовлетворяют условию $I_{11} < I_{22} < I_{33}$, а матрица диссипации $\mathbf{\Phi}_*$ допускает представление $\mathbf{\Phi}_* = \mu\boldsymbol{\nu}_*[I_{33}\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_*]$, где μ – положительная величина, $\mathbf{E}_2$ – единичная (2×2) – матрица. Тогда в системе (1.1), (1.2) существует нормальный стационарный в узком смысле режим флуктуаций с одномерной плотностью

$$\left.\begin{aligned} &f(\boldsymbol{\omega}_*) = c_1 \exp[-\boldsymbol{\omega}_*^T \mathbf{C}_* \boldsymbol{\omega}_*] \\ &c_1 = (2\pi)^{-1} |\mathbf{C}_*|^{1/2}, \quad \boldsymbol{\omega}_* = [\omega_1 \omega_2]^T \\ &\mathbf{C}_* = \mu \mathbf{I}_* [I_{33}\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_*] \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Доказательство. Невозмущенная система, т.е. система (1.1), (1.2) при отсутствии диссипативных и случайных моментов, имеет следующий квадратичный интеграл: $k^2 = \boldsymbol{\omega}_*^T \mathbf{I}_*[I_{33}\mathbf{E}_2 - \mathbf{I}_*]\boldsymbol{\omega}_*$. На основании утверждения 1 из [4], функция $f(\boldsymbol{\omega}_*)$ будет одномерной плотностью стационарного в узком смысле распределения, если она является плотностью конечной инвариантной меры невозмущенной системы.

Утверждение 2. Пусть на динамически симметричное тело S_1 $(I_{11} = I_{22})$ действуют нормальный флуктуирующий и диссипативный моменты, удовлетворяющие соответственно условиям

$$\boldsymbol{\nu}_* = \nu_0 \mathbf{I}_*, \quad \mathbf{\Phi}_* = \varphi_0 \mathbf{I}_* \ (\nu_0 = \mathrm{const}, \ \varphi_0 = \mathrm{const})$$

Тогда в системе (1.1), (1.2) существует нормальный стационарный в узком смысле режим флуктуаций с одномерной плотностью

$$f(\omega_1, \omega_2) = c_2 \exp[-\alpha((\omega_1)^2 + (\omega_2)^2)], \quad \alpha = 2\varphi_0 \nu_0^{-1} I_{11} \qquad (3.2)$$

где c_2 – постоянная нормировки плотности распределения.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

4. Для системы двух твердых тел S_1 и S_2, соединенных неголономной связью (1.3), когда $\omega_3^1 + \omega_3^2 = \Omega$, при $\Omega = 0$ имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть главные моменты инерции тел S_1 и S_2 удовлетворяют условиям $I_{11}^i < I_{22}^i < I_{33}^i$ $(i = 1, \ 2)$ и существуют вещественные числа μ_1, μ_2, такие, что матрицы диссипации $\mathbf{\Phi}^i$ допускают представление

$$\mathbf{\Phi}^i = \boldsymbol{\nu}^i [\mu_1 (I_{33}^i \mathbf{E}_3 - \mathbf{I}^i) + \mu_2 \mathbf{E}_3]$$

а квадратичная по ω_1^1, ω_2^1, ω_3^1, ω_1^2, ω_2^2 форма Q_1:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{2} \mu_1 k_i^2 + \mu_2 T,$$

$$k_i^2 = \sum_{h=1}^{2} I_{hh}^i (I_{33}^i - I_{hh}^i)(\omega_h^i)^2$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} I_{hh}^i (\omega_h^i)^2 + \frac{1}{2}(I_{33}^1 + I_{33}^2)(\omega_3^1)^2$$

является положительно определенной. Тогда в системе (1.1), (1.3) существует нормальный стационарный в узком смысле режим флуктуаций с одномерной плотностью

$$f(\omega_1^1,\ \omega_2^1,\ \omega_3^1,\ \omega_1^2,\ \omega_2^2) = c_3 \exp(-Q_1),\ \ c_3 = \text{const} \tag{4.1}$$

где E_3 – единичная (3×3)-матрица.

Доказательство. Из представления функции $F = -\ln f + \ln c_3$ в виде связки Четаева квадратичных интегралов невозмущенной системы, которые, как показано в [1], имеют вид

$$k_i^2 = \sum_{h=1}^{2} I_{hh}^i (I_{33}^i - I_{hh}^i)(\omega_h^i)^2$$

$$2T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} I_{hh}^i (\omega_h^i)^2 + (I_{33}^1 + I_{33}^2)(\omega_3^1)^2$$

и из утверждения 1 [4] вытекает справедливость утверждения 3.

В случае, когда $\Omega \neq 0$ аналогично доказывается утверждение.

Утверждение 4. Пусть главные моменты инерции тел S_1 и S_2 удовлетворяют условиям $I_{11}{}^i = I_{22}{}^i$ ($i = 1, 2$) и существуют вещественные числа μ_1, μ_2, μ_3 такие, что:

$$\Phi_{11}^i = \mu_1 \nu_{11}^i,\ \Phi_{22}^i = \mu_1 \nu_{22}^i\ \ (i = 1,\ 2)$$

$$(\Phi_{33}^1 + \Phi_{33}^2)(I_{33}^1 + I_{33}^2) = \mu_2(\nu_{33}^1 + \nu_{33}^2)$$

квадратичная по ω_1^1, ω_2^1, ω_3^1, ω_1^2, ω_2^2 форма Q_2 допускает представление

$$Q_2 = 2\mu_1(T_1 + T_2) + \mu_2(\omega_3^1 - \mu_3\Omega)^2$$

$$2T_i = I_{11}^i((\omega_1^i)^2 + (\omega_2^i)^2),\ \ \mu_3 = \Phi_{33}^2(\Phi_{33}^1 + \Phi_{33}^2)^{-1}$$

и является положительно определенной. Тогда в системе (1.1), (1.3) существует нормальный стационарный в узком смысле режим флуктуаций с одномерной плотностью

$$f(\omega_1^1,\ \omega_2^1,\ \omega_3^1,\ \omega_1^2,\ \omega_2^2) = c_4 \exp(-Q_2),\ \ c_4 = \text{const} \tag{4.2}$$

5. Приведем некоторые замечания и обобщения. Для нормальных белых шумов $\mathbf{V}^i$ точные формулы (3.1), (3.2), (4.1), (4.2) могут быть получены и на основе приближенного метода нормальной аппроксимации [8].

Для пуассоновских белых шумов и более общих случайных процессов $\mathbf{V}^i$ метод нормальной аппроксимации [8] позволяет получить приближенные выражения для эквивалентных стационарных нормальных распределений.

Формулы (4.1) и (4.2) допускают непосредственное обобщение на случай системы из N тел, связанных попарно неголономными связями с линейной и кольцевой топологией, а также на случай гиростатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
2. *Moshchuk N.K., Sinitsyn I.N.* On stationary distributions in nonlinear stochastic differential systems. Quart. J. Mech. and appl. Math. V. 1991. 44. Pt. 4. P. 571–579.
3. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* О стохастических неголономных системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 213–223.
4. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* О стационарных и приводимых к стационарным режимах в нормальных стохастических дифференциальных системах // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 895–903.
5 *Синицын И.Н.* О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 23–31.
6. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* О флуктуациях в случайной среде тела с неподвижной точкой // Изв. АН СССР. МТТ. 1993. № 1. С. 39–44.
7. *Мощук Н.К., Синицын И.Н.* Стационарные флуктуации тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в случайной среде // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1337–1339.
8. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 630 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.III.1995