

УДК 539.214; 539.374

© 1996 г. В.А. КОВТУНЕНКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНТАКТЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ БАЛКИ ДЛЯ МОДЕЛИ ТИМОШЕНКО

Рассматривается система вариационных неравенств, описывающая задачу равновесия упруго-пластической балки, шарнирно закрепленной по краям, под действием жесткого штампа. Границы контакта и зоны пластичности заранее неизвестны. Для описания поведения материала используется модель пластического течения.

В [1] с помощью метода штрафов доказана теорема существования для исследуемой модели. В настоящей статье построена итерационная система линейных дифференциальных уравнений и доказана сходимость ее решения к решению исходной задачи. Численные расчеты по построенной схеме проиллюстрированы на модельных примерах.

Задача контакта упругопластической балки с жестким штампом формулируется следующим образом. На прямоугольнике $(0,1) \times (0, T)$ требуется найти неизвестные функции поперечного прогиба балки $w(x, t)$ и изгибающего момента $m(x, t)$, удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$w \geq \phi, \quad |m| \leq a$$

$$(m_{xx} + f, \bar{w} - w) \leq 0, \quad \forall \bar{w} \geq \phi$$

$$(-cm_{xx} + \bar{m} + w_{xx}, \bar{m} - m) \geq 0, \quad \forall |\bar{m}| \leq a \quad (1)$$

$$m = w = 0, \quad \text{при } x = 0, 1$$

$$m = {}^0m, \quad w = {}^0w \quad \text{при } t = 0$$

Заданными считаются функции формы штампа $\phi \in L^\infty(0, T; H^2(0, 1))$ ($\phi \leq 0$ при $x = 0, 1$), внешняя нагрузка $f \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1))$ и константы $a > 0, c > 0$. Скобки (\cdot, \cdot) обозначают скалярное произведение в $L^2(0, 1)$, точка над функцией – производную по параметру t . Здесь и далее через $H^k(0, 1)$, $k = 1, 2$ обозначается пространство обобщенных функций Соболева $W_2^k(0, 1)$, $H_0^k(0, 1)$ – замыкание в соответствующей норме гладких финитных функций.

Односторонняя начально-краевая задача (1) содержит в себе геометрическое ограничение $w(x, t) \geq \phi(x, t)$, которое обозначает непроникание балки через штамп, и физическое ограничение на момент. Строгое неравенство $|m(x, t)| < a$ описывает состояние упругости, равенства $|m(x, t)| = a$ определяет участки балки $0 \leq x \leq 1$, точки x которых находятся в состоянии пластичности в момент t [2].

Обычный подход к численному решению вариационных неравенств состоит в их замене на задачу минимизации функционала [3] или отыскания седловой точки лагранжиана [4]. Система вариационных неравенств (1) не является условием для существования седловой точки лагранжиана. Другой из возможных подходов состоит в применении метода штрафа [5]. Использование этого метода возможно для аппроксимации как упругоидеальнопластического течения [6], так и контактного взаимо-

действия. В частности, для задачи контакта упругой пластины со штампом в [7] изложены некоторые итерационные схемы, основанные на методе штрафа. Цель данной работы состоит в построении итерационного метода для штрафной задачи, ассоциированной с исходной моделью контакта упругопластической балки Тимошенко.

Задачу (1) можно переформулировать в приращениях. Разобьем отрезок $(0, T)$ на интервалы длиной Δt точками $k = 0, 1, 2, \dots, K$. Будем обозначать значения функций в точке $t = k \Delta t$ левым верхним индексом k . Получим последовательность уже деформированных задач при каждом $k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$:

$${}^{k+1}w \geq {}^{k+1}\phi, \quad |{}^{k+1}m| \leq a$$

$$({}^{k+1}m_{xx} + f, \bar{w} - {}^{k+1}w) \leq 0 \quad \forall \bar{w} \geq {}^{k+1}\phi \quad (2)$$

$$\left(-c \frac{{}^{k+1}m_{xx} - {}^k m_{xx}}{\Delta t} + \frac{{}^{k+1}m - {}^k m}{\Delta t} + \frac{{}^{k+1}w_{xx} - {}^k w_{xx}}{\Delta t}, \bar{m} - {}^{k+1}m \right) \geq 0$$

$$\forall |\bar{m}| \leq a$$

$${}^{k+1}m = {}^{k+1}w = 0 \quad \text{при } x = 0, 1$$

Введем операторы штрафа

$$\beta(w) = \begin{cases} 0, & \text{если } w \geq \phi \\ w - \phi, & \text{если } w < \phi \end{cases}$$

$$\alpha(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } |m| \leq a \\ m - a, & \text{если } m > a \\ m + a, & \text{если } m < -a \end{cases}$$

Тогда уравнения со штрафом, ассоциированные с системой (2), будут следующими:

$$-{}^{k+1}m(e, q)_{xx} + \beta({}^{k+1}w(e, q)) / e = f$$

$$-c {}^{k+1}m(e, q)_{xx} + {}^{k+1}m(e, q) + \Delta t \alpha({}^{k+1}m(e, q)) / q + {}^{k+1}w(e, q)_{xx} = -c {}^k m_{xx} + {}^k m + {}^k w_{xx} \quad (3)$$

$${}^{k+1}w(e, q) = {}^{k+1}m(e, q) = 0 \quad \text{при } x = 0, 1$$

где e и q — малые положительные параметры. В [1] доказан результат

$$({}^{k+1}w(e, q), {}^{k+1}m(e, q)) \rightarrow ({}^{k+1}w, {}^{k+1}m) \quad \text{слабо в } (H_0^1(0, 1))^2 \quad (4)$$

при $e, q \rightarrow 0$, где ${}^{k+1}w, {}^{k+1}m$ — решение задачи (2). Полученные уравнения со штрафом (3) являются существенно нелинейными. Линеаризуем их следующим образом. Для простоты записи зависимость искомых функций от параметров e, q, t указывать не будем. Зафиксируем эти параметры и рассмотрим итерационную схему

$$g_{xx}^{n+1} - \frac{1}{c} g^{n+1} = \frac{\Delta t}{q + \Delta t} \alpha(g_{xx}^n - {}^k m) - \frac{1}{c} (w^n - {}^k w)$$

$$-w_{xx}^{n+1} + \frac{c}{e} w^{n+1} = cf + c(w^n - \beta(w^n)) / e - g_{xx}^{n+1} + c {}^k m_{xx} - {}^k w_{xx}, \quad (5)$$

$$m^{n+1} = (w^{n+1} - g^{n+1} -^k w)c +^k m$$

$$g^{n+1} = w^{n+1} = m^{n+1} = 0 \text{ при } x = 0, 1$$

для $n = 0, 1, 2, \dots$ и произвольных $g^0 \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $w^0 \in H_0^1(0,1)$.

Тогда из (4) следует, что известная правая часть первого уравнения (5) принадлежит $L^2(0, 1)$, а второго – $H^{-1}(0, 1)$. Следовательно, исходя из общей теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка, существует единственное решение задачи (5) $g^{n+1} \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, $w^{n+1}, m^{n+1} \in H_0^1(0,1)$.

Теорема 1. Имеет место сходимость $(w^{n+1}, m^{n+1}) \rightarrow (w, m)$ сильно в $(H_0^1(0,1))^2$ при $n \rightarrow \infty$, где (w, m) – решение системы (3).

Доказательство. Обозначим $u^{n+1} = w^{n+1} - w^n$, $v^{n+1} = g^{n+1} - g^n$, тогда из (5) следует

$$v_{xx}^{n+1} - \frac{1}{c}v^{n+1} = \frac{\Delta t}{q + \Delta t} (\alpha(g_{xx}^n -^k m) - \alpha(g_{xx}^{n-1} -^k m)) - \frac{1}{c}u^{n+1}$$

$$-u_{xx}^{n+1} + \frac{c}{e}u^{n+1} = \frac{c}{e}(u^n - \beta(w^n) + \beta(w^{n-1})) - v_{xx}^{n+1} \quad (6)$$

$$u^{n+1} = v^{n+1} = 0 \text{ при } x = 0, 1$$

Заметим следующие свойства операторов штрафа:

$$|\alpha(s^1) - \alpha(s^2)| \leq |s^1 - s^2|, \quad |s^1 - s^2 - (\beta(s^1) - \beta(s^2))| \leq |s^1 - s^2| \quad (7)$$

Умножим первое уравнение в (6) на v_{xx}^{n+1} , второе на u^{n+1} и проинтегрируем по $(0, 1)$ с учетом краевых условий, далее воспользуемся неравенством Гельдера и (7), в итоге получим оценки

$$\left(\frac{2q}{q + \Delta t} + \frac{\Delta t}{q + \Delta t} \right) \|v_{xx}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{c} \|v_x^{n+1}\|^2 \leq \frac{\Delta t}{q + \Delta t} \|v_{xx}^n\|^2 + \frac{1}{c} \|u_x^n\|^2$$

$$\frac{1}{c} \|u_x^{n+1}\|^2 + \frac{1}{e} \|u^{n+1}\|^2 \leq \frac{1}{c} \|v_x^{n+1}\|^2 + \frac{1}{e} \|u^n\|^2 \quad (8)$$

Поскольку для $u^{n+1} \in H_0^1(0,1)$, $v_x^{n+1} \in H^1(0,1)$, $\int_0^1 v_x^{n+1} dx = 0$ выполнено неравенство

Пуанкаре $\|u^{n+1}\| \leq \|u_x^{n+1}\|$, $\|v_x^{n+1}\| \leq \|v_{xx}^{n+1}\|$, то из (8) после сложения можно найти такое ρ , $0 < \rho < 1$, зависящее от e, q, c , что

$$\frac{\Delta t}{q + \Delta t} \|v_{xx}^{n+1}\|^2 + \frac{1}{c} \|u_x^{n+1}\|^2 + \frac{1}{e} \|u^{n+1}\|^2 \leq \rho \left(\frac{\Delta t}{q + \Delta t} \|v_{xx}^n\|^2 + \frac{1}{c} \|u_x^n\|^2 + \frac{1}{e} \|u^n\|^2 \right) \leq \dots$$

$$\dots \leq \rho^n \left(\frac{\Delta t}{q + \Delta t} \|v_{xx}^1\|^2 + \frac{1}{c} \|u_x^1\|^2 + \frac{1}{e} \|u^1\|^2 \right) \equiv c_1 \rho^n$$

Таким образом при фиксированных e, q :

$$\|v_{xx}^{n+1}\|, \|u_x^{n+1}\|, \|u^{n+1}\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (9)$$

Поскольку сумма ряда геометрической прогрессии с показателем $\sqrt{\rho} < 1$ огра-

ничена, то существует предельный элемент

$$g = g^0 + \sum_{i=1}^{\infty} v^i, \quad w = w^0 + \sum_{i=1}^{\infty} u^i$$

что

$$g^n \rightarrow g \text{ сильно в } H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

$$w^n \rightarrow w \text{ сильно в } H_0^1(0,1) \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (10)$$

В силу непрерывности операторов штрафа имеем

$$\alpha(g_{xx}^n) \rightarrow \alpha(g_{xx}), \quad \beta(w^n) \rightarrow \beta(w) \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (11)$$

Используя сходимости (9)–(11), перейдем к пределу в (5) при $n \rightarrow \infty$, получим

$$g_{xx}^{-k} m - \frac{\Delta t}{q + \Delta t} \alpha(g_{xx}^{-k} m) = \frac{1}{c} (g - w + {}^k w)^{-k} m$$

$$-w_{xx} + c\beta(w) / e = cf - g_{xx} + c^k m_{xx}^{-k} w_{xx} \quad (12)$$

$$m = (w - g - {}^k w) / c + {}^k m$$

$$g = w = m = 0 \text{ при } x = 0, 1$$

Поскольку равенства

$$g_{xx}^{-k} m - \frac{\Delta m}{q + \Delta t} \alpha(g_{xx}^{-k} m) = -m$$

$$m + \frac{\Delta t}{q} \alpha(m) = -g_{xx} + {}^k m$$

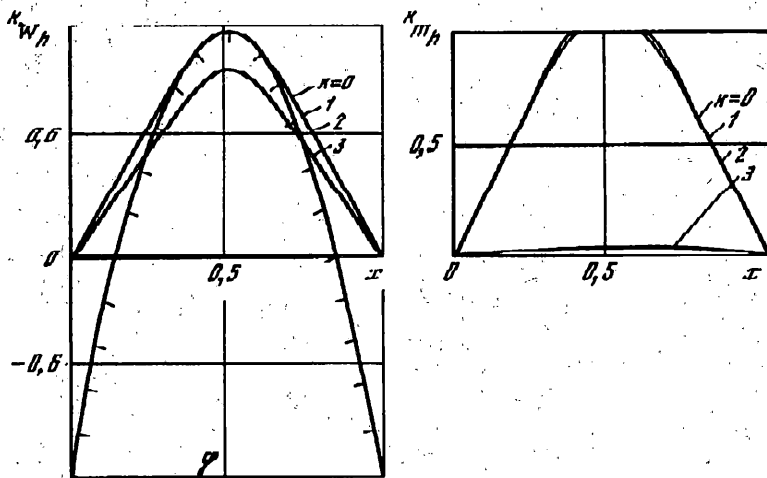
эквивалентны почти всюду на $(0, 1)$, то после исключения из (12) функции g получим искомое решение системы (3). Теорема доказана.

Для решения линейной системы дифференциальных уравнений (5) при фиксированном n использовался метод конечных разностей. Разобьем отрезок $(0, 1)$ на равные промежутки длины h и определим стандартные разностные операторы дифференцирования в узловых точках. Применяя метод трехточечной прогонки для разностного аналога системы (5) при $n = 0, 1, 2, \dots$, получим последовательность его численных решений, которые будем отмечать нижним индексом h . В силу доказанной теоремы итерационный процесс по n сходится, тогда назовем ${}^{k+1}w_h(e, q) = {}^{k+1}w_h^{n+1}(e, q)$, ${}^{k+1}m_h(e, q) = {}^{k+1}m_h^{n+1}(e, q)$ решением уравнений (3), если выполнено условие

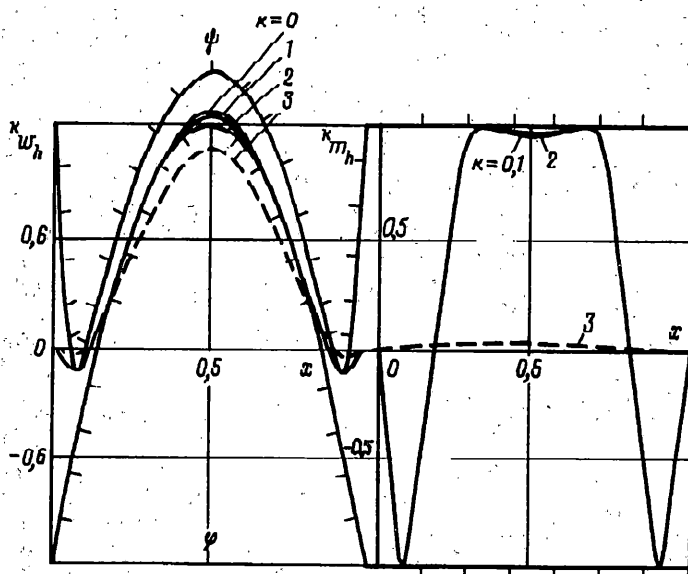
$$\max_x (|{}^{k+1}w_h^{n+1}(e, q) - {}^{k+1}w_h^n(e, q)| + |{}^{k+1}m_h^{n+1}(e, q) - {}^{k+1}m_h^n(e, q)|) \leq \delta$$

где $\delta > 0$ – заданная погрешность. Далее, используя сходимость (4), перейдем в (3) к пределу при $e, q \rightarrow 0$. Для этого выберем последовательность параметров $(e, q)_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$ и для каждого $i = 1, 2, 3, \dots$ найдем решение (3) ${}^{k+1}w_h(e, q)_i$, ${}^{k+1}m_h(e, q)_i$. Будем считать, что получено решение системы (2) ${}^{k+1}w_h = {}^{k+1}w_h(e, q)_{i+1}$, ${}^{k+1}m_h = {}^{k+1}m_h(e, q)_{i+1}$, если следующая величина не превосходит δ :

$$\max_x (|{}^{k+1}w_h(e, q)_{i+1} - {}^{k+1}w_h(e, q)_i| + |{}^{k+1}m_h(e, q)_{i+1} - {}^{k+1}m_h(e, q)_i|)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Последовательность нахождения решения системы (2) при $k = 0, 1, 2, \dots$ даст численное решение $w_h(x, t), m_h(x, t)$ исходных уравнений (1). После этого явно определяются неизвестные интервалы контакта, зоны пластической деформации, контактная сила F , скорость пластических деформаций ξ :

$$F = \lim_{e, q \rightarrow 0} \frac{1}{e} \beta(w(e, q)); \quad \xi = \lim_{e, q \rightarrow 0} \frac{1}{q} \alpha(m(e, q))$$

На модельных примерах был проведен ряд численных экспериментов: исследовалась зависимость получаемого решения от исходных данных $h, \Delta t, f, \phi, a, c, \delta$;

рассматривалась следующая схема нагружения. Мгновенное вдавливание штампа в ненагруженную балку ${}^0w = {}^0m = 0$ с последующей фиксацией на некоторое "время" T : $0 \leq k \leq s - 1$, затем при $t = s\Delta t$ разгрузка, то есть штамп убирается. Данная схема

проиллюстрирована на фигурах 1, 2 для $s = 3, f = 0, a = \Delta t = 1, c = 0, 1, h = 10^{-2}, \delta = 10^{-4}, \phi(x) = 1,2 - 9,6(x - 0,5)^2$. Тогда за интервал T первоначальные зоны пластичности убывают, после разгрузки сохраняются остаточные прогибы и моменты. Упругая балка за "время" T не изменяется, а разгружается до первоначального состояния;

рассматривалась задача с двумя штампами: сверху ψ и снизу ϕ (фиг. 2). В этом случае оператор штрафа изменится очевидным образом

$$\beta(w) = \begin{cases} 0 & \text{если } \phi \leq w \leq \psi \\ w - \phi, & \text{если } w < \phi \\ w - \psi, & \text{если } w > \psi \end{cases}$$

а все результаты останутся в силе.

При разработке в графическом режиме была реализована процедура изменения заданной формы штампа произвольным образом непосредственно с экрана дисплея на каждом шаге по t . Это дает возможность в некотором смысле решать задачу оптимального управления формой штампа, то есть приближать получаемое решение к заданному.

Аналогичные подходы в упругих и пластических контактных задачах для пластин и балок, описываемых с помощью модели пластин Кирхгоффа, были изучены в [8–10], их математическое обобщение в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khludnev A.M., Hoffmann K.-H.* A variational inequality in a contact elastoplastic problem for a bar // Adv. in Math. Scien. and Appl. 1992. V. 1. № 1. P. 127–136
2. *Темм Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991. 288 с.
3. *Баничук Н.В.* Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стесненной ограничениями // Инж. ж. МГТ. 1967. № 4. С. 138–142.
4. *Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М., Мир, 1979. 574 с.
5. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
6. *Садовский В.М.* Гиперболические вариационные неравенства в задачах динамики упругопластических тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1041–1048.
7. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ, 1987. 164 с.
8. *Ковтуненко В.А.* Итерационный метод решения вариационных неравенств в контактной упруго-пластической задаче с использованием метода штрафов // Ж. вычислит. математики и матем. физики. 1993. Т. 33. № 9. С. 1409–1415.
9. *Ковтуненко В.А.* Метод численного решения задачи о контакте упругой пластины с препятствием // ПМТФ. 1994. № 5. С. 142–146.
10. *Kovtunen V.A.* Iteration penalty method for the contact elastoplastic problem // Control and Cybernetics. 1994. V. 23. No. 4. P. 803–808.
11. *Ковтуненко В.А.* Итерационный метод штрафа для вариационных неравенств с сильно монотонными операторами. Сиб. матем. ж. 1994. Т. 35. № 4. С. 826–829.

Новосибирск

Поступила в редакцию
27.XII.1994