

УДК 539.3

© 1996 г. И.А. БРИГАДНОВ

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕВЫПУКЛЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Рассматривается вариационная постановка краевой задачи теории малых статических деформаций твердого тела, состоящего из простого потенциального материала. Приводятся необходимые сведения по математической корректности вариационной задачи для многомерного интегрального функционала. Для потенциалов, зависящих от выпуклых инвариантов тензора деформаций Коши выводятся общие локальные условия выпуклости и выпуклости по рангу 1, "оценивающие" сверху и снизу нелокальное условие квазивыпуклости. Последнее, как известно, является необходимым и достаточным для математической корректности соответствующей краевой задачи. Показывается, что для потенциала деформационной теории пластичности все три вида выпуклости эквивалентны между собой, а, например, потенциал теории континуального разрушения может обладать любым видом выпуклости при соответствующем выборе параметров.

Приводятся необходимые сведения по регуляризации и дается определение обобщенного решения вариационной задачи с невыпуклым интегрантом. Описанная техника применяется для построения выпуклой оболочки потенциала деформационной теории пластичности с немонотонной материальной функцией, имеющей падающие участки. Вводится понятие линии Максвелла по аналогии с теорией газа Ван-дер-Ваальса.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показывающие принципиальную необходимость регуляризации моделей, допускающих немонотонную связь между напряжением и деформацией.

Решение краевых задач механики деформируемого твердого тела имеет огромное значение как для теории, так и для практики. В настоящее время существует множество феноменологических моделей, описывающих различные эффекты деформирования твердых тел. Адекватность и область применения каждой модели должны устанавливаться только путем сопоставления экспериментальных данных и решений соответствующих краевых задач. Поэтому в настоящее время на первый план выходят анализ математической корректности краевых задач и разработка эффективных численных методов их решения. Особенностью современного этапа развития механики деформируемого твердого тела является акцент на существенно нелинейные эффекты и связанные с ними проблемы. Как известно, каждый тип нелинейности требует для своего исследования специальных методов. В предлагаемой работе подробно рассматриваются современные методы анализа некоторых нелинейных эффектов теории малых статических деформаций твердого тела.

1. Краевая задача теории малых статических деформаций. Пусть однородное тело в недеформированном состоянии занимает ограниченную область $\Omega \subset R^3$ с липшицевой границей Γ . В деформированном состоянии каждая точка $x \in \Omega$ получает перемещение $u(x) \in R^3$ (переходит в положение $x + u(x)$). Малые деформации описываются симметричной частью градиента перемещения – тензором деформаций Коши $\varepsilon(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2 : \Omega \rightarrow S^3$, где S^3 – множество вещественных симметричных матриц 3×3 [1, 2]. Простой потенциальный материал описывается скалярной функцией запасенной энергии – потенциалом $W : S^3 \rightarrow [0, +\infty)$ [1]. В рамках большинства феноменологических моделей потенциалы удовлетворяют условию коэрцитивности и степенного роста

$$C_0 + C_1 |A|^p \leq W(A) \leq C_2 (1 + |A|^p) \quad (1.1)$$

для любой $A \in S^3$ с некоторыми постоянными $C_0 \in R$, $C_2 \geq C_1 > 0$, $p \geq 1$, где

$|A| = (A_{ij}A_{ij})^{1/2}$. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Рассматривается следующая краевая задача. К телу прикладываются квазистатические воздействия: в Ω – массовая сила с плотностью f , на части поверхности Γ^2 – поверхностная сила с плотностью F , а также задается перемещение u^0 части границы Γ^1 , причем $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma$, $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset$, $\text{area}(\Gamma^1) > 0$.

Задача определения поля перемещений ставится в вариационной форме [2, 3]:

$$u^* = \arg[\inf\{I(u) : u \in V\}] \quad (1.2)$$

$$I(u) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(u)) dx - L(u), \quad L(u) = \int_{\Omega} f \cdot u dx + \int_{\Gamma^2} F \cdot u dy$$

где $V = \{u \in W^{1,p}(\Omega, R^3) : u(x) = u^0(x), x \in \Gamma^1\}$ – множество кинематически допустимых перемещения, L – работа внешних сил.

Анализ математической корректности вариационной задачи (1.2) опирается на обобщенную теорему Вейерштрасса [4, 5]: если функционал секвенциально слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен на рефлексивном банаховом пространстве, тогда он ограничен снизу и достигает своей нижней грани на любом непустом слабо замкнутом подмножестве этого пространства.

Для потенциалов, удовлетворяющих условиям (1.1), функционал $I(u)$ корректно определен и коэрцитивен на рефлексивном банаховом пространстве $W^{1,p}(\Omega, R^3)$ с $p > 1$ для сил $g \in L^s(\Omega, R^3)$, $F \in L^t(\Gamma^2, R^3)$ с $s = 3p/(4p - 3)$, $t = 2p(3p - 3)$, если $p < 3$ и $s \geq 1$, $t \geq 1$, если $p \geq 3$ [2, 5]. Для $u^0 \in L^p(\Gamma^1, R^3)$ в силу теоремы о следах [2, 5] множество V является непустым и слабо замкнутым и $W^{1,p}(\Omega, R^3)$ как линейное аффинное многообразие [6]. Для секвенциально слабой полунепрерывности снизу функционала $I(u)$ на $W^{1,p}(\Omega, R^3)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $W(A)$ удовлетворяла условию степенного роста (1.1) и была квазивыпуклой [7–9].

Замечание 1.1. Случай $p = 1$ является вырожденным. А именно, возможно существование предельной выгрузки, т.е. таких сил (f, F) , для которых не существует никакого решения задачи (1.2) – функционал $I(u)$ неограничен снизу на V , а также возможно существование решений с разрывами типа проскальзывания – функционал $I(u)$ ограничен снизу на множестве V , однако не достигает минимума ни на одном элементе этого множества [10, 11]. Аналогичные эффекты установлены для краевых задач нелинейной теории упругости [12, 13].

Замечание 1.2. Если потребовать строгую выпуклость функции $W(A)$, тогда согласно классическому результату вариационного исчисления [4–6] задача (1.2) будет иметь единственное решение. Отметим, что условие квазивыпуклости допускает немонотонность определяющего соотношения и неединственность решения задачи (1.2).

2. Некоторые сведения из теории функций матричного аргумента. Рассматривается непрерывная функция $W: R^{3 \times 3} \rightarrow R$, где $R^{3 \times 3}$ – пространство вещественных матриц 3×3 .

1) Функция W называется выпуклой если для любых $A, B \in R^{3 \times 3}$ и $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство Йенсена [2, 4]:

$$W(tB + (1-t)A) \leq tW(B) + (1-t)W(A)$$

и строго выпуклой, если равенство исключено при $A \neq B$.

Для гладкой функции $W \in C^2(R^{3 \times 3})$ свойство выпуклости эквивалентно условию эллиптичности по Коулману – Ноллу [1, 2]:

$$[\partial^2 W(A) / \partial A_{ij} \partial A_{km}] B_{ij} B_{km} \geq \lambda |B|^2 \quad (2.1)$$

для любых $A, B \in R^{3 \times 3}$ со скаляром $\lambda \geq 0$.

2) Функция W называется выпуклой по рангу 1, если она выпуклая для любых $A, B \in R^{3 \times 3}$ с $\text{rank}(A - B) = 1$ [2, 14]. Для гладкой функции $W \in C^2(R^{3 \times 3})$ свойство выпуклости по рангу 1 эквивалентно известному условию эллиптичности по Лежандру – Адамару [1, 2, 14]:

$$[\partial^2 W(A) / \partial A_{ij} \partial A_{km}] a_i b_j a_k b_m \geq \lambda |a|^2 |b|^2 \quad (2.2)$$

для любых $A \in R^{3 \times 3}$, $a, b \in R^3$ со скаляром $\lambda \geq 0$. Легко видеть, что условие (2.2) является частным случаем условия (2.1) при использовании в последнем диадной матрицы $B_{ij} = a_i b_j$ с $\text{rank}(B) = 1$.

3) Функция W называется квазивыпуклой, если для любой ограниченной области $\Omega \in R^3$ и произвольных $A \in R^{3 \times 3}$, $z \in C_0^1(\Omega, R^3)$ выполняется неравенство [7]:

$$\int_{\Omega} [W(A + \nabla z(x)) - W(A)] dx \geq 0$$

где $C_0^1(\Omega, R^3)$ – пространство гладких финитных вектор-функций.

Легко видеть, что свойство квазивыпуклости имеет нелокальный (интегральный) характер и поэтому трудно проверяется на практике. Однако его можно "оценить" по диаграмме импликаций [15]:

$$\text{выпуклость} \Rightarrow \text{квазивыпуклость} \Rightarrow \text{выпуклость по рангу 1} \quad (2.3)$$

Первая импликация является строгой [7–9, 15], вторая – нестрогой. Для квадратичной функции $W(A) = \frac{1}{2} C_{ijkm} A_{ij} A_{km}$ (упругой модели Гука [1, 2]) свойства квазивыпуклости и выпуклости по рангу 1 эквивалентны [14, 15]. Согласно этим результатам выпуклость по рангу 1 является необходимым, а выпуклость – избыточным достаточным условием, накладываемым на потенциал теоремой существования [1, 2].

Замечание 2.1. Легко убедиться, что если функции W, U обладают различными свойствами выпуклости, тогда для любых чисел $a, b \geq 0$ функция $aW + bU$ обладает слабейшим из двух видов выпуклости в смысле диаграммы импликаций (2.3).

Пример 2.2 Рассмотрим однопараметрическое семейство гладких скалярных функций матричного аргумента

$$W_v(A) = |A|^2 + v \text{tr}(\text{Cof } A) \quad (2.4)$$

где $\text{cof } A$ – матрица алгебраических дополнений матрицы $A \in R^{3 \times 3}$, $v \in R$ – параметр, $\text{tr}(A) = \delta_{ij} A_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера.

Легко убедиться, что функция $W_v(A)$ является квадратичной

$$W_v(A) = \frac{1}{2} C_{ijkm} A_{ij} A_{km}, \quad C_{ijkm} = 2\delta_{ik} \delta_{jm} + v(\delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{jk}) \quad (2.5)$$

Из условия эллиптичности по Коулману – Ноллу (2.1) и известной оценки $|\text{tr}(\text{Cof } A)| \leq |A|^2$ [1] следует, что функция $W_v(A)$ является выпуклой (строго выпуклой) для параметров $|v| \leq 1$ (соответственно, $|v| < 1$).

Из условия эллиптичности по Лежандру – Адамару (2.2) следует, что функция $W_v(A)$ является строго выпуклой по рангу 1, а в силу квадратичности, и квазивыпуклой для любых параметров $v \in R$.

3. Анализ потенциальных моделей изотропных материалов. Известно, что малые статистические деформации изотропного материала полностью характеризуются тремя главными интервалами тензора деформаций Коши. В механике деформируемого твердого тела принято использовать специальные комбинации главных инвариантов, имеющие простой физический смысл: $\text{tr}(\epsilon)$ – относительная объемная деформация, $|\epsilon^D|$ – интенсивность сдвиговой деформации (с точностью до постоянного множителя) и

$\psi_\varepsilon = \frac{1}{3} \arcsin(-3\sqrt{3} \det(\varepsilon^D) / |\varepsilon^D|^3) \in [-\pi/6, \pi/6]$ – угол вида деформированного состояния, где $\varepsilon_{ij}^D = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\varepsilon) \delta_{ij}$ – компоненты девиатора. Иногда используется параметр Лоде $\mu_\varepsilon = \sqrt{3} \text{tg}(\psi_\varepsilon) \in [-1, 1]$ [16]. Отметим, что $\text{tr}(\varepsilon)$ и $|\varepsilon^D|$ являются выпуклыми инвариантами в отличие от ψ_ε (или μ_ε).

Учет угла вида (или параметра Лоде), например в разномодульной теории упругости [16], чрезвычайно усложняет анализ модели и решение соответствующей краевой задачи. Поэтому, на практике используются потенциалы, зависящие только от выпуклых инвариантов тензора деформаций Коши

$$W(A) = \Phi(\text{tr}(A), |A^D|) \quad (3.1)$$

для любой $A \in S^3$.

Анализ на выпуклость скалярной функции матричного аргумента $W: R^{3 \times 3} \rightarrow R$ проведем при помощи анализа на эллиптичность ее второй производной.

Для гладкой функции $\Phi \in C^2(R^2)$ введем обозначения $(\alpha, \beta = 1, 2)$:

$$\Phi_{\alpha}(t_1, t_2) = \partial \Phi(t_1, t_2) / \partial t_{\alpha}, \quad \Phi_{\alpha\beta}(t_1, t_2) = \partial^2 \Phi(t_1, t_2) / \partial t_{\alpha} \partial t_{\beta} \quad (3.2)$$

Тогда вторая производная функции W будет иметь компоненты

$$\frac{\partial^2 W(A)}{\partial A_{ij} \partial A_{km}} = R_{11} \delta_{ij} \delta_{km} + R_{12} (\delta_{ij} e_{km} + e_{ij} \delta_{km}) + R_{22} e_{ij} e_{km} + R_0 \delta_{ik} \delta_{jm} \quad (3.3)$$

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}(\text{tr}(A), |A^D|) \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

$$R_{11}(t_1, t_2) = \Phi_{11}(t_1, t_2) - \frac{1}{3} \Phi_2(t_1, t_2) / t_2, \quad R_{12}(t_1, t_2) = \Phi_{12}(t_1, t_2) = \Phi_{21}(t_1, t_2)$$

$$R_{22}(t_1, t_2) = \Phi_{22}(t_1, t_2) - \Phi_2(t_1, t_2) / t_2, \quad R_0(t_1, t_2) = \Phi_2(t_1, t_2) / t_2, \quad e_{ij} = A_{ij}^D / |A^D|$$

Взяв произвольные $A, B \in R^{3 \times 3}$ и подставив выражение (3.3) в условие (2.1), находим [1]:

$$\lambda = \lambda(z_1, z_2) = R_{\alpha\beta} z_{\alpha} z_{\beta} + R_0 \quad (3.4)$$

$$z_1 = \text{tr}(B) / |B| \in [-3^{1/2}, 3^{1/2}], \quad z_2 = e_{ij} B_{ij} / |B| \in [-1, 1]$$

Анализ квадратичной формы (3.4) на прямоугольнике $\{|z_1| \leq 3^{1/2}, |z_2| \leq 1\}$ показывает, что функция W является выпуклой ($\lambda \geq 0$), если для любых $t_1 \in R, t_2 > 0$ выполняется, например, система неравенств

$$\Phi_{11} \geq 0, \quad \Phi_{22} \geq 0, \quad 3\Phi_{11} + \Phi_{22} - 2\sqrt{3} |\Phi_{12}| \geq \Phi_2 / t_2 \geq 0 \quad (3.5)$$

Взяв произвольные $A \in R^{3 \times 3}, a, b \in R^3$ и подставив выражение (3.3) в условие (2.2) находим, что функция $\lambda = \lambda(z_1, z_2)$ имеет вид (3.4), но с $z_1 = a_i b_i / (|a||b|) \in [-1, 1], z_2 = e_{ij} a_i b_j / (|a||b|) \in [-1, 1]$. Анализ квадратичной формы (3.4) на квадрате $\{|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$ показывает, что функция W является выпуклой по рангу 1 ($\lambda \geq 0$), если для любых $t_1 \in R, t_2 > 0$ выполняется, например, система неравенств

$$3\Phi_{11} + 2\Phi_2 / t_2 \geq 0, \quad \Phi_{22} \geq 0, \quad 3(\Phi_{11} + \Phi_{22} - 2|\Phi_{12}|) \geq \Phi_2 / t_2 \geq 0 \quad (3.6)$$

Пример 3.1 Рассмотрим потенциал деформационной теории пластичности [17, 18]:

$$\Phi(t_1, t_2) = \frac{1}{2} k_0 t_1^2 + \mu G(t_2), \quad G(r) = 2 \int_0^r g(t) dt \quad (3.7)$$

где $k_0 > 0$ – модуль объемного деформирования, $\mu > 0$ – модуль сдвига, $g(t)$ – материальная функция (диаграмма состояния), определяемая экспериментально. Известно, что $g \in C^{0,1}([0, +\infty))$, $g(0) = 0$, $0 \leq g(t)/t \leq 1$ и $g'(t) \leq 1$ для почти всех $t \geq 0$ в силу гипотезы упругой разгрузки.

Проверка условий (3.5) и (3.6) показывает, что в рамках деформационной теории пластичности свойства выпуклости, выпуклости по рангу 1, а, согласно диаграмме импликаций (2.3), и квазивыпуклости функции $W(A)$ эквивалентны между собой и обеспечиваются выпуклостью функции $G(t)$ (монотонным неубыванием функции $g(t)$) на $[0, +\infty)$.

Пример 3.2. Рассмотрим потенциал теории континуального разрушения [19]:

$$\Phi(t_1, t_2) = \frac{1}{2}k_0 t_1^2 + \mu t_2^2 - \frac{1}{2}\omega^2 H(\omega) \quad (3.8)$$

$$\omega = \alpha_p t_1 + \alpha_s t_2 - \gamma$$

где $\omega \geq 0$ – скалярный параметр поврежденности, H – функция Хевисайда; $\alpha_p, \alpha_s \geq 0$ – коэффициенты, характеризующие взаимную связь поврежденности с объемными и сдвиговыми деформациями, $\gamma \geq 0$ – пороговое значение напряжения, при котором начинается процесс континуального разрушения.

Для потенциала (3.8) необходимое условие выпуклости по рангу 1 обеспечивается, например, системой неравенств

$$k_0 \geq \alpha_p^2, \quad 2\mu \geq \alpha_s^2, \quad 3(k_0 - \alpha_p^2) + 4\mu \geq \alpha_s^2 + 2\alpha_p \alpha_s$$

а избыточное достаточное условие выпуклости – системой неравенств

$$k_0 \geq \alpha_p^2, \quad 2\mu \geq \alpha_s^2, \quad 3(k_0 - \alpha_p^2) \geq \alpha_s^2 + 2\sqrt{3}\alpha_p \alpha_s$$

Таким образом, потенциал теории континуального разрушения может обладать любым видом выпуклости при соответствующем выборе параметров. Например, условие выпуклости по рангу 1 допускает равенство параметров $k_0 = \alpha_p^2$ в отличие от условия выпуклости. Последнее согласуется с экспериментально наблюдаемым эффектом неединственности и бифуркации равновесного состояния напряженных геоматериалов [19].

4. Регуляризация и обобщенное решение невыпуклых вариационных задач. В настоящее время пристальное внимание как механиков, так и математиков привлекают краевые задачи деформируемого твердого тела для немонотонных определяющих соотношений [20] и невыпуклых потенциалов [21]. Например, в рамках деформационной теории пластичности невыпуклость потенциала связана с наличием падающих участков на диаграмме состояния. Отметим, что падающий участок у материальной функции наблюдается в физических экспериментах и отождествляется либо с макроразрушением [20], либо с микроразрушением [22–24], либо с фазовым переходом [25]. С ним близко связан известный эффект запаздывания текучести [26].

В случае невыпуклого потенциала, удовлетворяющего условиям (1.1), вариационная задача (1.2) может не иметь регулярного решения. Поэтому приходится осуществлять регуляризацию задачи и вводить понятие обобщенного решения [6, 14].

Классический подход основан на теории двойственности и построении выпуклой оболочки потенциала [6]. Вместо исходной задачи (1.2) ставится релаксированная задача

$$u_c^* = \arg[\inf\{I_c(u): u \in V\}], \quad I_c(u) = \int_{\Omega} W_c(\varepsilon(u)) dx - L(u) \quad (4.1)$$

где W_c – нижняя выпуклая оболочка функции W (Γ – регуляризация или биполяра

[6, 14]):

$$W_c = \sup\{\Gamma: \Gamma \leq W, \Gamma - \text{аффинная}\}$$

В этом случае гарантируется существование решения релаксированной задачи (4.1) и выполнение соотношения

$$I_c(u_c^*) \leq \inf\{I(u): u \in V\} \quad (4.2)$$

Однако, в работе [14] приводится простой пример, показывающий некорректность такой регуляризации в случае потенциала матричного аргумента (т.е. строгость неравенства в (4.2)). По этой причине, в общем случае, ничего нельзя сказать о соотношении решения задачи (4.1) и минимизирующей последовательности для исходной задачи (1.2).

Другой метод регуляризации невыпуклой вариационной задачи основан на построении квазивыпуклой оболочки потенциала [14]. Становится следующая релаксированная задача

$$u_q^* = \arg\{\inf\{J_q(u): u \in V\}\}, \quad J_q(u) = \int_{\Omega} W_q(\epsilon(u))dx - L(u) \quad (4.3)$$

где W_q – нижняя квазивыпуклая оболочка функции W :

$$W_q = \sup\{\Gamma: \Gamma \leq W, \Gamma - \text{квазиаффинная}\}$$

Напомним, что Γ – квазиаффинная, если Γ и $(-\Gamma)$ – квазивыпуклые.

В этом случае гарантируется существование релаксированной задачи (4.3), выполнения соотношения

$$I_q(u_q^*) = \inf\{I(u): u \in V\} \quad (4.4)$$

а также слабая сходимость минимизирующей последовательности для исходной задачи (1.2) к решению задачи (4.3), которое естественно назвать обобщенным решением. В работе [14] доказывается это утверждение и приводится следующая его интерпретация: "слабая сходимость измеряет некоторый тип среднего, а среднее – это и есть то, что обычно измеряется в экспериментах". Необходимо добавить "... и должно наблюдаться в вычислительных экспериментах".

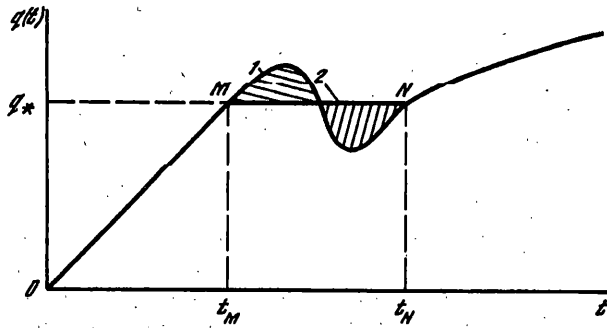
5. Регуляризация краевой задачи деформационной теории пластичности с немонотонной диаграммой состояния. Применим описанную технику к задаче деформационной теории пластичности с немонотонной диаграммой состояния (фиг. 1). Участок «неустойчивости» (MN) описывает переход материала из упругого в пластическое состояние (неравновесный фазовый переход [25]). В силу замечания 2.1 и эквивалентности всех видов выпуклости для потенциала деформационной теории пластичности ($W_q(A) \equiv W_c(A)$) необходимо построить нижнюю выпуклую оболочку скалярной функции $G(t)$ в выражении (3.7).

Согласно определению нижней выпуклой оболочки (или биполяры [6, 14]) функция $G_c(t)$ совпадает с $G(t)$ на участках выпуклости и является линейной на участках невыпуклости последней. В сочетании с требованием гладкости построение функции $G_c(t)$ сводится к удовлетворению простейшему геометрическому условию: касательные к функции $G(t)$ в точках t_M и t_N должны совпадать

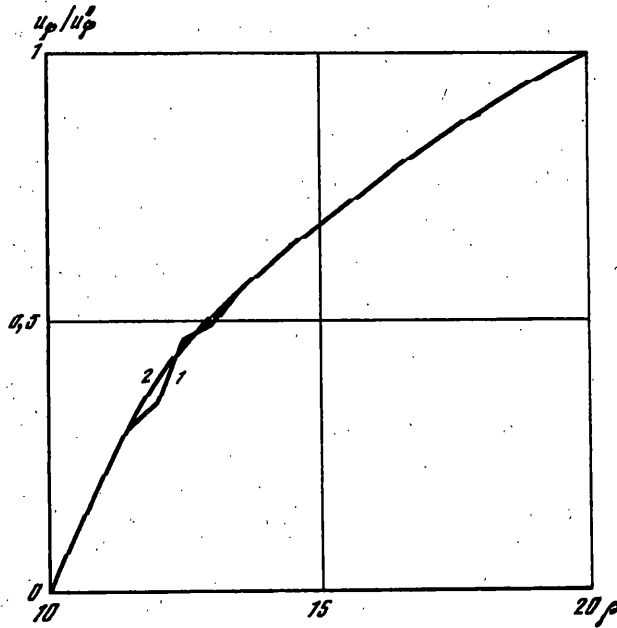
$$g_*(t - t_M) + G(t_M) = g_*(t - t_N) + G(t_N)$$

Отсюда и из определения функции $G(t)$ в (3.7) находим

$$g_* = \frac{1}{t_N - t_M} \int_{t_M}^{t_N} g(t) dt \quad (5.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, нижняя выпуклая оболочка потенциала деформационной теории пластичности с немонотонной материальной функцией имеет вид

$$W_c(\varepsilon) = \frac{1}{2} k_0 \text{tr}^2(\varepsilon) + \mu G_c(|\varepsilon^D|) \quad (5.2)$$

$$G_c(r) = 2 \int_0^r g_c(t) dt, \quad g_c(t) = \begin{cases} g(t), & t \notin [t_M, t_N] \\ g_*, & t \in [t_M, t_N] \end{cases}$$

где постоянная g_* находится по формуле (5.1).

На фиг. 1. представлены функции $g(t)$ – линией 1, $g_c(t)$ – линией 2. Из определения числа g_* следует, что заштрихованные области имеют равные площади. Отрезок MN функции $g_c(t)$ естественно назвать линией Максвелла по аналогии с теорией газа Ван-дер-Ваальса [14]. Последняя, как известно, описывает единым определяющим соотношением жидкое и газообразное состояние вещества, т.е. учитывает фазовый переход.

6. Вычислительные эксперименты. Численное исследование вариационной задачи (1.2) для невыпуклого потенциала проводилось на примере деформационной теории пластичности с кусочно-гладкой материальной функцией $g(t) = \varepsilon_* S(t / \varepsilon_*)$, имеющей

участок немонотонности («зуб пластичности»):

$$S(p) = \begin{cases} p, & 0 \leq p < 1 \\ 1 + Tq((p-1)/\Delta), & 1 \leq p \leq 1 + \Delta \\ \xi(p-1-\Delta) + 1, & p \geq 1 + \Delta \end{cases} \quad (6.1)$$

$$q(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq 4x < 1 \\ 2 - 4x, & 1 \leq 4x < 3 \\ 4x - 4, & 3 \leq 4x \leq 4 \end{cases}$$

где ϵ_* – предел упругости, $\Delta \in [0, +\infty)$ – относительная ширина зоны неустойчивости, $T \in [0, 1]$ – амплитуда зуба пластичности ($4T \leq \Delta$), $\xi \in (0, 1]$ – коэффициент линейного деформационного упрочнения.

После построения линии Максвелла по формуле (5.2) «осредненная» материальная функция $g_c(t) = \epsilon_* S_c(t/\epsilon_*)$ имеет вид

$$S_c(p) = \begin{cases} p, & 0 \leq p < 1 \\ 1, & 1 \leq p < 1 + \Delta \\ \xi(p-1-\Delta) + 1, & p \geq 1 + \Delta \end{cases} \quad (6.2)$$

Исследовалась краевая задача осесимметричного кинематического кручения длинной круглой трубы, закрепленной по внутренней поверхности, при отсутствии объемных сил. В работах [27, 28] эта задача рассматривалась для малоупрочняющихся материалов ($0 < \xi \leq 1$) без падающего участка на диаграмме состояния ($\Delta = 0$).

В рамках модели плоской деформации с учетом осевой симметрии вариационная задача (1.2) принимает вид

$$u_\phi = \arg[\inf\{I(u); u \in V\}], \quad I(u) = \int_a^b g \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{u}{\rho} \right) \right) \rho d\rho$$

$$V = \{u \in W^{1,2}(a, b); u(a) = 0, u(b) = u_\phi^0\} \quad (6.3)$$

В вычислительных экспериментах использовались следующие значения: $a = 10$, $b = 20$ (мм.), $\epsilon_* = 5 \cdot 10^{-3}$; $\xi = 0,1$; $\Delta = 2$; $T = 0,5$ (в относительных единицах), $u_\phi^0 = 2C_\phi$, $C_\phi = \epsilon_* b(1 - a^2/b^2)$ [27].

Дискретная модель задачи (6.3) строилась при помощи метода конечных элементов: радиус разбивался на M отрезков одинаковой длины, использовалась кусочно-линейная аппроксимация искомой функции. В качестве численных методов использовались метод адаптивной блочной релаксации с параметром декомпозиции $\omega = 0,5$ [27–29] и процедура простых итераций (метод переменных параметров упругости) [30].

Установлено, что при наличии падающего участка на диаграмме состояния оба численных метода не сходятся (зацикливаются). У глобальной матрицы жесткости зафиксированы отрицательные собственные числа, что, как известно, соответствует нарушению глобальной эллиптичности краевой задачи. При этом на границе пластической и упругой зон появляется область незатухающих осцилляций перемещения. Амплитуда этих осцилляций уменьшается с увеличением числа M дроблений радиуса. Однако при этом возрастает размерность дискретной задачи, а значит, и число обусловленности матрицы жесткости [28]. Поэтому начиная с $M \geq 50$ амплитуда осцилляций практически не убывает с ростом M . Обнаруженный эффект осцилляций перемещений полностью согласуется с известным фактом о высокой степени неравномерности пластической деформации на площадке текучести [26].

При использовании осредненной материальной функции (6.2) оба метода сходятся за 2–3 итерации. При этом решение выпуклой релаксированной задачи совпадает с решением исходной задачи в области регулярности и осредняет его в области осцилляций. На фиг. 2 показаны кривые для $M = 20$ дроблений: 1 – сингулярное «решение» после 1400 итераций, 2 – обобщенное решение релаксированной задачи. Расчет проводился с двойной точностью на IBM PC-486 DX2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Съярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
3. Вассидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
4. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов (в теории нелинейных уравнений). М.: Наука, 1972. 416 с.
5. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные задачи. М.: Мир, 1979. 400 с.
7. Morrey C.V. Quasiconvexity and the lower semicontinuity of multiple integrals // Pacific J. Math. 1952. V. 2. P. 25–63.
8. Acerbi E., Fusco N. Semicontinuity problems in the calculus of variations // Arch. Rational. Mech. Anal. 1984. V. 86. P. 125–145.
9. Ball J.M., Zhang K.-W. Lower semicontinuity of multiple integrals and the Biting lemma // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1990. V. 114. No. 3–4. P. 376–379.
10. Серегин Г.А. О корректности вариационных проблем механики идеально-упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 71–75.
11. Репин С.И. О решениях задач математической теории пластичности, содержащих разрывы полей перемещений // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 142–152.
12. Бригаднов И.А. О существовании предельной нагрузки в некоторых задачах гиперупругости // Изв. АН МТТ. 1993. № 5. С. 46–51.
13. Бригаднов И.А. Теоремы существования для краевых задач гиперупругости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 1. С. 3–16.
14. Дакоронья Б. Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу для нелинейных функционалов // УМН. 1989. Т. 44. № 4. С. 35–98.
15. Dacorogna V. Remarques sur les notions de polyconvexite, quasiconvexite et convexite de rang 1 // J. Math. pures et appl. 1985. V. 64. P. 403–438.
16. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
17. Ильюшин А.А. Пластичность. М. – Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
18. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: изд-во МГУ, 1986. 224 с.
19. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 206 с.
20. Шемякин Е.И. О свободном разрушении твердых тел. II // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 6. С. 1371–1373.
21. Panagiotopoulos P.D., Stavroulakis G.E. New types of variational principles based on the notion of quasidifferentiability // Acta meth. 1992. V. 94. No. 3–4. P. 171–194.
22. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
23. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
24. Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Ч. 2. Конечные деформации. М.: Наука, 1984. 431 с.
25. Васин Р.А., Еникеев Ф.У., Мазурский М.И. О материалах с падающей диаграммой // Изв. АН МТТ. 1995. № 2. С. 181–182.
26. Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. 196 с.
27. Бригаднов И.А., Репин С.И. О численном решении задач пластичности для малоупрочняющихся материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 72–77.
28. Бригаднов И.А. О численном решении краевых задач упругопластического течения // Изв. АН МТТ. 1992. № 3. С. 157–162.
29. Бригаднов И.А. Численное решение краевой задачи гиперупругости в приращениях // Изв. АН МТТ. 1994. № 6. С. 42–50.
30. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
27.11.1995