МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 531.383

© 1996 г. С.А. АГАФОНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТА

Исследуется устойчивость стационарного движения уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании. На ось внешнего карданова кольца действует момент вязкого трения и момент, представляющий собой функцию угла поворота внутреннего кольца. Анализ устойчивости проведен с указанием оценки области притяжения. Дан численный пример.

Отметим, что вынужденные колебания гироскопа в кардановом подвесе, когда на ось внутреннего кольца действует периодический момент и момент сил вязкого трения изучены в [1].

1. Уравнения движения. Рассматривается уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе, установленный на неподвижном основании. Ось внешнего карданова кольца горизонтальна, а поворот ее определяется углом α. Поворот внутреннего кольца характеризуется углом β, причем при значении $\beta = 0$ плоскости внешнего и внутреннего колец ортогональны.

Кинетическая энергия всей системы имеет вид [1]:

$$T = \tfrac{1}{2}(A_0 - C_0 \sin^2 \beta)\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{2} B_0 \dot{\beta}^2 + \tfrac{1}{2} C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)^2$$

$$A_0 = A + A_1 + A_2, \quad B_0 = A + B_1, \quad C_0 = A + A_1 - C_1$$

Здесь A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно его оси вращения; A_1, B_1, C_1 – моменты инерции внутреннего кольца относительно осей, связанных с этим кольцом; A, C – экваториальный и полярный моменты инерции ротора, а φ – угол его собственного вращения.

Пусть на ось внешнего карданова кольца действует момент вязкого трения с коэффициентом k и момент, представляющий собой функцию угла β $M_\alpha = -k\dot{\alpha} - f(\beta)$. Будем считать, что функция $f(\beta)$ удовлетворяет следующим условиям: $f(0) = 0$, $\beta f(\beta) > 0$, $f(\beta) \in C^1$. Дополнительные ограничения на класс функций $f(\beta)$ вводятся в дальнейшем по мере необходимости.

Уравнения движения с учетом момента M_α после исключения циклической координаты φ, можно привести к виду

$$(A_0 - C_0 \sin^2 \beta)\ddot{\alpha} - C_0 \sin 2\beta \dot{\alpha}\dot{\beta} + H\cos\beta\dot{\beta} + k\dot{\alpha} + f(\beta) = 0$$

$$B_0\ddot{\beta} + C_0 \sin\beta\cos\beta\dot{\alpha}^2 - H\cos\beta\dot{\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

где $H = C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)$ – циклическая постоянная.

Обозначим $\dot{\alpha} = x_1, \beta = x_2, \dot{\beta} = x_3$ и запишем уравнения (1.1) в нормальной форме Коши

$$\dot{x}_1 = \frac{C_0 \sin 2x_2}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2} x_1 x_3 - \frac{H\cos x_2}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2} x_3 - \frac{kx_1}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2} -$$

$$-\frac{f(x_2)}{A_0 - C_0\sin^2 x_2},\ \dot{x}_2 = x_3 \tag{1.2}$$

$$\dot{x}_3 = -C_0B_0^{-1}\sin x_2\cos x_2 x_1^2 + HB_0^{-1}\cos x_2 x_1$$

2. Анализ устойчивости и оценка области притяжения. Уравнения (1.2), очевидно, имеют решение

$$x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = 0 \tag{2.1}$$

при котором плоскости внешнего и внутреннего колец ортогональны. Примем это движение за невозмущенное и поставим задачу о его устойчивости. Рассмотрим сначала уравнения первого приближения ($f(x_2) = ax_2$):

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = -HA_0^{-1}x_3 - kA_0^{-1}x_1 - aA_0^{-1}x_2\\ \dot{x}_2 = x_3,\ \dot{x}_3 = HB_0^{-1}x_1\end{gathered} \tag{2.2}$$

Производная от функции

$$V = \frac{\mu aH}{2A_0B_0}x_2^2 + \frac{aH}{A_0B_0}x_2x_3 + \left(\frac{H^2}{2A_0B_0} + \frac{\mu k}{2A_0}\right)x_3^2 + \mu HB_0^{-1}x_1x_3 + \frac{H^2}{2B_0^2}x_1^2 \tag{2.3}$$

в силу системы уравнений (2.2) равна

$$\dot{V} = -\frac{H^2}{A_0}(k - A_0\mu)x_1^2 - \frac{H}{A_0B_0}(\mu H - a)x_3^2$$

При любом значении параметра μ из интервала $aH^{-1} < \mu < kA_0^{-1}$ функция $V > 0$, а $\dot{V} \leqslant 0$. Для того, чтобы этот выбор параметра μ был возможен, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$k > aA_0H^{-1} \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4) является условием асимптотической устойчивости стационарного движения (2.1), так как функция (2.3) удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина – Красовского.

Можно показать, что применение критерия Рауса – Гурвица приводит к такому же условию. Отсюда следует, что анализ устойчивости, проведенный с помощью функции (2.3), дает не только достаточное, но и необходимое условие асимптотической устойчивости. Отметим, что асимптотическая устойчивость стационарного движения достигается силами частичной диссипации, так как они действуют только в оси внешнего карданова кольца.

На основании теоремы Ляпунова эти результаты справедливы и для исходной, нелинейной системы (1.2). Однако в прикладном аспекте этой задачи одного анализа устойчивости недостаточно. Важно знать множество точек в фазовом пространстве, притягиваемых при $t \to \infty$ к стационарному движению (2.1). Это множество называется областью притяжения. Нахождение этой области представляет собой важную и в то же время трудную задачу. Сложность заключена в том, что область притяжения ограничена поверхностями, состоящими из целых траекторий [2]. Нахождение последних сводится к интегрированию уравнений движения. Эту трудность можно обойти, если ограничиться нахождением оценки этой области. Эта задача и решается ниже.

Рассмотрим функцию

$$V = \mu\int_0^{x_2} f_3(\xi)d\xi + x_3f_3(x_2) + \frac{1}{2}f_2(x_2)x_3^2 + \frac{\mu}{2}f_1(x_2)x_3^2 +$$

$$+\mu H B_0^{-1} x_1 x_3 \cos x_2 + \frac{H^2}{2B_0^2} x_1^2 \cos^2 x_2 \qquad (2.5)$$

$$f_1(x_2) = \frac{k}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2}, \quad f_2(x_2) = \frac{H^2 \cos^2 x_2}{B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)}$$

$$f_3(x_2) = \frac{H \cos x_2}{B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)} f(x_2).$$

В (2.5) $\mu > 0$ постоянный параметр. Производная $\dot{V}$, вычисленная в силу уравнений (1.2) приводится к виду

$$\dot{V} = -\Phi_1 x_1^2 - \Phi_2 x_3^2 \qquad (2.6)$$

$$\Phi_1 = \frac{H^2 \cos^2 x_2}{B_0^2}\left(\frac{k}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2} - \mu\right) + \frac{C_0 H \cos^2 x_2 \sin x_2}{B_0^2(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)} f(x_2) +$$

$$+\frac{\mu H C_0}{B_0^2} \sin x_2 \cos^2 x_2 x_1 + \frac{\mu k B_0 C_0 + (A_0 - C_0) H^2}{B_0^2 (A_0 - C_0 \sin^2 x_2)} \sin x_2 \cos x_2 x_3$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu H^2 \cos^2 x_2}{B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)} - \frac{H \cos x_2 f'(x_2)}{B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)} + \frac{H(A_0 - C_0 - C_0 \cos^2 x_2)\sin x_2}{B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)^2} f(x_2) +$$

$$+\frac{\mu H(A_0 - C_0 - C_0 \cos^2 x_2)\sin x_2}{B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)} x_1 + \frac{[(A_0 - C_0)H^2 - \mu k B_0 C_0]\sin 2x_2}{2B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)^2} x_3$$

Запишем функцию V в виде

$$V = V_1 + \frac{\mu}{2}(f_1 - \mu)x_3^2 + \frac{1}{2}(\mu x_3 + H B_0^{-1} \cos x_2 x_1)^2$$

$$V_1 = \mu\left[\sqrt{F(x_2)} + \frac{x_3 f_3(x_2)}{2\mu\sqrt{F(x_2)}}\right]^2 + \frac{1}{2\mu}\left[\mu f_2(x_2) - \frac{f_3^2(x_2)}{2F(x_2)}\right] x_3^2, \quad F(x_2) = \int_0^{x_2} f_3(\xi) d\xi$$

Предположим, что $f(x_2)$ такова, что существует конечный предел $w = \lim f(x_2)(\int_0^{x_2} f(\xi)d\xi)^{-1/2}$ при $x_2 \to 0$. Тогда можно определить по непрерывности $V_1(0, 0) = 0$. Зададимся числом $0 < x_2^* < \pi/2$ и будем считать, что значения переменной x_2 заключены в промежутке $|x_2| \leqslant x_2^*$.

Функция (2.5) является определенно-положительной при выполнении неравенств

$$\mu < f_1(x_2), \quad \mu f_2(x_2) - f_3^2(x_2)/2F(x_2) > 0$$

которые можно записать в форме

$$\mu < \frac{k}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2}, \quad \mu H - f^2(x_2)\left[2(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)\int_0^{x_2} \frac{\cos\xi f(\xi)}{A_0 - C_0 \sin^2 \xi} d\xi\right]^{-1} > 0 \qquad (2.7)$$

Неравенства (2.7) заведомо выполняются, если параметр μ изменяется в пределах

$$M H^{-1} < \mu < k A_0^{-1} \qquad (2.8)$$

$$M = \max_{|x_2| \leqslant x_2^*} f^2(x_2)\left[2(A_0 - C_0 \sin^2 x_2)\int_0^{x_2} \frac{\cos\xi f(\xi)}{A_0 - C_0 \sin^2 \xi} d\xi\right]^{-1}.$$

Из (2.8) получим условие определенной положительности функции V

$$k > MA_0H^{-1} \tag{2.9}$$

Параметр μ любой из интервала (2.8). Заметим, что в линейном приближении, когда $f(x_2) = ax_2$ неравенство (2.9) совпадает с (2.4) ($M = a$).

Обратимся теперь к выражению для $\dot{V}$ (2.6). При оценке снизу функции Φ_1 второе слагаемое отбрасывается, так как оно принимает неотрицательные значения. Учитывая, что

$$\sin x_2 \cos^2 x_2 \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad \frac{\sin x_2 \cos x_2}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{A_0(A_0 - C_0)}}$$

и используя неравенство Коши – Буняковского, имеем

$$\Phi_1 > \frac{H^2 \cos^2 x_2^*}{B_0^2}(kA_0^{-1} - \mu) - \left[\frac{2\mu HC_0}{3\sqrt{3}B_0^2}|x_1| + \frac{\mu kB_0C_0 + (A_0 - C_0)H^2}{2B_0^2\sqrt{A_0(A_0 - C_0)}}|x_3|\right] \geqslant \tag{2.10}$$

$$\geqslant \frac{H^2 \cos^2 x_2^*}{B_0^2}(kA_0^{-1} - \mu) - \left[\frac{4\mu^2 H^2 C_0^2}{27B_0^4} + \frac{(\mu kB_0C_0 + (A_0 - C_0)H^2)^2}{4B_0^4 A_0(A_0 - C_0)}\right]^{1/2}(x_1^2 + x_3^2)^{1/2} > 0$$

Из неравенств (2.10) получим

$$x_1^2 + x_3^2 < R_1^2, \quad R_1^2 = D_1 / D_2 \tag{2.11}$$

$$D_1 = 108A_0(A_0 - C_0)H^4 \cos^4 x_2^*(kA_0^{-1} - \mu)^2$$

$$D_2 = 16\mu^2 A_0(A_0 - C_0)H^2C_0^2 + 27[\mu kB_0C_0 + (A_0 - C_0)H^2]^2$$

При оценке снизу Φ_2 отбрасывается третье слагаемое, принимающее неотрицательные значения, так как для реально существующих приборов $A_0 \geqslant 2C_0$. Кроме того, обозначим

$$m = \max_{|x_2| \leqslant x_2^*}\left|\frac{\cos x_2 f'(x_2)}{A_0 - C_0 \sin^2 x_2}\right|$$

Тогда будем иметь

$$\Phi_1 > \frac{H}{A_0B_0}(\mu H \cos^2 x_2^* - A_0 m) - \frac{\mu H(A_0 - C_0 - C_0 \cos^2 x_2^*)\sin x_2^*}{B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2^*)}|x_1| -$$

$$- \frac{|(A_0 - C_0)H^2 - \mu kB_0C_0|}{2B_0(A_0 - C_0 \sin^2 x_2^*)^2}|x_3| \geqslant \frac{H}{A_0B_0}(\mu H \cos^2 x_2^* - A_0 m) -$$

$$- \left[\frac{\mu^2 H^2 (A_0 - C_0 - C_0\cos^2 x_2^*)^2 \sin^2 x_2^*}{B_0^2(A_0 - C_0 \sin^2 x_2^*)^2} + \frac{((A_0 - C_0)H^2 - \mu kB_0C_0)^2}{4B_0^2(A_0 - C_0 \sin^2 x_2^*)^4}\right]^{1/2}(x_1^2 + x_3^2)^{1/2} > 0$$

Из последнего неравенства получим

$$x_1^2 + x_3^2 < R_2^2, \quad R_2^2 = E_1 / E_2$$

$$E_1 = 4H^2(\mu H \cos^2 x_2^* - mA_0)^2(A_0 - C_0 \sin^2 x_2^*)^4 \tag{2.12}$$

$$E_2 = A_0^2[4\mu^2 H^2(A_0 - C_0 - C_0\cos^2 x_2^*)^2(A_0 - C_0 \sin^2 x_2^*)^2 \sin^2 x_2^* +$$

$$+ ((A_0 - C_0)H^2 - \mu kB_0C_0)^2]$$

Из неравенств $\Phi_1 > 0$, $\Phi_2 > 0$ следует, что параметр μ изменяется в пределах

$$\frac{A_0 m}{H\cos^2 x_2^*} < \mu < kA_0^{-1} \tag{2.13}$$

Сравнивая с неравенствами (2.8), получим

$$pH^{-1} < \mu < kA_0^{-1}, \quad p = \max\left(M, \frac{A_0 m}{\cos^2 x_2^*}\right) \tag{2.14}$$

Если переменные x_1, x_1, x_3 принадлежат области

$$|x_2| \leqslant x_2^*, \;\; x_1^2 + x_3^2 < R^2, \;\; R^2 = \min(R_1^2, R_2^2) \tag{2.15}$$

и выполнено неравенство

$$k > pA_0H^{-1} \tag{2.16}$$

то $V > 0$, а $\dot V \leqslant 0$, причем множество $\dot V = 0$ не содержит целых траекторий в силу условия $x_2 f(x_2) > 0$ при $x_2 \neq 0$.

В линейной постановке, когда $f(x_2) = ax_2$ неравенство (2.16) совпадает с (2.4), так как $p = M = A_0 m = a$. Параметр μ входит в выражения для R_1 и R_2, поэтому его выбор из интервала (2.14) диктуется необходимостью получения наибольших значений R_1 и R_2. Эта задача здесь не рассматривается.

3. Численный пример. Рассмотрим прибор, имеющий следующие параметры [3]: $A = 2$ гсмс^2, $C = 3{,}3$ гсмс^2, $A_1 = B_1 = 2{,}2$ гсмс^2, $C_1 = 2{,}8$ гсмс^2, $A_2 = 8{,}5$ гсмс^2, $H = 10^4$ гсмс.

Функция $f(x_2) = a\sin x_2$, $a = 10^2$ гсм. При таком выборе $f(x_2)$: $\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_2)\times$

$\times\left(\int\limits_0^{x_2} f(\xi)d\xi\right)^{-1/2} = (2a)^{1/2}$, $A_0 = 12{,}7$ гсмс, $B_0 = 4{,}2$ гсмс^2, $C_0 = 1{,}4$ гсмс^2.

Перейдем к оценке области притяжения. Для этого необходимо задать x_2^*. Примем $x_2^* = \pi/6$ и найдем m и M. Так как $f'(x_2) = a\cos x_2$, то

$$m = \max_{|x_2|\leqslant\pi/6} \frac{a\cos^2 x_2}{A_0 - C_0\sin^2 x_2} = aA_0^{-1} = 7{,}874 \;\; \text{сек}^{-2}$$

$$M = \max_{|x_2|\leqslant\pi/6} \frac{a^2\sin^2 x_2}{2(A_0 - C_0\sin^2 x_2)}\left[\int\limits_0^{x_2} \frac{a\cos\xi\sin\xi}{A_0 - C_0\sin^2\xi}d\xi\right]^{-1} =$$

$$= \max_{|x_2|\leqslant\pi/6} \frac{aC_0\sin^2 x_2}{(A_0 - C_0\sin^2 x_2)}\left[\ln\frac{A_0}{A_0 - C_0\sin^2 x_2}\right]^{-1} =$$

$$= \frac{aC_0\sin^2 x_2^*}{A_0 - C_0\sin^2 x_2^*}\left[\ln\frac{A_0}{A_0 - C_0\sin^2 x_2^*}\right]^{-1} = 101{,}41 \text{ гсм}$$

Тогда $p \leq 133{,}33$ гсм, а неравенство (2.16) принимает вид $k > 0{,}169$ гсмс. Выберем $k = 0{,}4$ гсмс. Параметр μ изменяется в пределах $0{,}013\ с^{-1} < \mu < 0{,}031\ с^{-1}$. Примем $\mu = 0{,}02\ с^{-1}$. Вычисления по формулам (2.11), (2.12) дают значения $R_1 = 0{,}018\ с^{-1}$, $R_2 = 0{,}024\ с^{-1}$. Следовательно, $R = R_1 = 0{,}018\ с^{-1}$, а область притяжения $|x_2| \leqslant \pi/6$, $x_1^2 + x_3^2 < R^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
2. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
3. *Климов Д.М., Харламов С.А.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе. М.: Наука, 1978. 208 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.II.1995