

УДК 539.374

© 1996 г. Г.З. ШАРАФУТДИНОВ

ПРИНЦИП ВРЕМЕННОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ПРИВЕДЕННОЕ ВРЕМЯ В ПРОЦЕССАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Температурно-временной аналогии (ТВА) и напряженно-временной аналогии (НВА), являющихся основой ускоренных методов испытаний [1], присущи некоторые недостатки, среди которых отметим следующие: в ТВА сравниваются податливости, которые при ступенчатом задании напряжений в линейной области совпадают с линейными функциями ползучести, т.е. с ядрами интегральных операторов. В области физической нелинейности эта величина не является в точности материальной функцией и поэтому при переходе в область физической нелинейности подходы к организации экспресс-испытаний на основе ТВА должны пересматриваться. По этой же причине НВА не имеет места в линейной области. Помимо этого, действующие на вещество и приводящие к сходным результатам воздействия существенно различаются между собой по своей физической сути. В связи с этим будем предполагать, что основной причиной изменения внутреннего времени является изменение удельной внутренней энергии тела.

1. Предположим, что задано некоторое тело, состояние выделенного элементарного объема которого характеризуется температурой T_0 , напряжениями σ_{ij}^0 и деформациями ϵ_{ij}^0 , а также некоторыми другими параметрами p_i^0 . Будем считать, что эти величины определяют условия приведения, относительно которых производится сравнение состояния тела.

Полный дифференциал удельной внутренней энергии E при изменении указанных величин имеет вид

$$dE = pCdT + dU + q_i dp_i \quad (1.1)$$

где ρ – плотность вещества, C – теплоемкость материала, U – часть удельной внутренней энергии, образуемой за счет деформирования материала, q_i – величины (интенсивные [2]), сопряженные с соответствующими (экстенсивными) параметрами p_i . Например, в случае влажно-временной аналогии [1] величина p_α представляет собой количество поглощенной выделенным объемом влаги, а в случае радиационно-временной аналогии [3] – интегральную дозу облучения, поглощенную этим объемом и т.п. Предположим, что плотность и теплоемкость при изменениях состояния тела остаются постоянными.

Будем исходить из того, что различного рода воздействия объединяются соотношением (1.1). Суть различных временных аналогий обобщенно заключается в том, что любое энергетическое воздействие на вещество приводит к изменению скоростей процессов в теле, в частности процессов ползучести и релаксации и изменению длительностей каких-либо процессов; например, при повышении температуры или уровня напряжений в теле достижение определенного уровня деформаций происходит за более короткий, с точки зрения внешнего наблюдателя, промежуток времени. Иными словами, любое энергетическое воздействие на вещество приводит к изменению масштаба внутреннего времени, связанного с кинетическими явлениями в веществе. В этом заключается суть принципа энергетически-временной эквивалентности.

ти, или, более кратко, принципа временной эквивалентности, проявление которого нетрудно видеть даже в повседневной жизни.

Внутреннее время, выраженное через время наблюдателя t , будем называть приведенным временем и обозначать через t' .

Представим t' при помощи смешанного функционала [4]:

$$t' = F[t, \varphi(E)] \quad (1.2)$$

где $\varphi(E)$ – некоторая функция или функционал, $E = E(x_i, t)$ – удельная внутренняя энергия. Зависимость E от координат и времени предполагает возможность неоднородного и нестационарного распределения E в теле.

Время наблюдателя (физическое время) определяется при помощи часов, находящихся в фиксированных физических условиях, которые не должны изменяться, по крайней мере, неконтролируемо, в течение одного или серии экспериментов. Именно эти физические условия наиболее рационально принять за условия приведения. Нетрудно видеть, что энергетическое воздействие влияет и на масштаб времени наблюдателя. Так, например, воздействие тепла приводит к изменению длины маятника в маятниковых часах, к изменению частоты молекулярных или атомных систем в соответствующих типах измерителей времени. Естественно, в измерителях времени по этой причине используются свойства тел или веществ, в наименьшей степени подверженных влиянию внешних воздействий, хотя и существует принципиальная возможность измерения времени, используя, например, явление ползучести.

Время наблюдателя, в свою очередь, также можно представить в виде

$$t = F[\tilde{t}, \varphi(E)] \quad (1.3)$$

где \tilde{t} – физическое время более высокого порядка, к примеру, не связанное с движением Земли.

В условиях приведения, при $E = E_0$ приведенное время t' совпадает с физическим временем t . При этом функция $\varphi(E)$ может быть нормирована, в частности, $\varphi(E_0)$ может быть положена равной 1. Промежуток приведенного времени $\Delta t'$ в общем случае определяется соотношением

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = F[t_2, \varphi(E)] - F[t_1, \varphi(E)]$$

Отметим также очевидное свойство, поскольку отсчет физического времени начинается от t_0 , то в любом случае $F[t_0, \varphi(E)] = 0$.

2. Функция приведения $\varphi(E)$ в соотношении (1.2) определяет изменение масштаба времени, приводящего в конечном итоге к тому, что одно и то же значение какой-либо функции, характеризующей два одинаковых состояния деформированного тела, достигается за различные промежутки времени. При графическом представлении этих функций они оказываются смещенными друг относительно друга вдоль оси времени. При анализе таких графиков нетрудно видеть, что такое смещение не является параллельным сдвигом. Однако было замечено, что в некоторых случаях при представлении графиков в полулогарифмических координатах они могут быть совмещены путем параллельного сдвига вдоль оси логарифма времени. Рассмотрим это подробнее.

Предположим для определенности, что существуют две зависимости деформации от времени, полученные при различных постоянных значениях температуры T_1 и T_2 . Изменение температуры тела ($T_1 \neq T_2$) приводит к изменению удельной внутренней энергии. Аналогичным образом проявляется и изменение напряженно-деформированного состояния тела. Заметим, что в случае бесконечно малых деформаций этим изменением можно пренебречь. Во всяком случае будем исходить из того, что состояния тела характеризуются значениями E_1 и E_2 . Соответствующие зависимости представим в виде $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(t)$. Будем считать состояние 1 состоянием приведе-

ния. Предположим, что существует приведенное время t' , такое, что

$$\varepsilon_2(t') = \varepsilon_1(t) \quad (2.1)$$

С другой стороны, предположим, что существует неособое преобразование координат $f(t)$, в результате применения которого заданные кривые могут быть совмещены путем параллельного сдвига. Это означает, что

$$\varepsilon_1[f(t)] = \varepsilon_2[f(t) - S] \quad (2.2)$$

где S – величина сдвига вдоль оси абсцисс. Применяя это же преобразование к аргументам соотношения (2.1), и учитывая (2.2), получим

$$\varepsilon_2[f(t')] = \varepsilon_2[f(t) - S] \quad (2.3)$$

Считая, что S зависит не только от приращения удельной внутренней энергии ΔE , но и от времени t , отсюда получаем уравнение

$$f(t') = f(t) - S(\Delta E, t) \quad (2.4)$$

Разрешая (2.4) относительно t' (при условии, что это можно сделать), получим

$$t' = f^{-1}[f(t) - S(\Delta E, t)] \quad (2.5)$$

где f^{-1} – обратная к f функция.

Уравнение (2.4) может быть приведено к так называемому функциональному уравнению, для чего необходимо задать характер связи приведенного времени с физическим. Так, например, при

$$t' = t / a \quad (2.6)$$

где a – коэффициент приведения или редукции, из (2.4) получим уравнение

$$f(t) - f(t/a) = S(\Delta E, t) \quad (2.7)$$

в котором сдвиг S определяется по экспериментальным данным. Одним из решений функционального уравнения (2.7) является функция $\ln t$. При этом имеем

$$\ln a = S(\Delta E, t) \quad (2.8)$$

откуда и определяется коэффициент редукции a .

Приводимый вывод полностью определяет эмпирически сделанный выбор представления коэффициентов редукции в качестве аргумента логарифма, как, например, в формуле Вильяса – Ланделла – Ферри в ТВА:

$$-\ln a_T = \frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)}$$

где C_1, C_2 – константы, а также в аналогичной формуле в напряженно-временной аналогии и в некоторых других случаях [1].

С учетом введенных выше предположений (2.1), (2.2) и (2.6) смешанный функционал (1.2) примем в виде [4]:

$$t' = \int_{t_0}^t \frac{d\vartheta}{\varphi(E)} \quad (2.9)$$

Значение промежутка времени $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ при этом равно

$$\Delta t' = \int_{t_0}^{t_2} \frac{d\vartheta}{\varphi(E)} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vartheta}{\varphi(E)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vartheta}{\varphi(E)} \quad (2.10)$$

С точки зрения анализа экспериментальных данных удобно иметь дело не с $\varphi(E)$, а с нелинейным функционалом $\psi(E) = -\ln \varphi(E)$. В этом случае любое значение $\psi(E)$ определяется по экспериментальным данным как величина сдвига при параллельном переносе графиков вдоль оси $\ln t$ до их совмещения.

Предположим, что $\psi(E)$ есть нелинейный аналитический функционал. Известно [4], что он может быть представлен не только в виде бесконечного разложения, но и в конечной форме, при помощи двух линейных функционалов. Такое представление имеет вид

$$\psi(E) = L \left[\frac{I(\alpha, E_0, \Delta E)}{1 - \alpha M(\Delta E)} \right] \quad (2.11)$$

где L и M – линейные функционалы, I – локальная индикатриса нелинейного аналитического функционала, т.е. его значения в определенной аналитической области [4], α – некоторый параметр.

Учитывая для простоты только два первых слагаемых в соотношении (1.1), имеем следующее представление для $\psi(E)$:

$$\psi(E) = L \left[\frac{I(\alpha, E_0, \rho C \Delta T + \Delta U)}{1 - \alpha M(\rho C \Delta T + \Delta U)} \right] \quad (2.12)$$

Этот случай выбран по следующим причинам: совместное влияние тепла и напряженно-деформированного состояния на удельную внутреннюю энергию является достаточно распространенным случаем в механике деформируемого тела.

При совместном применении температурно-временной и напряженно-временной аналогий вводится множественный коэффициент редукции [1]. Для его представления локальную индикатрису I и $\psi(E)$ зададим в виде

$$I = \frac{l \Delta T + k \Delta U}{\exp(\gamma(T_0 - 293)) + b \Delta U_0} \quad (2.13)$$

$$\psi(E) = L \left[\frac{l \Delta T + k \Delta U}{(\exp(\gamma(T_0 - 293)) + b \Delta U_0)(1 - \alpha M(\rho C \Delta T + \Delta U))} \right] \quad (2.14)$$

где l, k, γ, b – константы.

Далее будут использованы экспериментальные данные, полученные на образцах из эпоксифенольного тканевого стеклопластика при одноосном растяжении под углом 45° к осям армировки для различных температурных и силовых условий нагружения [1]. Однако приводимые в цитируемой работе данные не позволяют вычислить изменение удельной внутренней энергии, обусловленное действием напряжений в теле, хотя бы потому, что не известно соотношение между рассеиваемой и поглощаемой телом энергией. По этой причине воспользуемся упрощенным подходом, в соответствии с которым величина удельной внутренней энергии пропорциональна величине действующих в теле напряжений. Такой подход позволяет получить конкретные числовые результаты, и что немаловажно, сравнить их с экспериментальными данными, приводимыми в [1]. Приводимые в цитируемой работе данные свидетельствуют о том, что испытуемый материал является нелинейным вязкоупругим материалом, причем при действующем напряжении равном 422 кГ/см^2 поведение материала оценивается как физически линейное, а при более высоких значениях напряжений – как физически нелинейное, в связи с нарушением принципа однородности, непосредственно следующим из экспериментальных данных.

Рассмотрим случай представления линейных операторов L и M в (2.14) в виде операций умножения на число. Тогда из (2.14), учитывая введенное выше предполо-

Таблица 1

ΔT	$\sigma_0 = 422$		$\sigma_0 = 844$		$\sigma_0 = 1056$	
10	1,6	1,75	0,91	–	0,75	–
20	3,2	4,62	1,32	1,75	1,5	1,38
30	4,81	–	2,74	2,63	2,25	2,25
40	6,43	6,63	3,67	3,63	3,01	3,00

Таблица 2

$\Delta \sigma$	$T_0 = 333$		$T_0 = 323$		$T_0 = 313$		$T_0 = 303$	
211	1,04	–	1,32	–	1,62	–	2,13	2,09
422	2,17	2,0	2,76	2,41	3,3	2,71	4,43	4,4
634	3,4	3,43	4,3	4,1	5,28	4,85	6,94	–

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,5	6,72	3,51	7,42	0,046	1,03	0,052
2	1,0	6,47	3,67	7,25	0,097	1,09	0,11
3	1,5	6,38	3,81	7,17	0,151	1,13	0,172
4	2,0	6,36	3,93	7,18	0,208	1,17	0,234
5	2,5	6,38	4,04	7,08	0,268	1,21	0,298
6	3,0	6,43	4,13	7,06	0,329	1,24	0,364
7	3,5	6,49	4,20	7,03	0,392	1,26	0,431
8	4,0	6,57	4,25	7,01	0,460	1,29	0,499
9	4,5	6,66	4,29	6,99	0,530	1,31	0,569
10	5,0	6,76	4,31	6,96	0,604	1,34	0,641
11	5,5	6,87	4,30	6,93	0,681	1,36	0,710
12	6,0	6,98	4,29	6,90	0,762	1,39	0,790

жение, получим

$$\psi(E) = \frac{A\Delta T + B\Delta\sigma}{(\exp(\gamma(T_0 - 293)) + b\Delta U_0)(1 - \lambda\Delta T - \mu\Delta\sigma)} \quad (2.15)$$

Исходя из экспериментальных данных [1] были определены следующие значения коэффициентов в этом соотношении: $A = 0,65 \text{ град}^{-1}$, $B = 0,0396 \text{ (кГ/см}^2\text{)}^{-1}$, $\gamma = 0,0415 \text{ град}^{-1}$, $b = 0,0073 \text{ (кГ/см}^2\text{)}^{-1}$, $\lambda = 0,00024 \text{ град}^{-1}$, $\mu = 0,000181 \text{ (кГ/см}^2\text{)}^{-1}$.

При помощи формулы (2.15) были рассчитаны значения коэффициента температурно-временной редукции (точнее – логарифмы этих величин) для различных условий приведения: $\alpha_0 = 422, 844, 1056 \text{ кГ/см}^2$. Температура приведения T_0 во всех случаях принималась равной 293° К . Этот выбор определялся возможностью сопоставления с приводимыми в [1] результатами. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Эта же формула была использована и для определения коэффициента напряженно-временной редукции при различных условиях приведения: $T_0 = 333, 323, 313, 293^\circ \text{ К}$, $\alpha_0 = 422 \text{ кГ/см}^2$. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

В этих таблицах первые колонки содержат приращения температуры и напряжений. Последующие пары колонок относятся к различным случаям изменения условий приведения: напряжений в табл. 1 и температуры – в табл. 2. В каждой паре

колонок первая содержит расчетные значения $\psi(E)$, вторая – экспериментальные значения [1].

Из представленных данных видно, что формула (2.15) удовлетворительно описывает временной сдвиг, как в температурно-временной, так и в напряженно-временной аналогии. Заметим, что эта формула учитывает установленную в [1] закономерность, заключающуюся в том, что при увеличении значений напряжений или температуры или, говоря обобщенно, при увеличении удельной внутренней энергии величина временного сдвига уменьшается.

3. Приводимые числовые данные свидетельствуют о справедливости принципа температурно-временной эквивалентности независимо от состояния материала и во всех случаях нагрев приводит к изменению скоростей процессов деформирования. Действительно, из экспериментальных данных [1] следует справедливость этого принципа как в области линейного, так и физического нелинейного поведения материала. Более того, влияние температуры в обеих областях описывается одной и той же формулой (2.15). Эта же формула применима и для описания влияния напряжений на скорость деформирования. Нетрудно заметить влияние этих факторов на скорость процессов деформирования и при других состояниях материала, и отсутствие адекватных соотношений, описывающих такие влияния не может служить основанием для отрицания справедливости принципов временной эквивалентности.

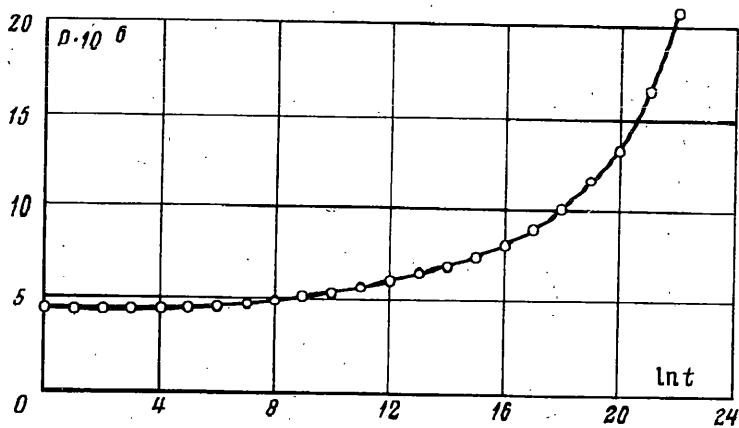
Напряженно-временная аналогия обычно полагается справедливой в физически нелинейной области поведения материала. Нетрудно видеть, что причиной тому послужило, в первую очередь, использование функции ползучести при сравнении различных состояний деформированного тела. Действительно, пусть деформация ε есть функция напряжений и времени: $\varepsilon = \varepsilon(\sigma, t)$. Зададим напряжение в виде $\sigma = \sigma_0 h(\tau)$, где $h(t)$ – функция, характеризующая процесс нагружения во времени.

В линейной области в силу принципа однородности получим $\varepsilon/\sigma_0 = \varepsilon(h(t), t)$. Если $h(t)$ – функция Хевисайда, то последнее соотношение представляет собой линейную функцию ползучести, не зависящую от уровня действующих напряжений. В общем случае это соотношение оказывается зависимым от характера изменения напряжения в процессе нагружения и поэтому сравнение двух состояний должно производиться с учетом траектории нагружения.

Таким образом, характер воздействия на вещество тепла или механической работы в раздельности не связан с его состоянием. Естественно предположить, что это справедливо и при совместном действии различных источников энергии на вещество. Тогда, коль скоро физически нелинейное поведение материала определяется уровнем напряжений и степень влияния тепла и напряжений устанавливается по экспериментальным данным, то может быть поставлена проблема об определении зависимости $\varepsilon \sim t$ в физически нелинейной области, исходя из подобной экспериментальной зависимости в линейной области и концепции приведенного времени.

Общая схема определения зависимости $\varepsilon \sim t$ состоит в следующем. Вначале выбирается какая-либо зависимость $\varepsilon \sim t$ в линейной области, или, что эквивалентно, линейная функция ползучести, полученная при определенном значении напряжения σ_0 . Эта величина совместно со значением температуры тела, при котором получена эта функция, определяет условия приведения. Затем для каждого фиксированного значения σ и T определяются приращения этих величин, позволяющие при помощи формулы (2.15) вычислить величину временного сдвига. Прибавляя величину сдвига, определяемую текущими значениями напряжений и температуры тела, к логарифму текущего времени, находим момент времени, по значению которого из зависимости $\varepsilon \sim t$ в линейной области определяем значение деформации ε для физически нелинейной области поведения материала в заданный момент времени.

Положение кардинально меняется, если отказаться от предположения о пропорциональности между напряжениями и удельной внутренней энергией, сформулированном во втором разделе. При этом для вычисления величины U необходимо также



Фиг. 1

знать значения деформаций. Для решения этой задачи можно применить метод последовательных приближений, суть которого в данном случае заключается в вычислении на первом шаге значений деформации по линейной теории и последующей корректировке их по излагаемой здесь методике.

Проиллюстрируем эту методику на конкретных примерах (на основе экспериментальных данных, приведенных в [1]). В качестве исходной была взята линейная функция ползучести $P(t)$, полученная при $\sigma_0 = 422 \text{ кГ/см}^2$ и $T_0 = 293^\circ \text{ К}$ [1], в зависимости от $\ln t$ приведенная на фигуре.

Рассмотрим следующие случаи:

$$T = 303^\circ \text{ К}, \quad \sigma = 176t (\text{кГ/см}^2), \quad 0 \leq t \leq 6 \text{ ч}$$

$$T = 303 + 5t (^\circ \text{ К}), \quad \sigma = 844 (\text{кГ/см}^2), \quad 0 \leq t \leq 6 \text{ ч}$$

$$T = 303 + 5 (^\circ \text{ К}), \quad \sigma = 147,5t (\text{кГ/см}^2), \quad 0 \leq t \leq 6 \text{ ч}$$

При помощи формулы (2.15) в каждом из этих случаев были определены значения временного сдвига через 0,5 часа. В этих же точках вычислялись приведенные времена, которые и определяли затем значения ϵ нелинейной зависимости для заданного текущего времени. Результаты расчетов приведены в табл. 3. В ней колонка 1 содержит номера точек, 2 – значения времени, 3, 4 и 5 – величину сдвига для первого, второго и третьего случаев соответственно. Значения деформации (в процентах) для выделенных моментов времени, указанных в колонке 2, для этих же случаев приведены в 6, 7 и 8 колонках.

Наиболее иллюстративным является второй случай. В нем рассматривается физически нелинейное деформирование образца во всем временном промежутке. Приводимые в [1] экспериментальные данные позволяют оценить степень достоверности полученных результатов. В частности, в [1] приводятся данные о ползучести испытуемого материала при $\sigma = 844 \text{ кГ/см}^2$ и $T = 333^\circ \text{ К}$, т.е. при таком уровне, какой реализуется во втором случае лишь в конце временного промежутка. К этому моменту, как это следует из [1], уровень деформации достигает величины 0,016–0,017 (в расчетах получено 0,014). Так как в рассматриваемом случае во всем временном интервале значения температуры были меньше указанной величины, то заниженное расчетное значение деформации при $t = 6$ час представляется закономерным.

Рассматриваемые примеры свидетельствуют о том, что приведенное время, непосредственно через удельную внутреннюю энергию E отражает влияние внешних условий в виде потоков тепла, ионизирующих излучений, влаги и др., а также механической работы, приводящей тело в напряженное состояние или каким-либо иным образом изменяющей величину E . По этой причине удельная внутренняя энергия тела

или какая-либо ее функция может быть принята за обобщенный параметр процесса деформирования.

Поскольку свойства реономных материалов существенно зависят от времени, то в этом случае в качестве параметра процесса деформирования удобно выбрать приведенное время, определяемое соотношением (1.2), или, более конкретно, соотношением (2.9). Нетрудно видеть, что соотношение (2.9) дает интегральное значение параметра процесса, учитывающего зависимость энергетических воздействий от времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1975. 416 с.
2. Морс Ф. Теплофизика. М.: Наука, 1968. 416 с.
3. Шарафутдинов Г.З. Радиационно-временная аналогия и ее использование в фотовязкоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 92–99.
4. Леви П. Конкретные проблемы функционального анализа. М.: Наука, 1967. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.11.1995