

УДК 539.3

© 1996 г. К.Д. СВЯЖЕНИНОВ

ПЛОСКИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГОВЫХ КОНЦЕНТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

В рамках динамической теории упругости приводится способ решения задачи о свободных и вынужденных колебаниях круговых концентрических тел, весьма эффективный при любой их относительной толщине, в том числе и малой. Традиционный способ определения упругих колебаний круговых тел с центральным отверстием, при котором общее решение уравнений подставляется в граничные условия и находится частотный определитель, связан с вычислительными трудностями в определении собственных частот колебаний концентрических тел, особенно при малой их относительной толщине. Это вызвано следующим обстоятельством: получающийся частотный определитель имеет строки, близкие к линейно зависимым, что приводит к значительной потере точности при вычислении его нулей, прежде всего низших. Предлагаемый способ решения задачи состоит в использовании спектральных характеристик (форм и частот свободных упругих колебаний) кругового тела без внутреннего отверстия. Спектральная задача для сплошного кругового тела решается значительно проще и точнее, чем для полого, а окончательно решение приводится к одному линейному алгебраическому уравнению, независимо от удерживаемых собственных форм колебаний сплошного тела.

На основе изложенного подхода в автомоделной постановке с введением двух безразмерных определяющих критериев подобия – геометрического (относительной толщины) и физического (коэффициента Пуассона) – решаются спектральные задачи для кругового концентрического тела, находящегося в условиях плоского напряженного состояния и плоской деформации. Построены соответствующие номограммы относительных частот основного тона, перекрывающие все возможные геометрические и физические параметры упругого тела и предназначенные для практического использования (в частности, учета влияния любых конечных значений толщины колец и цилиндров на их колебания).

1. Постановка задачи о свободных и вынужденных колебаниях кругового концентрического упругого тела. Рассматриваются плоские осесимметричные колебания цилиндрических тел, поперечное сечение которых есть кольцо толщиной $2h$ и радиусом осевой линии R ($0 \leq \eta = h/R \leq 1$). Предельные случаи относительной толщины $\eta = 0$ и $\eta = 1$ отвечают соответственно кольцу и сплошному цилиндру. Уравнение гармонических колебаний с частотой λ по динамической теории упругости имеет вид [1]:

$$-\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \lambda^2 \rho_* u = f \quad (1.1)$$

где r – текущий радиус ($r_1 \leq r \leq r_2, r_{1,2} = R \mp h$), $\sigma_r = \sigma_r(r)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r)$, $u = u(r)$, $f = f(r)$ – амплитудные значения искомых напряжений и перемещения, и также внешней массовой силы (в задаче о вынужденных колебаниях), ρ_* – плотность материала. Соотношения упругости, в которых деформации выражены через напряжения для изотропного однородного материала, имеют вид

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \quad \frac{u}{r} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r) \quad (1.2)$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Отметим, что (1.2) справедливо

для плоского напряженного состояния. В случае плоской деформации следует провести известную замену упругих постоянных. К (1.1), (1.2) следует добавить граничные условия. Рассмотрим случай динамических граничных условий на внутренней и внешней поверхностях тела:

$$\sigma_r|_{r=r_1} = F^{(1)}, \quad \sigma_r|_{r=r_2} = F^{(2)} \quad (1.3)$$

где $F^{(1)}, F^{(2)}$ – амплитуды внешних поверхностных сил. В задаче о свободных колебаниях $f(r) = 0$, $F^{(i)} = 0$ ($i = 1, 2$). Вводя безразмерную независимую переменную $\rho = r/r_2$, $\rho_1 \leq \rho \leq 1$, $\rho_1 = r_1/r_2$, вместо (1.1)–(1.3) будем иметь (штрихом обозначено деформирование по ρ):

$$\frac{1}{r_2} \left(-\sigma'_r - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} \right) - \lambda^2 \rho_* u = f \quad (1.4)$$

$$\frac{u'}{r_2} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad (1.5)$$

$$\frac{1}{r_2} \frac{u}{\rho} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r)$$

$$\sigma_r|_{\rho=\rho_1} = F^{(1)}, \quad \sigma_r|_{\rho=1} = F^{(2)} \quad (1.6)$$

Следуя [2–6], вводим искомые двумерный и одномерные векторы усилий и перемещений в области x, y и на границе X, Y :

$$x = (\sigma_r, \sigma_\theta), \quad y = u \quad (1.7)$$

$$X = \sigma_r, \quad Y = u$$

дифференциальные операторы

$$D = \frac{1}{r_2} \left(-\frac{d}{d\rho} - \frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho} \right), \quad D^* = \frac{1}{r_2} \left(\frac{d}{d\rho}, \frac{1}{\rho} \right) \quad (1.8)$$

алгебраические операторы инерции и податливости

$$R = \rho_*, \quad B = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{vmatrix} \quad (1.9)$$

С учетом (1.7)–(1.9) уравнения и граничные условия (4)–(6) примут вид

$$Dx - \lambda^2 Ry = f, \quad D^* y - Bx = 0 \quad \text{в } \Omega = \{\rho_1 \leq \rho \leq 1\} \quad (1.10)$$

$$X|_{\rho=\rho_1} = F^{(1)}, \quad X|_{\rho=1} = F^{(2)} \quad (1.11)$$

Таким образом, в операторной форме сформулирована неоднородная краевая задача (1.10), (1.11), обусловленная неоднородностью как уравнений, так и граничных условий, описывающая вынужденные колебания. Частотным случаем ее является однородная краевая задача для свободных колебаний. Основной смысл введения операторов заключается в том, что все они обладают определенными свойствами, используемыми в дальнейшем.

2. Свойства операторов краевой задачи теории упругих колебаний в смешанной форме относительно внутренних усилий и перемещений точек упругого тела. Дифференциальные операторы D, D^* не содержат физических характеристик упругого тела,

а вид их определяется выбранной системой координат. Нетрудно убедиться, что эти операторы сопряженные по Лагранжу:

$$\int_{\rho'}^{\rho''} Dx y \rho d\rho = \int_{\rho'}^{\rho''} x D^* y \rho d\rho - \frac{1}{r_2} XY \rho \Big|_{\rho=\rho'}^{\rho=\rho''} \quad (2.1)$$

Алгебраические операторы R, B определяются исключительно физическими характеристиками – инерционными и упругими свойствами материала тела. Очевидно, что они самосопряженные и положительные:

$$\int_{\rho'}^{\rho''} R y_1 y_2 \rho d\rho = \int_{\rho'}^{\rho''} y_1 R y_2 \rho d\rho, \quad \int_{\rho'}^{\rho''} B x_1 B x_2 \rho d\rho = \int_{\rho'}^{\rho''} B x_1 x_2 \rho d\rho \quad (2.2)$$

$$\int_{\rho'}^{\rho''} R y y \rho d\rho > 0 \quad (y \neq 0), \quad \int_{\rho'}^{\rho''} B x x \rho d\rho > 0 \quad (x \neq 0)$$

3. Трансформация исходной задачи посредством фиктивной области. Постановку задачи (1.10), (1.11) трансформируем следующим образом. Будем считать, что уравнение (1.10) справедливо в области $\tilde{\Omega} = \Omega + \Omega_f = \{0 \leq \rho \leq 1\}$, имеющей вид цилиндра без отверстия

$$Dx - \lambda^2 Ry = f, \quad D^* y - Bx = 0 \quad \text{в } \tilde{\Omega} = \{0 \leq \rho \leq 1\} \quad (3.1)$$

Область $\Omega_f = \{0 \leq \rho \leq \rho_1\}$, дополняющую исходную область сложной конфигурации до области наиболее простой геометрической формы, в соответствии с [6], назовем фиктивной. Полагаем, что объемные силы в фиктивной области отсутствуют. Вместо первого исходного граничного условия из (1.11) сформулируем условия на поверхности $\rho = \rho_1$, которая стала внутренней по отношению к $\tilde{\Omega}$:

$$X \Big|_{\rho=\rho_1+0} = F^{(1)}, \quad X \Big|_{\rho=\rho_1-0} = F^{(1)} + F_f \quad (3.2)$$

где F_f – фиктивная поверхностная сила, приложенная к фиктивной области Ω_f . Второе исходное граничное условие из (1.11) на внешней поверхности $\tilde{\Omega}$ оставляет без изменений

$$X \Big|_{\rho=1} = F^{(2)} \quad (3.3)$$

Как видно, трансформированная постановка задачи (3.1)–(3.2) включает в себя исходную (1.10)–(1.11).

4. Спектральный способ решения трансформированной задачи. Решение (3.1)–(3.3) ищем на поле разрывных функций

$$x = \tilde{x} + \bar{x}, \quad y = \tilde{y} + \bar{y} \quad (4.1)$$

где \tilde{x}, \tilde{y} непрерывны в $\tilde{\Omega}$, удовлетворяют простым однородным граничным условиям на ее внешней поверхности и представляются отрезками рядов

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^I a_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

\bar{x}, \bar{y} терпят разрыв первого рода на поверхности $\rho = \rho_1$, служат для удовлетворения условия (3.2) и представляются в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} e^{(\rho_1 - \rho)} \quad (4.3)$$

где $a_i (i = 1, \dots, l)$ – основные коэффициенты аппроксимации, определяющие искомое решение в исходной области, b – дополнительный коэффициент, носящий промежуточный вспомогательный характер и в вид окончательного решения не входящий; $x_i = x_i(\rho)$, $y_i = y_i(\rho)$, $0 \leq \rho \leq 1$ – собственные формы колебаний сплошного цилиндра, т.е. решения однородной краевой задачи

$$Dx_i - \lambda_i^2 Ry_j = 0, \quad D^* y_i - Bx_i = 0 \quad \text{в } \tilde{\Omega} = \{0 \leq \rho \leq 1\} \quad (4.4)$$

$$|Y_i|_{\rho=0} = \infty, \quad X_i|_{\rho=1} = 0 \quad (4.5)$$

где $e(\rho)$ – единичная функция Хевисайда.

Фиктивную поверхностную силу F_f выбираем из условия $\bar{X} = F_f$ при $\rho = \rho_1$. Она служит для выполнения условия разрыва искомых функций (4.1) в $\tilde{\Omega}$ на поверхности $\rho = \rho_1$ и на решение исходной задачи не влияет.

Видно, что решение трансформированной задачи в $\Omega \in \tilde{\Omega}$ совпадает с решением исходной задачи и в силу (4.3) принимает наиболее простой вид

$$\bar{x} = \bar{x} = \sum_{i=1}^l a_i x_i, \quad \bar{y} = \bar{y} = \sum_{i=1}^l a_i y_i \quad \text{в } \Omega = \{\rho_i \leq \rho \leq 1\} \quad (4.6)$$

Выбор же в качестве базисных функций спектральных характеристик упругого тела обусловлен тем, что они обладают некоторыми интегральными свойствами.

5. Интегральные свойства спектральных характеристик. Установим интегральные свойства собственных форм колебаний упругого тела наиболее простой конфигурации $\tilde{\Omega}$ при простых однородных граничных условиях на ее границе $\rho = 1$ – решений однородной краевой задачи (4.4), (4.5).

Формы свободных колебаний упругого тела, соответствующие различным собственным частотам λ_i, λ_j , ортогональны. Нормируем их по правилу (S_j^i – символ Кронекера):

$$\int_0^1 Ry_i y_j \rho d\rho = \delta_j^i \quad (5.1)$$

Тогда будет справедливо равенство

$$\int_0^1 x_i Bx_j \rho d\rho = \lambda_i^2 \delta_j^i \quad (5.2)$$

Введем обозначения

$$R_j^i = \int_0^{\rho_1} Ry_i y_j \rho d\rho, \quad B_j^i = \int_0^{\rho_1} x_i Bx_j \rho d\rho, \quad \Gamma_j^i = \frac{1}{r_2} X_i Y_j \rho|_{\rho=\rho_1}$$

Тогда будем иметь

$$B_j^i = \lambda_i^2 R_j^i + \Gamma_j^i \quad (5.3)$$

Докажем соотношение (5.3), частным случаем которого при $\rho_1 = 1$ служит и (5.2).

Для этого используем уравнения свободных колебаний упругого тела в операторной форме (см. (4.4)):

$$Dx_i - \lambda_i^2 Ry_i = 0, \quad D^* y_j - Bx_j = 0 \quad \text{в } \tilde{\Omega} = \{0 \leq \rho \leq 1\}$$

Умножая скалярно первое и второе уравнения на y_j, x_i соответственно, имеем для

любого значения ρ^* , $0 \leq \rho^* \leq 1$:

$$\int_0^{\rho^*} Dx_j y_j \rho d\rho - \lambda_i^2 \int_0^{\rho^*} Ry_i y_j \rho d\rho = 0, \quad \int_0^{\rho^*} x_i D^* y_j \rho d\rho - \int_0^{\rho^*} x_i Bx_j \rho d\rho = 0$$

Используя теперь сопряженность дифференциальных операторов D, D^* по Лагранжу (2.1), имеем

$$\int_0^{\rho^*} x_i Bx_j \rho d\rho = \lambda_i^2 \int_0^{\rho^*} Ry_i y_j \rho d\rho + \frac{1}{r_2} X_i Y_j \rho \Big|_{\rho=\rho^*}$$

Отсюда при $\rho^* = \rho_1^0$ и получаем (5.3). В случае однородности граничных условий (4.5) при $\rho_1 = 1$ внеинтегральный член равен нулю, т.е. $\Gamma_j^i = 0$, и из этого равенства следует (5.2).

Индексы у R_j^i и B_j^i переставимы, т.е.

$$R_j^i = R_i^j, \quad B_j^i = B_i^j \quad (5.4)$$

Доказательство (5.4) непосредственно вытекает из самосопряженности алгебраических операторов инерции R и податливости в (2.2). Для внеинтегральных членов Γ_j^i это свойство в общем случае, очевидно, не имеет места.

Интегральные свойства (5.3), (5.4) позволяют выражать интегралы по области относительно R_j^i и B_j^i граничными Γ_j^i и Γ_i^j .

Действительно, решая (5.3), (5.4) относительно R_j^i и B_j^i , имеем

$$R_j^i = \frac{\Gamma_j^i - \Gamma_i^j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2}, \quad B_j^i = \frac{\lambda_j^2 \Gamma_j^i - \lambda_i^2 \Gamma_i^j}{\lambda_j^2 - \lambda_i^2} \quad (5.5)$$

Свойство (5.5) особенно полезно в случаях неоднородных анизотропных сред, когда интегрирование по области Ω неминуемо численное вследствие отсутствия аналитического решения однородной краевой задачи. Замена объемных интегралов поверхностными значительно упрощает и повышает точность вычислительной процедуры.

6. Составление результирующего линейного алгебраического уравнения. Как указано в п.4, решение исходной задачи в области Ω (4.6) ищется в виде линейной комбинации выбранной системы координатных функций $x_i = x_i(\rho)$, $y_i = y_i(\rho)$, $0 \leq \rho \leq 1$ с искомыми коэффициентами аппроксимации a_i ($i = 1, \dots, I$). Для их определения воспользуемся проекционными условиями Бубнова – Галеркина [2–6] применительно к области Ω с границей $\rho = 1$, $\rho_1 = -0$, $\rho_1 = +0$:

$$\int_0^1 (Dx - \lambda^2 Ry) y_i \rho d\rho = f_i + F_i^{(2)} \quad (i = 1, \dots, I) \quad (6.1)$$

$$\int_0^{\rho_1} (Dx - \lambda^2 Ry) y_1 \rho d\rho + \frac{1}{r_2} \tilde{X} Y_1 \rho \Big|_{\rho=\rho_1} = F_1^{(1)} \quad (6.2)$$

$$f_i = \int_{\rho_1}^1 f y_i \rho d\rho, \quad F_i^{(2)} = \frac{1}{r_2} F^{(2)} Y_i \rho \Big|_{\rho=1}, \quad F_1^{(1)} = \frac{1}{r_2} F^{(1)} Y_1 \rho \Big|_{\rho=\rho_1}$$

Подставляя в (6.1), (6.2) вместо x, y их представления (4.1)–(4.3), снимаем действие дифференциального оператора D на разрывные функции посредством сопряженности

D и D^* по Лагранжу (2.1). Используя также интегральные свойства спектральных характеристик (5.1)–(5.4), получаем

$$\Delta_i a_i + \Delta_1 R_1^i b = f_i + F_i^{(2)} \quad (i = 1, \dots, I) \quad (6.3)$$

$$\sum_{i=1}^I (\Delta_i R_1^i + \Gamma_1^i) a_i + \Delta_1 R_1^1 b = F_1^{(1)} \quad (6.4)$$

$$\Delta_i = \lambda_i^2 - \lambda^2$$

Особенностью полученной системы уравнений относительно коэффициентов аппроксимации a_i ($i = 1, \dots, I$) и b , обусловленной ортогональностью форм свободных колебаний в Ω (5.1), (5.2), является то, что все основные коэффициенты a_i из (6.3) выражаются через один дополнительный коэффициент b линейным образом:

$$a_i = (f_i + F_i^{(2)} - \Delta_1 R_1^i b) / \Delta_i \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем линейное алгебраическое уравнение относительно одного дополнительного коэффициента аппроксимации b :

$$\Delta_1 \left(R_1^1 + \sum_{i=1}^I T_1^i R_1^i \right) b = F_1^{(1)} + \sum_{i=1}^I T_1^i (f_i + F_i^{(2)}) \quad (6.6)$$

$$T_j^i = -R_j^i - \Gamma_j^i / \Delta_i$$

Составлением уравнения (6.6) заканчивается прямой ход алгоритма. Далее начинается обратный ход: вычисляя b , по (6.5) находятся все основные коэффициенты a_i и окончательно решение (4.6). Заметим, что сколько бы членов разложения I в (4.6) ни удерживалось, задача всегда приводится к одному единственному уравнению (6.6). Меняется лишь число слагаемых в коэффициентах этого уравнения. Поэтому увеличение точности решения (4.6) за счет увеличения числа членов рядов I не требует дополнительных вычислительных ресурсов.

7. Численная реализация и оценка сходимости. Собственные частоты λ_i и формы перемещений u_i плоских осесимметричных колебаний сплошного кругового упругого тела удовлетворяющие (4.4), (4.5) и используемые при расчетах колебаний тел концентрических (1.10), (1.11), даются выражениями [7,8]:

$$\lambda_i = \gamma_i c / r_2, \quad u_i = C_i J_1(\gamma_i \rho) \quad (7.1)$$

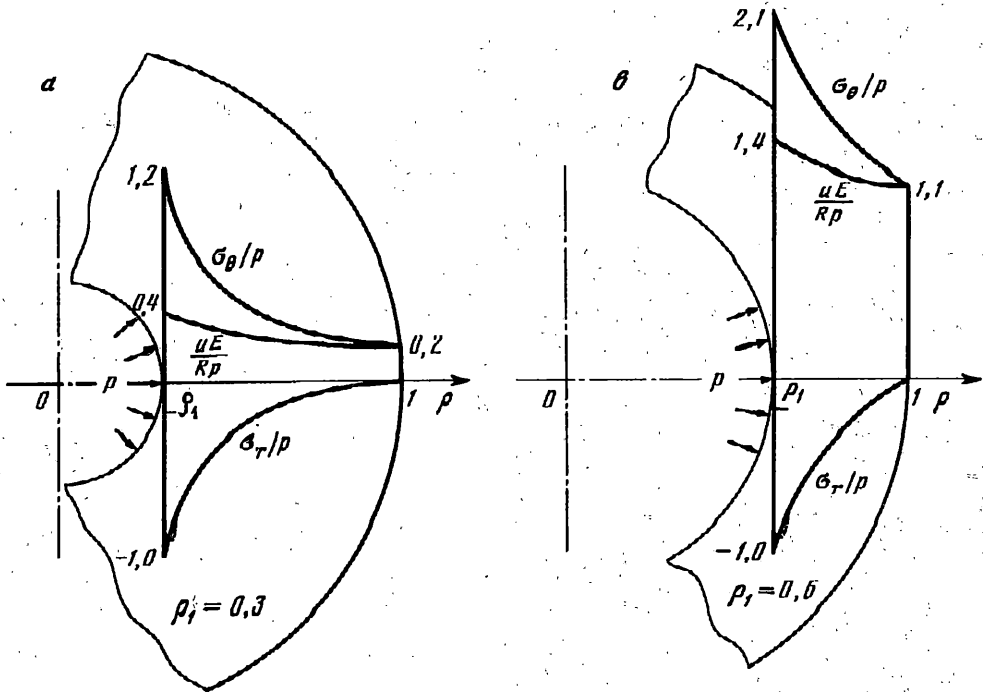
где γ_i – корни трансцендентного уравнения, соответственно для случаев плоского напряженного состояния и плоской деформации имеющего вид

$$J_1'(\gamma) + \nu \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} = 0, \quad J_1'(\gamma) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{J_1(\gamma)}{\gamma} = 0 \quad (7.2)$$

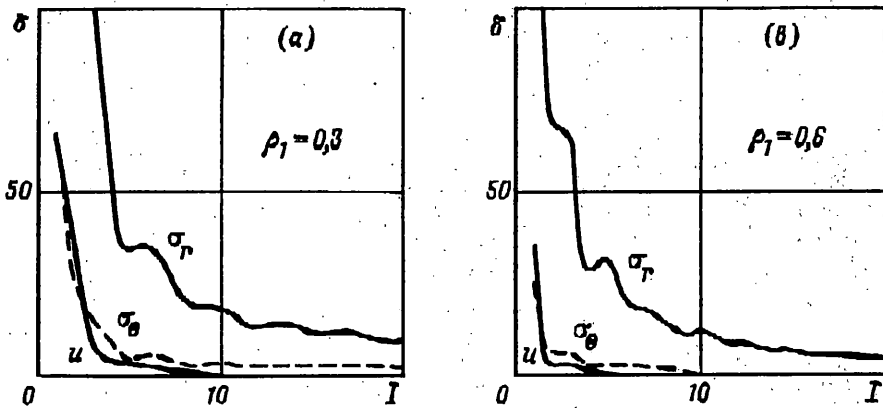
$$c = \left(\frac{1}{1-\nu^2} \frac{E}{\rho_*} \right)^{1/2}, \quad c = \left(\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{\rho_*} \right)^{1/2}$$

где c – скорость распространения дилатационных упругих волн; C_i – произвольные постоянные, выбираемые из условий нормированности форм (5.1).

Известны аналитические решения задачи (1.10), (1.11) в двух предельных случаях: статического нагружения толстостенного цилиндра объемными и поверхностными силами (в случае внутреннего и внешнего давления – так называемая "задача Ламэ") и



Фиг. 1



Фиг. 2

свободных колебаний тонкого кольца [1]. Они и использованы для оценки сходимости изложенного метода. Построены приближенные решения задач о статическом ($\lambda = 0$) нагружении полого толстостенного цилиндра с внутренним радиусом ρ_1 ($0 \leq \rho_1 \leq 1$) внутренним давлением (фиг. 1, а, в), о свободных колебаниях тонкого кольца ($\rho_1 \rightarrow 1$) и вычислены относительные погрешности δ этих решений при I удержанных членах в рядах основной системы базисных функций (4.6) ($\rho = r/\rho$).

Погрешность вычисления полей перемещений и напряжений в стенке цилиндра вычислялась в среднеквадратичной норме

$$\delta = \|u - u_*\| / \|u_*\|, \quad \|u\| = \left(\frac{1}{1 - \rho_1} \int_{\rho_1}^1 u^2(\rho) d\rho \right)^{1/2}$$

где $u = u(\rho)$ – приближенное, $u_* = u_*(\rho)$ – точное решения. Функции $\delta(I)$ при $\rho_1 = \text{const}$ (фиг. 2, а, в) показывают, что скорости сходимости для компонент искомого напряжений и перемещения различны и в порядке возрастания располагаются следующим образом: $\sigma_r, \sigma_\theta, u$. Следовательно, наиболее высокая точность сходимости обеспечивается для тех компонент искомого векторов, которые не входят в граничное условие при $\rho = \rho_1$. С целью установления области наиболее благоприятного применения метода вычислены функции $\delta(\rho_1)$ при $I = \text{const}$ (фиг. 3, а, б). Из их анализа следует, что подход эффективен практически для любых ρ_1 , исключая окрестность нулевой точки. Незначительные осцилляции δ вызваны зависимостью точности решения линейного уравнения от взаимного расположения узлов координатных функций и точки ρ_1 .

Погрешность вычисления собственной частоты тонкого кольца $\delta = (\lambda - \lambda_*)/\lambda_*$, где λ – приближенное, λ_* – точное решения, также показывает весьма высокую скорость сходимости метода (фиг. 4). Удержание лишь одного члена основной системы базисных функций (4.6) дает погрешность в определении частоты лишь немногим более 1%, а трех и более – менее процента. Функция $\delta(I)$ положительна (метод дает оценку частоты сверху) и в области определения $I = 1, \dots, 20$ имеет точку минимума $I = 10$, которой отвечает исключительно малое значение погрешности $\delta = 0,06\%$. При десяти членах отрезков рядов (4.6) и исследовалась задача (1.10), (1.11) в общем случае $\lambda \neq 0$ и $0 < \rho_1 < 1$, не допускающем точного решения.

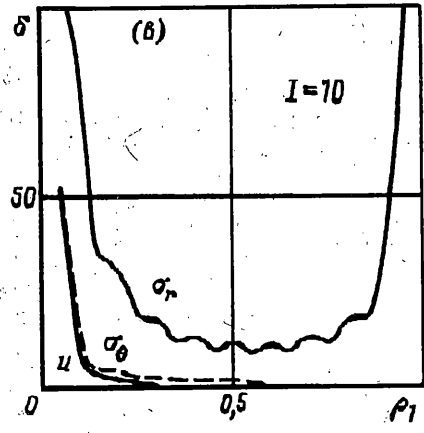
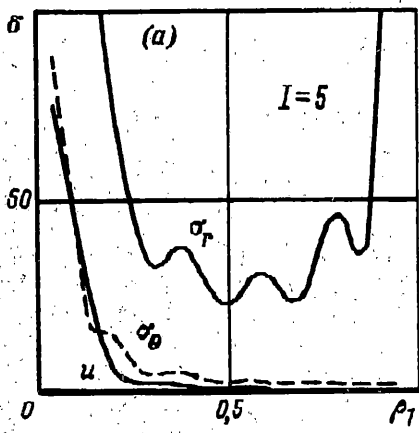
8. Определение частоты основного тона кольца конечной толщины. Быстрота и экономичность реализации изложенного метода обуславливают его эффективность при проведении многопараметрических расчетов колебаний круговых концентрических упругих тел. В качестве примера в автомодельной постановке с введением определяющих критериев подобия рассмотрены задачи определения частот основного тона кольца и протяженного цилиндра с учетом их конечной толщины. При использовании традиционного точного метода решения задачи на собственные значения определение именно низших частот спектра колебаний тонкостенных упругих тел сопряжено с вычислительными трудностями из-за плохой обусловленности матрицы результирующей системы.

Безразмерными определяющими критериями подобия спектральной задачи для концентрического упругого тела выступают два параметра: геометрический – относительная толщина η и физический – коэффициент Пуассона ν . Именно они однозначно определяют безразмерные частоты плоских свободных колебаний λ/λ_* по отношению к какому-либо выбранному масштабу частоты λ_* . В качестве масштабов частоты λ_* в задачах о плоском напряженном состоянии и плоской деформации динамической теории упругости удобно выбирать частоты основного тона соответственно бесконечно тонкого кольца и цилиндрической оболочки, значения которых известны из теории одномерных упругих тел [1]:

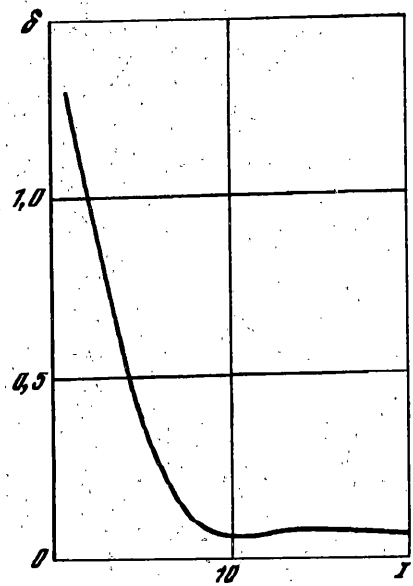
$$\lambda_* = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho_*}}, \quad \lambda_* = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_*}} \quad (8.1)$$

где обозначения всех величин приведены в п. 1.

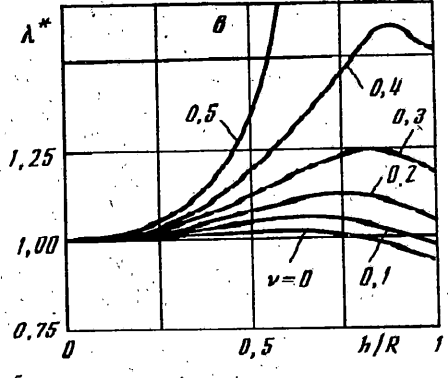
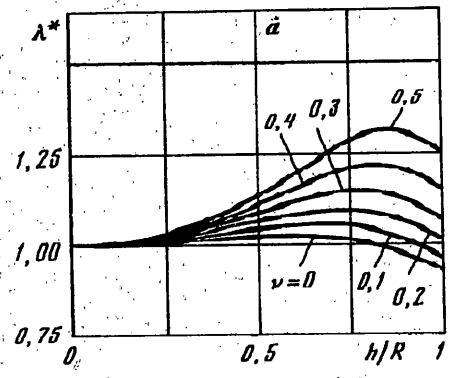
Построены номограммы для определения основной частоты колебаний круговых концентрических тел в случаях плоского напряженного состояния $\lambda^* = \lambda R / (E / \rho)^{1/2}$ и плоской деформации $\lambda^* = \lambda R / [E / ((1-\nu^2)\rho)]^{1/2}$ (фиг. 5, а, б). Как видно, в отличие от продольных колебаний прямолинейных стержней частота свободных колебаний растяжения – сжатия круговых концентрических тел зависит от их толщины, особенно существенно для случая плоской деформации. Так, здесь проявляется особенностью $\lim \lambda = \infty$ при $\eta \rightarrow 0$ и $\nu \rightarrow 1/2$. Это объясняется тем, что плоская деформация сплошного цилиндра ($\eta = 1$) сопровождается изменением его объема, что для несжимаемого материала ($\nu = 0,5$) приводит к неограниченному возрастанию собственной



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

частоты ($\lambda \rightarrow \infty$). Влияние фактора толщины на колебания концентрических тел тем существеннее, чем больше коэффициент Пуассона ν . Предельные же значения частот при $\eta = 0$ совпадают с соответствующими частотами для кольца и оболочки (8.1), а при $\eta = 1$ – с первой частотой сплошной круглой пластины и цилиндра (7.1), (7.2): $\lim \lambda = \lambda_*$ при $\eta \rightarrow 0$, $\lim \lambda = \lambda_1$ при $\eta_1 \rightarrow 1$.

Таким образом, построенные номограммы учитывают все возможные параметры круговых концентрических упругих тел и могут быть использованы для определения их частот основного тона в любом практическом случае.

Разумеется, подобные номограммы могут быть построены и для высших частот спектра. Продемонстрирован общий подход к решению задач об упругих колебаниях круговых концентрических тел (1.10), (1.11), заключающийся в решении соответствующей трансформированной задачи (3.1)–(3.3), что весьма облегчает практическую реализацию. Целый ряд обстоятельств тому причиной:

простота и высокая точность решения спектральной задачи для кругового тела без отверстия по сравнению с аналогичной задачей для тел с отверстием, особенно при их малых толщинах;

возможность использования однажды протабулированных собственных форм и частот колебаний сплошного кругового тела для определения свободных и вынужденных колебаний всего множества концентрических тел произвольной толщины $0 \leq \eta \leq 1$;

независимо от числа l удерживаемых форм и частот свободных колебаний сплошного кругового тела задача приводится лишь к одному линейному алгебраическому уравнению. Увеличение этого числа l приводит только к увеличению числа слагаемых, входящих в коэффициенты уравнения. Следовательно, повышение точности решения за счет удержания дополнительных спектральных характеристик не сопровождается увеличением объема вычислений;

при вычислении коэффициентов результирующего линейного алгебраического уравнения объемное интегрирование заменяется поверхностным, что особенно важно для случаев неоднородных анизотропных тел;

разрывные слагаемые \bar{x}, \bar{y} отличны от нуля лишь в фиктивной области и в вид окончательного решения для исходной области не входят.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. В 3-х т. / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1.831 с.; Т. 2. 463 с. Т. 3. 567 с.
2. Фридман В.М., Чернина В.С. Видоизменение метода Бубнова – Галеркина – Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 64–78.
3. Богданов Б.А., Фридман В.М., Штукин Л.В. Об одном методе решения задачи о колебаниях упругого тела при сложных граничных условиях // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 111–119.
4. Гусева Н.С., Привалова О.В., Фридман В.М. Спектральный метод решения задачи о колебаниях упругого тела при смешанных граничных условиях // Механика и процессы управления. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1988. № 425. С. 39–44.
5. Будникова Т.В., Свяженинов Е.Д., Фридман В.М. Неосесимметричные колебания конической оболочки со сложными условиями опирания // Механика и процессы управления. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1988. № 425. С. 51–55.
6. Свяженинов Е.Д., Фридман В.М. Спектральный метод решения задачи о колебаниях упругого тела сложной геометрической формы с использованием фиктивных областей // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 74–80.
7. Свяжеников Е.Д. Спектры плоских осесимметричных колебаний кругового упругого тела. Л., 1984. 10 с. – Деп. ВИНТИ 1.08.84; № 5596-84.
8. Свяженинов Е.Д. Вариационный метод решения диссипативной краевой задачи теории упругих колебаний // Изв. РАН СССР. МТТ. 1994. № 5. С. 143–154.