

УДК 531.53

©1996 г. П.С. ЛАНДА

О ВОЗМОЖНОМ МЕХАНИЗМЕ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ В КВАЗИКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

На примере двух связанных маятников показано, что некоторые из нормальных колебаний могут затухать существенно быстрее других. Это приводит к видимой синхронизации колебаний маятников.

Прочность и надежность работы многих систем зависит от характера совершаемых ими движений. Обычно предполагается, что степень сложности движения тем больше, чем больше степеней свободы имеет система. Правда, в активных, даже очень сложных системах, часто возникают простые движения за счет так называемого явления синхронизации [1–4]. В настоящей работе на простом примере показано, что синхронизация в смысле совпадения частот колебаний возможна и в некоторых пассивных системах с малой диссипацией. Важно, правда, отметить, что механизм синхронизации здесь отличается от соответствующего механизма для автоколебательных систем: здесь не происходит подтягивания частот парциальных систем друг к другу, а просто колебания одной частоты затухают существенно быстрее, чем другой. Тот факт, что различные формы нормальных колебаний могут затухать с различной скоростью, вообще говоря, давно известен. Например, он проявляется в том, что при возбуждении собственных колебаний балки спустя некоторое время остаются колебания на основной частоте, которые медленнее всего затухают. Тем не менее, до сих пор синхронизация колебаний, наблюдаемая в некоторых пассивных системах, с этим явлением не связывалась.

В качестве примера рассмотрим устройство, предложенное Б.П. Лавровым в Институте «Механобр» (г. Санкт-Петербург) как раз для демонстрации явления синхронизации. Схема устройства изображена на фиг. 1. Два шарика одинаковой массы m подвешены при помощи нитей различной длины (l_1 и l_2) на планке массы M_0 симметрично относительно ее центра тяжести. Планка, с свою очередь, подвешена к жесткому кронштейну на достаточно мягких пружинах жесткости c . Эксперимент показывает, что если отклонить маятники на некоторые углы в одной плоскости, то после короткого переходного процесса, имеющего довольно сложный характер, устанавливается режим противофазных колебаний с одинаковой частотой, но разными амплитудами, который существует в течение длительного времени.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \sin \varphi_1 + \ddot{x}_1^{-1} \cos \varphi_1 + \ddot{y}_1^{-1} \sin \varphi_1 + \\ + al_1^{-1} (\ddot{\psi} \sin(\varphi - \varphi_1) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \varphi_1)) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2 \sin \varphi_2 + \ddot{x}_2^{-1} \cos \varphi_2 + \ddot{y}_2^{-1} \sin \varphi_2 - \\ - al_2^{-1} (\ddot{\psi} \sin(\varphi - \varphi_2) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \varphi_2)) = 0 \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = -ml_1 M^{-1}(\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1) - ml_2 M^{-1}(\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2) \quad (2)$$

$$\ddot{y} = -ml_1 M^{-1}(\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1) - ml_2 M^{-1}(\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2)$$

$$\ddot{\varphi} = -mal_1 I^{-1}(\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi - \varphi_1) - \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi - \varphi_1)) + \\ + mal_2 I^{-1}(\ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi - \varphi_2) - \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi - \varphi_2)), \quad (3)$$

где x и y – отклонения центра масс планки от положения равновесия в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно, φ – угол поворота планки относительно оси, проходящей через центр масс, отсчитываемый от горизонтали против часовой стрелки, φ_1 и φ_2 – углы поворота маятников, отсчитываемые от вертикали против часовой стрелки, $M = M_0 + 2m$, $l = l_0 + 2ma^2$, I_0 – момент инерции планки относительно оси, проходящей через центр масс, a – расстояние от центра планки до точки подвеса маятника, $\omega_{1,2} = \sqrt{g/l_{1,2}}$. При выводе уравнений (1)–(3) мы пренебрегли потенциальной энергией пружин с жесткостью c , считая ее малой.

Подставив (2) в уравнения (1), получим

$$(1 - mM^{-1})\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \sin \varphi_1 - ml_2 M^{-1} l_1^{-1}(\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) + al_1^{-1}(\ddot{\varphi} \sin(\varphi - \varphi_1) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \varphi_1)) = 0 \quad (4)$$

$$(1 - mM^{-1})\ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2 \sin \varphi_2 - ml_1 M^{-1} l_2^{-1}(\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \\ - \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) - al_2^{-1}(\ddot{\varphi} \sin(\varphi - \varphi_2) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \varphi_2)) = 0$$

Уравнения (4) совместно с (3) образуют замкнутую систему. Нормальные формы колебаний для этой системы можно найти аналитически только в частном случае одинаковых маятников, когда $l_1 = l_2 = l$. Эти формы следующие: $\varphi_1 = \varphi_2 = \psi$, $\varphi = 0$ и $\varphi_1 = -\varphi_2 = \vartheta$, $\varphi = 0$, где ψ и ϑ удовлетворяют уравнениям

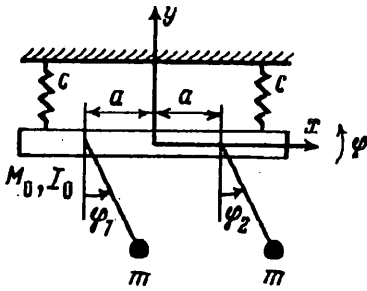
$$(1 - 2mM^{-1})\ddot{\psi} + \omega_0^2 \sin \psi = 0 \quad (5)$$

$$(1 - 2mM^{-1} \sin^2 \vartheta)\ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \sin \vartheta - mM^{-1} \dot{\vartheta}^2 \sin 2\vartheta = 0$$

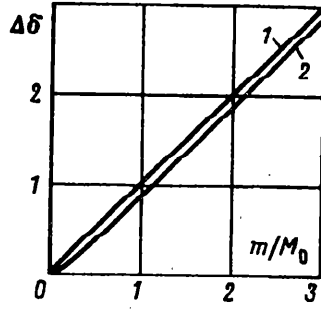
$\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – собственная частота колебаний маятников. Первая форма соответствует синфазным колебаниям маятников, а вторая – противофазным. Из (5) следует, что частота малых противофазных колебаний совпадает с ω_0 , а частота синфазных колебаний больше ω_0 . Из уравнений (2) находим смещения планки x и y : $x = -2(ml/M) \sin \psi$, $y = 2(ml/M) \cos \psi$ для синфазных колебаний и $x = 0$, $y = 2(ml/M) \cos \vartheta$ для противофазных колебаний.

Чтобы объяснить, по крайней мере качественно, результаты эксперимента Б.П. Лаврова, рассмотрим случай малых колебаний, когда уравнения (4) принимают вид

$$\left(1 - \frac{m}{M}\right)\ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2 \varphi_1 - \frac{m\omega_1^2}{M\omega_2^2} \ddot{\varphi}_2 = 0, \quad \left(1 - \frac{m}{M}\right)\ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2 \varphi_2 - \frac{m\omega_2^2}{M\omega_1^2} \ddot{\varphi}_1 = 0 \quad (6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В рассматриваемом приближении уравнения (6) не зависят от φ . Полагая $\varphi_2 = k\varphi_1$, из условия совместности уравнений (6) получаем следующее уравнение для коэффициента k :

$$\left(1 - \frac{m}{M}\right)k\omega_1^2 - \frac{m}{M}\omega_2^2 = k\left(\omega_2^2\left(1 - \frac{m}{M}\right) - \frac{m}{M}k\omega_1^2\right) \quad (7)$$

Уравнение (7) имеет два корня

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1\right)\left(\frac{M}{m} - 1\right) \pm \left(\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} - 1\right)^2\left(\frac{M}{m} - 1\right)^2 + \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)^{1/2}$$

Первый корень соответствует синфазным колебаниям, а второй – противофазным (мы полагаем, что $l_1 > l_2$, т.е. $\omega_1 < \omega_2$). Частоты синфазных и противофазных нормальных колебаний соответственно равны

$$\tilde{\omega}_{1,2} = \left(\frac{(1-\mu)(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(1-2\mu)(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \mu^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}}{2(1-2\mu)}\right)^{1/2} \quad (8)$$

где $\mu = m/M$. Отсюда видно, что частота синфазных колебаний, как и в рассмотренном ранее случае, больше, чем противофазных.

Покажем, что при учете затухания синфазные колебания маятников будут затухать существенно быстрее, чем противофазные. В линейном приближении с учетом затухания система уравнений (1)–(3) принимает вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + 2\alpha\dot{\varphi}_1 + \omega_1^2\varphi_1 + \dot{x}l_1^{-1} &= 0, & \ddot{\varphi}_2 + 2\alpha\dot{\varphi}_2 + \omega_2^2\varphi_2 + \dot{x}l_2^{-1} &= 0 \\ \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \mu(l_1\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

где α и β – коэффициенты затухания маятников и планки соответственно (ради простоты полагаем коэффициенты затухания маятников одинаковыми).

Характеристическое уравнение для системы (9) следующее:

$$(p + 2\beta)(p^2 + 2\alpha p + \omega_1^2)(p^2 + 2\alpha p + \omega_2^2) - \mu p^3(2p^2 + 4\alpha p + \omega_1^2 + \omega_2^2) = 0 \quad (10)$$

Считая затухание колебаний достаточно малым, решение уравнения (10) можно искать в виде $p_{1,2} = i\tilde{\omega}_{1,2} + \delta_{1,2}$ и $\tilde{\omega}_{1,2}$ – частоты нормальных колебаний, определяемые формулой (8), $\delta_{1,2} \ll \omega_{1,2}$ – декременты затухания. В первом приближении находим

$$\delta_{1,2} = -\frac{\alpha(1-\mu) + \beta\mu}{1-2\mu} - \frac{\mu_2}{1-2\mu} \frac{(\alpha + \beta)(\omega_1^2 + \omega_2^2)\tilde{\omega}_{1,2}^2}{(1-\mu)(\omega_1^2 + \omega_2^2)\tilde{\omega}_{1,2}^2 - 2\omega_1^2\omega_2^2} \quad (11)$$

Из (11) и (8) нетрудно вычислить разность декрементов затухания для синфазных и противофазных колебаний

$$|\delta_1| - |\delta_2| = \frac{2\mu^2(\alpha + \beta)(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{(1 - \mu)^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\mu^2\omega_1^2\omega_2^2}(\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2) \quad (12)$$

Так как $\tilde{\omega}_1 > \tilde{\omega}_2$, то из (12) следует, что декремент затухания для синфазных колебаний всегда больше, чем для противофазных, т.е. синфазные колебания затухают быстрее, чем противофазные. Этим можно объяснить результаты описанного выше эксперимента. Заметим, что разница между декрементами затухания синфазных и противофазных колебаний тем больше, чем больше отношение массы шариков m к массе планки M_0 . Это видно из фиг. 2, где приведены зависимости $\Delta\delta = (|\delta_1| - |\delta_2|) / 2(\alpha + \beta)$ от отношения масс m/M_0 для случаев примерно одинаковых длин маятников (кривая 1) и существенно различных (кривая 2 построена для $\omega_2^2 = 2\omega_1^2$). Заметим, что разность $|\delta_1| - |\delta_2|$ слабо зависит от отношения частот ω_1/ω_2 .

В заключение заметим, что полученные результаты позволяют высказать гипотезу о том, что именно неравномерное затухание различных нормальных колебаний является причиной выделения солитонов в квазиконсервативных сплошных средах. Эта гипотеза вполне соответствует описанию наблюдения солитона его первооткрывателем Скоттом – Расселом [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1980. 352 с.
2. Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization of oscillations in coupled self-oscillating systems // Appl. Mech. Rev. 1993. V. 46. No. 7. P. 414–426.
3. Blekhmann I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization phenomena in oscillatory and rotatory dynamical systems. In: Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results, ed. by J. Awrejcewicz. Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 17–54.
4. Blekhmann I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // Appl. Mech. Rev. 1995. V. 48. No. 11. P. 733–752.
5. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. Радио, 1977. 400 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.IV.1995