

УДК 539.3

© 1996 г. И.Г. ГОРЯЧЕВА, И.В. ФЕЛЬДШТЕЙН

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕЙ СИСТЕМЫ ДЕФЕКТОВ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ

Изложен асимптотический метод исследования напряженно-деформированного состояния упругих тел с учетом влияния внутренних систем дефектов. Метод основан на теории краевых задач в областях с мелкозернистой границей. Рассмотрен частный случай применения метода к контактной задаче для полуплоскости, содержащей систему дефектов, локализованную вдоль линии, параллельной границе.

При решении целого ряда прикладных задач требуется учитывать влияние систем дефектов (типа микротрещин и микрополостей) на напряженно-деформированное состояние упругих тел. С точки зрения оценки поверхностной прочности тел при их контактном взаимодействии особый интерес представляет изучение полей напряжений в приповерхностных слоях, где, как правило, появление микротрещин и другого рода дефектов связано с применением разных видов механической и термической обработки поверхностей (нанесение покрытий, упрочнение и т.д.).

Подобное исследование приводит к необходимости решения краевой задачи теории упругости в сложной области, которое может быть осуществлено в точной постановке лишь для некоторых идеализированных случаев. Одной из традиционных идеализаций является предположение о неограниченности области, в которой расположены дефекты. Методы определения напряженного состояния упругих тел вблизи внутренних концентраторов напряжений в виде системы трещин, разрезов и тонких включений изложены в монографиях [1–3]. Случаи, когда дефекты расположены вблизи границы упругого тела, не могут рассматриваться в рамках упомянутой выше идеализации. В [4] предложен метод решения плоской контактной задачи для полосы, дискретно спаянной с основанием (имеющей конечное число разрезов на границе их раздела). Система круговых отверстий, расположенных вблизи границы полуплоскости, рассмотрена в [2]. Однако алгоритмы решения задач, развитые в [2, 4] и некоторых других работах, достаточно сложны для конкретных реализаций (особенно в случае исследования смешанной задачи теории упругости) и, кроме того, предполагают наличие в области конечного числа внутренних дефектов.

В настоящей статье предлагается подход к решению этой задачи, основанный на теории дифференциальных операторов в областях с мелкозернистой границей. Предполагается, что система дефектов локализована у некой внутренней поверхности Γ области Ω , занимаемой упругим телом. Основной идеей предлагаемого метода является введение характеристик «дефектного слоя» (слоя, содержащего систему дефектов), которые в среднем отражают его поведение при деформировании. Это позволяет свести исходную точную формулировку граничных условий на поверхностях дефектов к условию сопряжения на Γ . Показано, что как эти характеристики, так и получаемое условие сопряжения имеют простой механический смысл, обсуждаемый в п. 2. Метод позволяет рассчитать осредненные значения напряжений на некотором удалении от системы дефектов.

1. Постановка задачи. 1.1 *Исходная задача.* Пусть область $\Omega \subset R^n$, а множество подобластей $F^s = \bigcup F_i^{(s)} \subset \Omega$ ($i = 1, \dots, s$, см. фиг. 1). Все элементы $F^{(s)}$ локализованы около некоторой внутренней поверхности Γ (в 2-мерном случае – вблизи некоторой внутренней кривой).

Рассмотрим в $\Omega \setminus F^{(s)}$ краевую задачу для уравнения Ляме (массовые силы полагаются равными нулю):

$$L\mathbf{u}^{(s)} \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \mathbf{u}^{(s)} = 0 \quad (n=2, 3) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{T}_\nu|_{\partial F^{(s)}} = 0$$

где \mathbf{T}_v – вектор нагрузки на единичной площадке границы $\partial F^{(s)}$ области $F^{(s)}$ с нормалью v , a_{ij} в 2-мерном случае ($n = 2$) определяются следующим образом:

$$a_{11} = \begin{vmatrix} \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix}, \quad a_{22} = \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

$$a_{12} = \begin{vmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{vmatrix}, \quad a_{21} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{vmatrix}$$

На границе $\partial\Omega$ могут быть поставлены произвольные граничные условия (в напряжениях, перемещениях или смешанного типа).

1.2. Вспомогательная задача. В предлагаемом подходе вводятся характеристики влияния множества $F^{(s)}$ на решение задачи теории упругости в области Ω .

Пусть γ открытое связное множество на Γ ; γ^+ и γ^- поверхности, образованные концами векторов, нормальных к γ , длины δ (фиг. 1); $T(\gamma, \delta)$ – слой толщины 2δ со срединной поверхностью γ , $F^{(s)} \subset T(\gamma, \delta)$; $T(\gamma, \delta, s) = T(\gamma, \delta) \setminus F^{(s)}$.

Определим $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ как решение следующей краевой задачи для уравнения Ляме в области $T(\gamma, \delta, s)$:

$$L\mathbf{u}^{(\alpha)} = 0 \quad (1.3)$$

$$\gamma^-: \mathbf{u}^{(\alpha)} = 0; \quad \gamma^+: u_i^\alpha = \delta_{i\alpha}$$

$$\mathbf{T}_v|_{\partial F^{(s)}} = 0$$

где u_i^α – i -я компонента вектора $\mathbf{u}^{(\alpha)}$.

Характеристикой влияния множества $F^{(s)}$ является тензор $\mathbf{P}(\gamma, \delta, s)$ с компонентами $\mathbf{P}^{\alpha\beta}(\gamma, \delta, s)$:

$$\mathbf{P}^{\alpha\beta}(\gamma, \delta, s) = \int_{T(\gamma, \delta, s)} \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}^{(\alpha)}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{u}^{(\beta)}}{\partial x_i} \right) dv \quad (1.4)$$

$$(n = 2, (3), \quad \alpha, \beta = 1, 2, (3)), \quad dv = \prod_{i=1}^n dx_i$$

Сформулируем в Ω следующую краевую задачу:

$$L\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \setminus \Gamma \quad (1.5)$$

$$\mathbf{T}_v^+|_\Gamma = \mathbf{T}_v^-|_\Gamma = k(x)[\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-]|_\Gamma$$

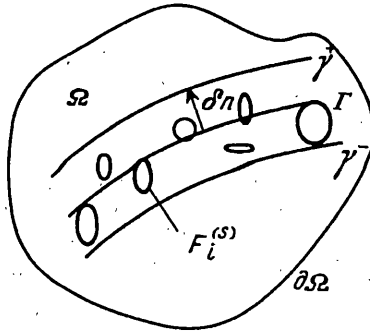
где \mathbf{T}_v^+ и \mathbf{T}_v^- – вектора нагрузок на единичных площадках с нормалью v с разных сторон Γ , $[\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-]$ – разрыв вектора смещений на Γ , $k(x)$ – тензор с неотрицательными ограниченными компонентами. На $\partial\Omega$ имеют место заданные при формулировке исходной задачи граничные условия.

1.3. Основная теорема. Пусть при $s \rightarrow \infty$ выполняются следующие условия:

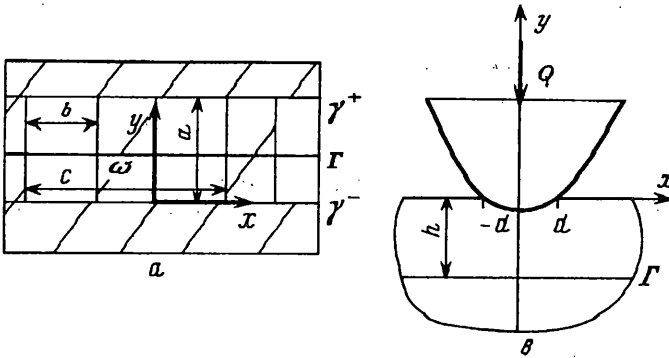
все элементы $F_i^{(s)}$ находятся в сколь угодно малой окрестности Γ ;

для любого $\gamma \subset \Gamma$ существуют следующие пределы и такие функции $k(x)$, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\gamma, \delta, s) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{P}}(\gamma, \delta, s) = \int_\gamma k(x) d\Gamma \quad (1.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда последовательность $u^{(s)}$ решений задачи (1.1) сходится к решению задачи (1.5) вместе со вторыми производными.

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы, сформулированной и доказанной в [5]. Для приложений теорема дает метод асимптотического анализа напряженно-деформированного состояния на некотором удалении от Γ .

2. Тензор влияния. Компоненты симметричного тензора напряжений, соответствующего краевой задаче (1.3), имеют вид

$$\sigma_{jk}^{\alpha} = \sum_{i,m=1}^n a_{ji}^{mk} \frac{\partial u_m^{\alpha}}{\partial x_i} \quad (\sigma_{ij}^{\alpha} = \sigma_{ji}^{\alpha}) \quad (2.1)$$

где компоненты a_{ji}^{mk} тензора a_{ji} определены в (1.2).

Из (1.3), (1.4) и (2.1) следует

$$P^{\alpha\beta}(\gamma, \delta, s) = \int_{T(\gamma, \delta, s)} \sum_{j,k=1}^n \sigma_{jk}^{\alpha} \frac{\partial u_k^{\beta}}{\partial x_j} dv = \int_{\gamma^+} \sum_{i=1}^n T_i^{\alpha} \delta_{i\beta} d\Sigma = \int_{\gamma^+} T_{\beta}^{\alpha} d\Sigma \quad (2.2)$$

где T_i^{α} – компонента вектора сил $T^{(\alpha)}$, действующих на границе γ^+ в задаче с крайевыми условиями (1.3). Таким образом, компоненты $P^{\alpha\beta}(\gamma, \delta, s)$ тензора влияния $P(\gamma, \delta, s)$ равны работе сил $T^{(\alpha)}$ на перемещениях границы γ^+ , соответствующих граничным условиям (B) (см. (1.3)). На основании теоремы Бетти этот тензор является симметричным.

Из сопоставления выражений (1.6) и (2.2) следует, что компоненты тензора $k(x)$ численно равны предельным значениям при $\delta \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$ компонент векторов усилий

$T^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, (3)$), действующих на единичную площадку границы γ^+ области $T(\gamma, \delta, s)$ (в пределе γ^+ совпадает с Γ) в задаче с граничными условиями (1.3).

Таким образом, тензор $k(x)$, используемый при постановке вспомогательной задачи (1.5), осредненно отражает деформационные свойства дефектного слоя.

Определим для примера тензор $k(x)$ в одном частном случае. Пусть $\Omega \subset R^2$, Γ – линия, параллельная оси x , $F^{(s)}$ – множество равномерно распределенных по Γ прямоугольников одинакового размера. γ^+ и γ^- выбраны так, что слой $T(\gamma, \delta)$ имеет минимальную толщину (рис. 2а). Такой выбор основан на следующем соображении. Теорема дает метод анализа асимптотического поведения решения задачи (1.1) на расстояниях от Γ тем больших, чем больше толщина $T(\gamma, \delta)$. Другой выбор γ^+ и γ^- приведет к более отдаленной асимптотике. Это можно проиллюстрировать предельным случаем: если δ много больше характерного размера $F_i^{(s)}$, то решение вспомогательной задачи (1.3) и компоненты \mathbf{P} почти не «чувствуют» множество $F_i^{(s)}$, что соответствует решению задачи (1.1) на бесконечности.

Рассмотрим элемент ω , сформированный γ^+ , γ^- и границами двух соседних дефектов и представляющий собой прямоугольник со сторонами $c-b$ и a (фиг. 2, а). Деформирование каждого элемента ω независимо от деформирования соседних элементов, поскольку граничные условия на γ^+ и γ^- в задаче (3) задаются в форме смещений. Предполагается, что напряженное состояние однородно. Это тем более точно, чем более вытянут элемент ω в направлении оси x или y ($x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$). Решения задачи (1.3) тогда будет

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} y/a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ y/a \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Обозначим через l длину множества γ , включающего в себя N элементов ω , $N = l/c$, $N \gg 1$. В силу равномерного распределения дефектов на основании (1.4) будем иметь

$$\mathbf{P}^{\alpha\beta}(\gamma, \delta, s) = N \int \sum_{\omega, i, j=1}^2 \left(a_{ij} \frac{\partial \mathbf{u}^{(\alpha)}}{\partial x_j}, \frac{\partial \mathbf{u}^{(\beta)}}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 \quad (2.4)$$

Подставляя (1.2) и (2.3) в (2.4), получим

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \frac{(c-b)l}{ac}$$

Из (1.6) с учетом равномерности распределения элементов ω следует:

$$k = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \frac{(c-b)}{ac} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

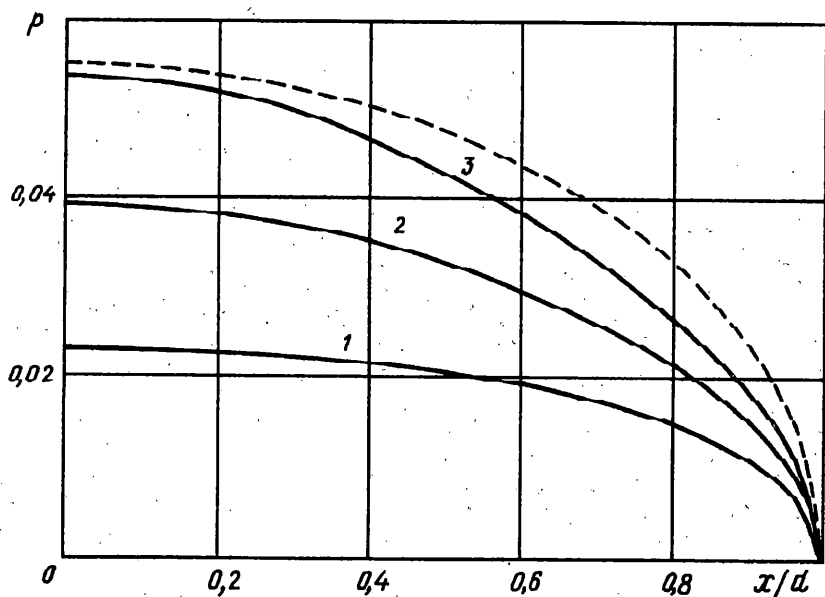
На основании (1.5) для рассмотренной системы дефектов на линии Γ , параллельной оси x , будут выполняться следующие соотношения:

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = k_1(u^+ - u^-) \quad (2.6)$$

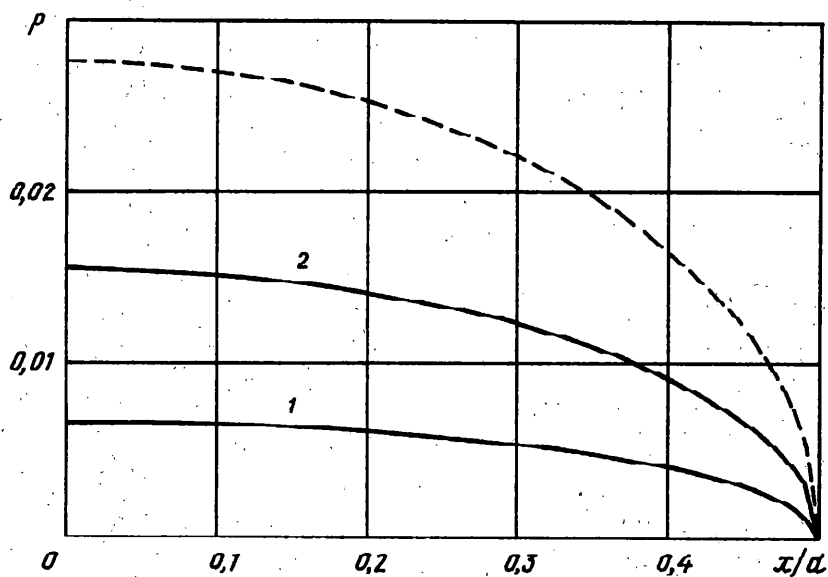
$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = k_2(v^+ - v^-)$$

где τ_{xy}^\pm , σ_y^\pm , u^\pm , v^\pm – тангенциальные и нормальные напряжения и смещения на Γ .

3. Контактная задача для упругой полуплоскости с системой дефектов, располо-



Фиг. 3

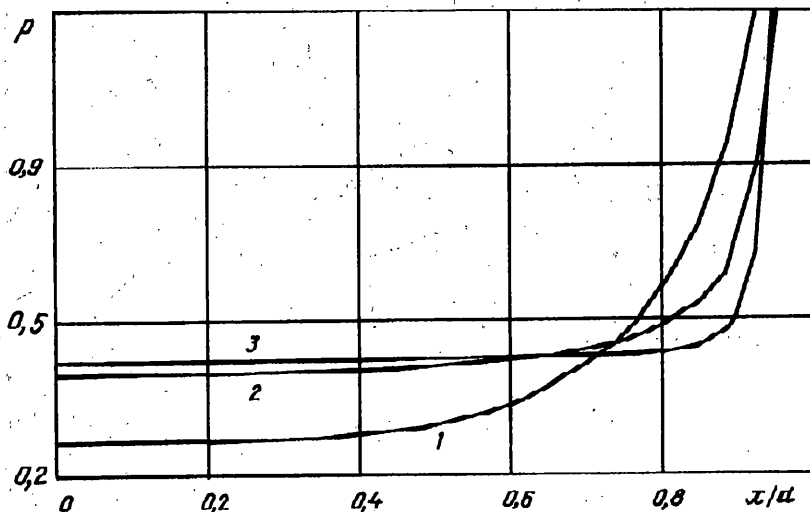


Фиг. 4

женных параллельно границе. Рассмотрим применение предложенного подхода к решению контактной задачи теории упругости для полуплоскости. Пусть штамп, форма контактирующей поверхности которого описывается функцией $f(x)$, вдавлируется без трения в упругую полуплоскость силой Q (фиг. 2, b). Условия на границе $y = 0$ имеют вид

$$v = f(x) - \delta \quad \text{при } |x| \leq d, \quad \sigma_y = 0 \quad \text{при } |x| > d \quad (3.1)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad \text{при } -\infty < x < \infty$$



Фиг. 5

Здесь d — полуширина площадки контакта, δ — внедрение штампа.

Система дефектов расположена вдоль прямой $y = -h$. Предполагается, что условия сопряжения на этой прямой имеют вид (2.6), при этом значения k_1, k_2 известны и, согласно (2.5), связаны соотношением $k_2 = (\lambda + 2\mu)k_1 / \mu$.

Задача решалась методом преобразований Фурье, разработанным в [6] для исследования плоских контактных задач для многослойных упругих тел. Фурье образы H_1, H_2 функций Эйри, являющихся бигармоническими в областях $\{(x, y): -h < y < 0\}$ и $\{(x, y): y < -h\}$, имеют вид

$$H_1 = (a_1(\omega) + b_1(\omega)y)e^{y\omega} + (c_1(\omega) + d_1(\omega)y)e^{-y\omega} \quad (3.2)$$

$$H_2 = (a_2(\omega) + b_2(\omega)y)e^{y|\omega|}$$

Коэффициенты $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2$ определялись из решения системы уравнений, полученной на основании граничных условий (2.6) и (3.1). Обратное преобразование Фурье осуществлялось численно.

Результаты расчетов для случая $f(x) = x^2/2R$ представлены на фиг. 3, 4. При расчетах использовались следующие безразмерные параметры и функции: $\bar{h} = h/d$, $\bar{R} = R/d$, $p(x) = -\sigma_y(x, 0)/E$, $\bar{k} = k_1 d/E$.

Кривые 1–3 на фиг. 3 построены при $\bar{h} = 1$, $\bar{R} = 10$ и $\bar{k} = 0,1; 1,0; 3,0$ соответственно. Расчеты показали, что с увеличением дефектности слоя (уменьшением значения \bar{k}) при заданном размере области контакта и фиксированной толщине слоя максимальные значения контактных давлений $p(x)$ на ней падают и уменьшается нагрузка, требуемая для достижения заданного размера области (фиг. 3). Для сравнения на фиг. 3 штриховой линией показано распределение давлений по Герцу, соответствующее тому же значению параметра \bar{R} .

Кривые, представленные на фиг. 4, построены при $\bar{R} = 20$, $\bar{k} = 0,5$ и $\bar{h} = 1$ (кривая 1), $\bar{h} = 2$ (кривая 2); штриховая линия соответствует распределению давлений по Герцу. Результаты расчетов показывают, что при увеличении расстояния от площадки контакта до дефектного слоя влияние дефектов на распределение давлений под штампом снижается.

Анализ распределения давлений на площадке контакта штампа с плоским основанием ($f(x) = 0$) показал, что как при приближении системы дефектов к границе упругой полуплоскости, так и при увеличении дефектности слоя (уменьшении значения \bar{k}) давления в центральной зоне контакта уменьшаются. Зависимость распределения давлений от параметра \bar{k} иллюстрируется кривыми 1–3 на фиг. 5, построенными при значениях $\bar{k} = 0,1; 1,0; 10,0$ соответственно, $\bar{h} = 1$, $Q / (Ed) = 1$.

Результаты, приведенные на фиг. 3–5 соответствуют случаю $(\lambda + 2\mu) / \mu = 3,5$.

Проведенное исследование показывает, что существуют границы изменения параметров, характеризующих степень «дефектности» слоя и его удаленности от границы, в пределах которых дефектный слой оказывает существенное влияние на контактные характеристики. Предложенный подход позволяет учесть это влияние при решении контактных задач и исследовании напряженного состояния упругих тел, имеющих внутренние системы дефектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (грант N M8C300) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант N 96-01-01269).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Савин Т.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
4. Можаровский В.В., Старжинский В.Е. Прикладная механика слоистых тел из композитов: Минск: Наука и техника, 1988. 271 с.
5. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974. 280 с.
6. Петришин В.И., Приварников А.К., Шевеляков Ю.А. К решению задач для многослойных оснований // Изв. АН СССР. МТТ. 1965. № 2. С. 138–143.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1995