МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 539.3

© 1996 г. Л.З. КОГАН, В.А. МОЛЬКОВ

МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВОЛОКНИСТЫХ ПЬЕЗОКОМПОЗИТОВ

Известно, что с макроскопической точки зрения композиционные материалы могут обладать физическими свойствами, которые отсутствуют у любого из составляющих композит компонентов. В качестве примера можно привести композиционный материал, содержащий пьезоэлектрический и пьезомагнитный компоненты. Если такой пьезокомпозит поместить в магнитное поле, то будет деформироваться пьезомагнитный компонент, а вместе с ним и весь композит. В силу деформации пьезоэлектрического компонента в композите возникнет электрическое поле, вектор индукции которого будет связан с вектором напряженности магнитного поля тензором магнитоэлектрических констант. Явление возникновения электродвижущей силы в материале под действием постоянного магнитного поля носит название магнитоэлектрического эффекта [1]. В публикуемой работе на основе обобщения модели коаксиальных цилиндров [2] определяются магнитоэлектрические свойства однонаправленного волокнистого пьезокомпозита, содержащего пьезоэлектрические и пьезомагнитные волокна. Кроме того, определяются магнитоэлектрические свойства слоистого пьезокомпозита, чередующиеся слои которого содержат только один тип волокон: пьезоэлектрические или пьезомагнитные.

1. Рассмотрим однонаправленный волокнистый композит, состоящий из трех компонентов: упругого связующего материала, пьезоэлектрических и пьезомагнитных волокон. Оси предварительной поляризации керамических волокон совпадают с их направлением и осью z цилиндрической системы координат. Определяющие соотношения для пьезоэлектрических волокон имеют вид [3]:

$$\begin{gathered}
\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta + C_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z \\
\sigma_\theta = C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta + C_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z \\
\sigma_z = C_{13}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + C_{33}\varepsilon_z - e_{33}E_z \\
\sigma_{r\theta} = 2C_{66}\varepsilon_{r\theta} \\
\sigma_{rz} = 2C_{44}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r, \quad \sigma_{\theta z} = 2C_{44}\varepsilon_{\theta z} - e_{15}E_\theta \\
D_r = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + Э_{11}E_r, \quad D_\theta = 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + Э_{11}E_\theta \\
D_z = e_{31}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + e_{33}\varepsilon_z + Э_{33}E_z
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{D}$ – вектор электрической индукции, $\mathbf{C}$ – тензор модулей упругости, $\mathbf{e}$ – тензор пьезоэлектрических модулей, **Э** – тензор электрической проницаемости. Определяющие соотношения для пьезомагнитных волокон имеют аналогичный вид. Они получаются из (1.1) заменой $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{e}$ и **Э** соответственно на $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{h}$ и $\boldsymbol{\mu}$, где $\mathbf{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции, $\mathbf{h}$ – тензор пьезомагнитных модулей, μ – тензор магнитной проницаемости. Упругое связующее является трансверсально-изотропным материалом с осью изотропии, параллельной оси z.

Эффективные определяющие соотношения для рассматриваемого композита будут иметь вид

$$
\begin{aligned}
&\sigma_r = C_{11}^*\varepsilon_r + C_{12}^*\varepsilon_\theta + C_{13}^*\varepsilon_z - e_{31}^*E_z - h_{31}^*H_z\\
&\sigma_\theta = C_{12}^*\varepsilon_r + C_{11}^*\varepsilon_\theta + C_{13}^*\varepsilon_z - e_{31}^*E_z - h_{31}^*H_z\\
&\sigma_z = C_{13}^*(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + C_{33}^*\varepsilon_z - e_{33}^*E_z - h_{33}^*H_z\\
&\sigma_{r\theta} = 2C_{66}^*\varepsilon_{r\theta}\\
&\sigma_{rz} = 2C_{44}^*\varepsilon_{rz} - e_{15}^*E_r - h_{15}^*H_r\\
&\sigma_{\theta z} = 2C_{44}^*\varepsilon_{\theta z} - e_{15}^*E_\theta - h_{15}^*H_\theta\\
&D_r = 2e_{15}^*\varepsilon_{rz} + Э_{11}^*E_r + m_{11}^*H_r \qquad (1.2)\\
&D_\theta = 2e_{15}^*\varepsilon_{\theta z} + Э_{11}^*E_\theta + m_{11}^*H_\theta\\
&D_z = e_{31}^*(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + e_{33}^*\varepsilon_z + Э_{33}^*E_z + m_{33}^*H_z\\
&B_r = 2h_{15}^*\varepsilon_{rz} + \mu_{11}^*H_r + m_{11}^*E_r\\
&B_\theta = 2h_{15}^*\varepsilon_{\theta z} + \mu_{11}^*H_\theta + m_{11}^*E_\theta\\
&B_z = h_{31}^*(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + h_{33}^*\varepsilon_z + \mu_{33}^*H_z + m_{33}^*E_z
\end{aligned}
$$

где звездочкой отмечены эффективные свойства, m_{11}^*, m_{33}^* – магнитоэлектрические свойства. Теоретическое определение макроскопических свойств, входящих в определяющие соотношения (1.2), эквивалентно определению связи между макроскопическими переменными: макронапряжениями, макродеформациями и т.д. При этом задаются макроскопические независимые переменные, входящие в правые части (1.2). Затем определяются каким-либо образом микроскопические переменные в структурном элементе: ячейке периодичности, составном цилиндре для модели коаксиальных цилиндров и т.д. Путем осреднения микроскопических переменных по объему структурного элемента определяются соответствующие макроскопические переменные, входящие в левые части эффективных определяющих соотношений (1.2).

2. Рассмотрим обобщение модели коаксиальных цилиндров для рассматриваемого пьезокомпозита. Представим структуру пьезокомпозита в виде набора составных цилиндров. Каждый цилиндр состоит из волокна и окружающего его слоя связующего материала. Размеры коаксиальных цилиндров выбираются таким образом, что ими можно заполнить все пространство. При этом отношение квадрата радиуса волокна к квадрату радиуса составного цилиндра равно $\gamma_1 + \gamma_2$, где γ_1 – объемная концентрация пьезоэлектрических волокон, γ_2 – объемная концентрация пьезомагнитных волокон. В дальнейшем сумму $\gamma_1 + \gamma_2$ будем обозначать через δ. Структурный элемент (элемент, по которому ведется осреднение) состоит из двух цилиндров, один из которых содержит пьезоэлектрическое волокно, а другой – пьезомагнитное волокно. Микроскопические переменные определяются для каждого составного цилиндра в локальной цилиндрической системе координат, ось z которой совпадает с осью волокна. Среднее по объему от микроскопической переменной f, не зависящей от осевой координаты z, будет равно

$$\langle f\rangle = \Big(\int\limits_{\Sigma_1} f d\Sigma + \int\limits_{\Sigma_2} f d\Sigma\Big)/\Sigma$$

где Σ_1 – поперечное сечение цилиндра с пьезоэлектрическим волокном, Σ_2 – поперечное сечение цилиндра с пьезомагнитным волокном, Σ – сумма площадей сечений Σ_1 и Σ_2.

Таблица 1

δ	$\gamma_2/\gamma_1 = 0{,}1$	0,5	1	2	10
0,1	0,008	0,021	0,023	0,021	0,008
0,3	0,086	0,232	0,260	0,231	0,086
0,5	0,322	0,864	0,971	0,862	0,320
0,7	1,006	2,696	3,025	2,683	0,994
0,9	4,623	12,28	13,70	12,07	4,435

Для двухкомпонентного композита (волокна одного типа) описанная модель будет давать такие же результаты, что и модель коаксиальных цилиндров.

Для определения константы m_{33}^* необходимо задать макроскопическое магнитное поле, для которого только H_z отлична от нуля. Пусть $H_z = -\psi^0 = \mathrm{const}$. В силу уравнений равновесия

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0$$

и соотношений Коши $\varepsilon_r = du_r/dr$, $\varepsilon_\theta = u_r/r$, отличными от нуля перемещениями будут радиальные перемещения u_r^α ($\alpha = 1, 2$). Индекс 1 обозначает величину, относящуюся к цилиндру с пьезоэлектрическим волокном, индекс 2 – величину, относящуюся к цилиндру с пьезомагнитным волокном. Радиальные перемещения для связующего материала имеют вид $u_r^\alpha = A_\alpha r + B_\alpha / r$, а для волокон $u_r^\alpha = C_\alpha r$. Константы $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ определяются из условий непрерывности $u_r^\alpha, \sigma_r^\alpha$ и граничных условий $\sigma_r^\alpha = \sigma^0$, где σ^0 – макроскопическое радиальное напряжение, препятствующее расширению (сжатию) пьезокомпозита в поперечной плоскости. Для определения σ^0 необходимо условие $\langle \varepsilon_r + \varepsilon_\theta \rangle = 0$. Из семи перечисленных условий определяем константу C_1, необходимую для вычисления $\langle D_z \rangle = -m_{33}^* \psi^0$. Окончательно для m_{33}^* получим

$$m_{33}^* = \gamma_1 \gamma_2 e_{31} h_{31} (1 + \gamma \varkappa) / [\beta_3 (k + m)]$$

$$\beta_3 = \gamma_1 (1 + \gamma \varkappa_1)(\varkappa + \varkappa_2) + \gamma_2 (1 + \gamma \varkappa_2)(\varkappa - \varkappa_1)$$

$$\varkappa_\alpha = (k_\alpha + m) / (k + m), \quad \varkappa = m\delta / (k + m\delta)$$

$$k_\alpha = (C_{11}^\alpha + C_{12}^\alpha) / 2, \quad k = (C_{11} + C_{12}) / 2$$

$$m = (C_{11} - C_{12}) / 2, \quad \gamma = 1/\delta - 1$$

где C_{11}, C_{12} – упругие свойства трансверсально-изотропной матрицы.

Для определения m_{33}^* можно задать и макроскопическое электрическое поле с отличной от нуля компонентой $E_r = -\varphi^0 = \mathrm{const}$. Тогда константа m_{33}^* будет определяться из соотношения $\langle B_z \rangle = -m_{33}^* \varphi^0$. Результат для m_{33}^* будет таким же, как и в случае задания макроскопического магнитного поля. Обозначим через m_3 отношение $-m_{33}^*(k + m) / (e_{31} h_{31})$. В табл. 1 приведены значения $m_3 \cdot 10^5$ в зависимости от δ и γ_2/γ_1 при условии, что $k_1/k = 200$, $k_2/k = 100$, $m/k = 0{,}2$.

Для определения константы m_{11}^* необходимо задать макроскопическое магнитное поле с отличной от нуля компонентой $H_x = -\psi^0 = \mathrm{const}$ в декартовой системе координат (ось перпендикулярна направлению волокон). Уравнениям равновесия электростатики и магнитостатики

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rD_r)+\frac{\partial D_\theta}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{\partial B_\theta}{\partial\theta}=0$$

удовлетворим, если микроскопические переменные u_z^α, φ^α, ψ^α для связующего материала будем искать в виде

$$u_z^\alpha=(A_\alpha r+B_\alpha/r)\cos\theta,\quad \varphi^\alpha=(G_\alpha r+E_\alpha/r)\cos\theta$$

$$\psi^\alpha=(P_\alpha r+Q_\alpha/r)\cos\theta$$

а для волокон

$$u_z^\alpha=C_\alpha r\cos\theta,\quad \varphi^\alpha=F_\alpha r\cos\theta,\quad \psi^\alpha=R_\alpha r\cos\theta$$

При этом отличные от нуля компоненты ε_{rz}, $\varepsilon_{\theta z}$ тензора деформаций связаны с перемещениями u_z соотношениями Коши

$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta z=\frac{1}{2r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}$$

а отличные от нуля компоненты E_r, E_θ, H_r, H_θ векторов напряженности электрического и магнитного полей выражаются через потенциалы φ и ψ:

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r},\ E_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\ H_r=-\frac{\partial\psi}{\partial r},\ H_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

Константы $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, G_\alpha, E_\alpha, F_\alpha, P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ определяются из условий непрерывности $u_z^\alpha, \varphi^\alpha, \psi^\alpha, \sigma_{rz}^\alpha, D_r^\alpha, B_r^\alpha$ и граничных условий: $\varphi^\alpha=0$, $\psi^\alpha=\psi^0 b_\alpha\cos\theta$, $\sigma_{rz}^\alpha=$ $=\sigma^0\cos\theta$, где b_α – радиусы составных цилиндров, σ^0 – макроскопическое сдвиговое напряжение, препятствующее возникновению макроскопической сдвиговой продольной деформации. Для определения σ^0 необходимо условие $\langle\varepsilon_{xz}\rangle=0$. Микроскопические деформации ε_{xz}^α связаны с ε_{rz}^α и $\varepsilon_{\theta z}^\alpha$ соотношением $\varepsilon_{xz}^\alpha=\varepsilon_{rz}^\alpha\cos\theta-\varepsilon_{\theta z}^\alpha\sin\theta$. Аналогичные соотношения имеют место для E_x^α и B_x^α. Из девятнадцати перечисленных условий определяем константы C_1, F_1, G_1, F_2, G_2, необходимые для вычисления $\langle D_x\rangle=-m_{11}^*\psi^0$. Окончательно для m_{11}^* получим

$$m_{11}^*=4\gamma_1\gamma_2 e_{15}h_{15}Э_{11}\mu_{11}/[\delta(1-\delta)^2G_{44}Э\mu\beta_1]$$

$$\beta_1=\gamma_1(1+\gamma\chi_1)[1-(\gamma+2)\chi_2]+\gamma_2(1+\gamma\chi_2)[1-(\gamma+2)\chi_1]$$

$$\chi_1=\tfrac{1}{2}(C_{44}+C_{44}^1+(e_{15})^2/Э)/C_{44}$$

$$\chi_2=\tfrac{1}{2}(C_{44}+C_{44}^2+(h_{15})^2/\mu)/C_{44}$$

$$Э=Э_{11}+Э_{11}^1+2Э_{11}/\gamma$$

$$\mu=\mu_{11}+\mu_{11}^2+2\mu_{11}/\gamma$$

где C_{44}, $Э_{11}$ и μ_{11} – соответственно модуль сдвига, диэлектрическая и магнитная проницаемости матрицы.

Константу m_{11}^* можно определить и путем задания макроскопического электрического поля с отличной от нуля компонентой $E_x=-\varphi^0=\text{const}$. Константа m_{11}^* в этом случае будет определяться из соотношения $\langle B_x\rangle=-m_{11}^*\varphi^0$. Формула для m_{11}^* при этом не изменится. Обозначим через m_1 отношение $-m_{11}^*C_{44}/(h_{15}e_{15})$. В табл. 2 представлены значения $m_1\cdot10^5$ в зависимости от δ и γ_2/γ_1 при следующих условиях:

Таблица 2

δ	$\gamma_2/\gamma_1 = 0{,}1$	0,5	1	2	10
0,1	0,001	0,004	0,004	0,004	0,001
0,3	0,21	0,056	0,063	0,056	0,021
0,5	0,123	0,327	0,364	0,320	0,117
0,7	0,750	1,957	2,158	1,881	0,680
0,9	10,84	27,13	29,14	24,78	8,669

$C_{44}^1 / C_{44} = 25$, $C_{44}^2 / C_{44} = 15$, $Э_{11}/Э_0 = 3$, $Э^1_{11}/Э_0 = 700$, $\mu_{11}/\mu_0 = 1$, $\mu_{11}^2 / \mu_0 = 10$, $(e_{15})^2/(C_{44}Э_{11}) = 400$, $(h_{15})^2/(C_{44}\mu_{11}) = 3$, где $Э_0$ и μ_0 – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

3. Рассмотрим пьезокомпозит с изотропной упругой матрицей, структуру которого можно представить в виде набора слоев.Каждый слой армирован в одном направлении одним типом волокон: пьезоэлектрическими или пьезомагнитными. При этом слои, армированные разными типами волокон, чередуются. Слои с одинаковым типом волокон имеют одинаковые толщину и объемную концентрацию волокон. Пусть объемная концентрация пьезоэлектрических волокон в слое равна q_1, а объемная концентрация пьезомагнитных волокон в слое – q_2. Будем предполагать, что направление пьезоэлектрических волокон перпендикулярно направлению пьезомагнитных волокон. Введем прямоугольную декартовую систему координат x_1, x_2, x_3. Ось x_1 перпендикулярна слоям, ось x_2 совпадает с направлением пьезоэлектрических волокон, а ось x_3 – с направлением пьезомагнитных волокон.

Определение магнитоэлектрических констант проведем в два этапа. На первом этапе заменим армированные слои на однородные с эффективными свойствами соответствующих однонаправленных волокнистых пьезокомпозитов, определяемыми на основе модели коаксиальных цилиндров. На втором этапе применяется процедура осреднения для слоистого пьезокомпозита с периодической структурой. Определение пьезоэлектрических констант для пьезокомпозита с периодической структурой заключается в следующем. Задаем макропотенциал $\psi = \psi_q^0 x_q$ (в отличие от других повторяющихся латинских индексов суммирование по q от 1 до 3 не производится). Внутри ячейки периодичности микроперемещения u_k и микропотенциалы φ, ψ ищем в виде

$$u_k = \psi_q^0 U_{kq}, \quad \varphi = \psi_q^0 \Phi_q, \quad \psi = \psi_q^0 (x_q + \Psi_q)$$

На границе ячейки периодичности микропеременные должны равняться заданным макропеременным. В рассматриваемом случае только одна макропеременная отлична от нуля – макропотенциал ψ. Поэтому на границе ячейки периодичности функции U_{kq}, Φ_q и Ψ_q должны принимать нулевые значения. Из уравнений равновесия, электростатики и магнитостатики следует система уравнений относительно функций U_{kq}, Φ_q, Ψ_q:

$$\begin{aligned} &(C_{ijkl}U_{kq,l} + e_{kij}\Phi_{q,k} + h_{kij}\Psi_{q,k} + h_{qij})_{,k} = 0 \\ &(e_{kij}U_{iq,j} - Э_{kn}\Phi_{q,n})_{,k} = 0 \\ &(h_{kij}U_{iq,j} - \mu_{kn}\Psi_{q,n} - \mu_{kq})_{,k} = 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

В (3.1) в отличие от (1.1), (1.2) для компонент C_{ijkl} тензора модулей упругости, компонент e_{kij} тензора пьезоэлектрических модулей и компонент h_{kij} тензора пьезомагнитных модулей принята полная в смысле индексов запись. В (1.1), (1.2) используется сокращенная запись для компонент перечисленных тензоров: если $i = j$ и $k = l$, то $C_{ijkl} = C_{ik}$, $e_{kij} = e_{ki}$, $h_{kij} = h_{ki}$; если $i \neq j$, то $C_{ijkl} = C_{9-i-j,k}$, $e_{kij} = e_{k,9-i-j}$, $h_{kij} = h_{k,9-i-j}$; если и $k \neq l$, то $C_{ijkl} = C_{9-i-j,9-k-l}$.

Следует отметить, что систему уравнений (3.1) можно получить с помощью метода осреднения [4]. Единственное отличие заключается в следующем. Функции U_{kq}, Φ_q, Ψ_q согласно методу осреднения должны быть периодическими и удовлетворять условиям $\langle U_{kq}\rangle = \langle \Phi_q\rangle = \langle \Psi_q\rangle = 0$, где угловыми скобками обозначено среднее по объему ячейки периодичности.

Магнитоэлектрические константы будут определяться из соотношения $\langle D_k\rangle = -m^*_{kq}\psi^0_q$, где D_k – компоненты вектора электрической микроиндукции. Через функции U_{kq} и Φ_q константы m^*_{kq} будут выражаться следующим образом:

$$m^*_{kq} = -\langle e_{kij}U_{iq,j} - Э_{kn}\Phi_{q,n}\rangle \tag{3.2}$$

Для рассматриваемого пьезокомпозита в (3.1), (3.2) под C_{ijkl}, e_{kij}, h_{kij}, $Э_{kn}$ и μ_{kn} следует понимать эффективные свойства слоев. Так как эти свойства зависят только от координаты x_1, то из (3.1), (3.2) следуют

$$\begin{aligned}
&(C_{i1k1}U_{kq,1} + e_{1i1}\Phi_{q,1} + h_{1i1}\Psi_{q,1} + h_{qi1})_{,1} = 0\\
&(e_{1i1}U_{iq,1} - Э_{11}\Phi_{q,1})_{,1} = 0\\
&(h_{1i1}U_{iq,1} - \mu_1\psi_{q,1} - \mu_{1q})_{,1} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$m^*_{kq} = -\langle e_{ki1}U_{iq,1} - Э_{k1}\Phi_{q,1}\rangle \tag{3.4}$$

В (3.3), (3.4) отличными от нуля будут следующие эффективные пьезоэлектрические и пьезомагнитные модули: $e_{112} = e_{332}$, $e_{211} = e_{233}$, e_{222}, $h_{113} = h_{223}$, $h_{311} = h_{322}$, h_{333}. Эффективные диэлектрические $Э_{kn}$ и магнитные μ_{kn} проницаемости, входящие в (3.3), (3.4), отличны от нуля только при $n = k$. В силу этого нужно удовлетворить только одному уравнению

$$(C_{111}U_{13,1} + h_{311})_{,1} = 0 \tag{3.5}$$

из системы (3.3), чтобы определить единственную отличную от нуля магнитоэлектрическую константу $m^*_{23} = -\langle e_{211}U_{13,1}\rangle$. Из (3.5) следует, что $C_{1111}U_{13,1} + h_{311} = \text{const}$. Таким образом

$$C^2_{1111}U^2_{13,1} + h_{311} = C^1_{1111}U^1_{13,1} \tag{3.6}$$

где индексом 1 сверху отмечены величины, относящиеся к слою с пьезоэлектрическими волокнами, а индексом 2 – величины, относящиеся к слою с пьезомагнитными волокнами. К (3.6) следует добавить условие $\langle U_{13,1}\rangle = 0$ равносильное

$$h_1U^1_{13,1} + h_2U^2_{13,1} = 0 \tag{3.7}$$

где h_1 – объемная концентрация слоя с пьезоэлектрическими волокнами, h_2 – объемная концентрация слоя с пьезомагнитными волокнами. Из (3.6), (3.7) следует, что $U^1_{13,1} = h_2h_{311}/(C^1_{1111}h_2 + C^2_{1111}h_1)$. Окончательно для m^*_{23} получим

$$m^*_{23} = -h_1h_2e_{211}h_{311} / (C^1_{1111}h_2 + C^2_{1111}h_1) \tag{3.8}$$

Константу m^*_{23} можно определить, задавая электрический макропотенциал φ в виде $\varphi = \varphi^0_q x_q$, из соотношения $\langle B_3\rangle = -m^*_{23}\varphi^0_2$, где B_3 – компонента вектора магнитной микроиндукции. Формула (3.8) для m^*_{23} при этом не изменится.

Таблица 3

δ	$\gamma_2/\gamma_1 = 0,1$	0,5	1	2	10
0,1	0,006	0,017	0,019	0,017	0,006
0,3	0,064	0,180	0,204	0,180	0,064
0,5	0,203	0,613	0,711	0,614	0,205
0,7	–	1,737	2,078	1,760	–
0,9	–	–	9,043	–	–

В (3.8) e_{211}, h_{311}, C^1_{1111}, C^2_{1111} – эффективные свойства соответствующих слоев. Согласно модели коаксиальных цилиндров

$$e_{211} = e_{21}(1 - r_1), \quad h_{311} = h_{31}(1 - r_2)$$

$$r_\alpha = (m + k_\alpha)(1 - g_\alpha)/(k + m + (k_\alpha - k)(1 - g_\alpha))$$

$$C^\alpha_{1111} = k_\alpha + (k - k_\alpha)r_\alpha + m(1 - 2(m + k)/a_\alpha)$$

$$a_\alpha = P_\alpha + 3k^2(1 - g_\alpha)^2/q_\alpha$$

$$P_\alpha = k + 2m + (km + m_\alpha(k + 2m))/(g_\alpha(m - m_\alpha))$$

$$q_\alpha = k + 2m - g^2_\alpha(k_\alpha m_\alpha(k - 2m) - mk(k_\alpha + 2m_\alpha))/(k_\alpha m_\alpha + m(k_\alpha + 2m_\alpha)) \quad (\alpha = 1, 2)$$

где e_{21} и h_{31} – пьезоэлектрический и пьезомагнитный модули соответствующих волокон; k и m – упругие свойства матрицы: $k = (C_{11} + C_{12})/2$, $m = (C_{11} - C_{12})/2$; k_1 и m_1 – упругие свойства пьезоэлектрических волокон: $k_1 = (C^1_{11} + C^1_{13})/2$, $m_1 = (C^1_{11} - C^1_{13})/2$; k_2 и m_2 – упругие свойства пьезомагнитных волокон: $k_2 = (C^2_{11} + C^2_{12})/2$, $m_2 = (C^2_{11} - C^2_{12})/2$. Обозначим через m_4 отношение $-m^*_{23}(m + k)/(e_{21}h_{31})$. В табл. 3 приведены значения $m_4 \cdot 10^5$ в зависимости от δ и γ_2/γ_1 при следующих условиях: $h_1 = h_2 = 0,5$; $k_1/k = 200$; $k_2/k = 100$; $m/k = 0,2$; $m_1/k_1 = 0,4$; $m_2/k_2 = 0,4$. Объемные концентрации γ_α пьезоэлектрических и пьезомагнитных волокон в композите связаны с g_α и h_α соотношениями $\gamma_\alpha = g_\alpha h_\alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
2. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 336 с.
3. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с.
4. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VIII.1994