МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 531.355

 С.М. РАМОДАНОВ

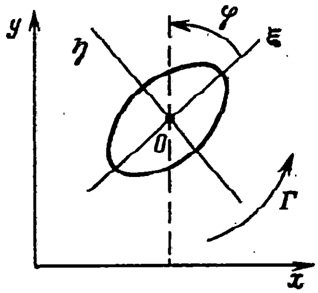
О ВЛИЯНИИ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ХАРАКТЕР ПАДЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ

В [1] была рассмотрена задача о падении тяжелого твердого тела в бесконечном объеме идеальной жидкости, совершающей плоскопараллельное безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что образующие цилиндрического тела ортогональны плоскости потока. Согласно теореме Лагранжа, циркуляция Г жидкости вокруг цилиндра постоянна и она предполагалась равной нулю. С телом связана система отсчета $O\xi\eta\zeta$ (ось s ортогональна плоскости рисунка) (фиг. 1). В [1] детально исследован случай, когда присоединенные массы тела, соответствующие поступательным движениям вдоль осей ξ и η, совпадают. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая движение твердого тела, проинтегрирована в эллиптических функциях. Эта же задача для случая различных присоединенных масс, исследована в [2]. В частности, было доказано, что асимптотически траектория тела является параболой и что для почти всех начальных данных при $t \to \infty$ тело стремится занять такое положение, при котором его широкая сторона горизонтальна. В [3] эта же задача исследована для случая, когда циркуляция $\Gamma \neq 0$, что приводит к появлению подъемной силы Жуковского. Найдены все стационарные движения твердого тела и исследована их устойчивость, указаны некоторые точные частные решения. Следует отметить, что системы дифференциальных уравнений Кирхгофа в [2, 3] проинтегрировать в квадратурах не удалось.

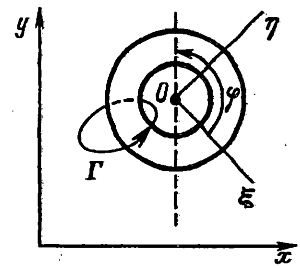
Публикуемая работа дополняет результаты [3]. Рассматривается также задача о падении тела с отверстием (частный случай разобран, например, в [4] § 133), когда одна из его плоскостей симметрии остается вертикальной во время движения. Наличие отверстия приводит к возможности циркуляционного обтекания, что создает дополнительные силы и моменты, действующие на тело. Без учета циркуляции задачи о падении тела с отверстиями и о падении цилиндра представляют собой по существу одну и ту же задачу плоской гидродинамики, которая рассмотрена в [2]. Однако, из-за разницы в топологии циркуляционного обтекания (фиг. 1, 2), введение циркуляции приводит в этих двух задачах к качественно различным эффектам. В частности доказано, что ордината точки O (фиг. 1) является ограниченной функцией времени (тело никогда «не падает»); для тела с отверстием получено, что в случае гидродинамической симметрии (присоединенные массы, соответствующие поступательным движениям вдоль осей ξ и η равны), тело стремится занять такое положение, что циркуляционный вектор направлен вниз.

1. Падение цилиндрического тела. Согласно [3] рассмотрим задачу о падении тяжелого цилиндрического твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей вихревое движение и покоящейся на бесконечности. Предполагается, что образующие цилиндрического тела ортогональны плоскости потока. Рассматриваемая задача по существу является задачей плоской гидродинамики.

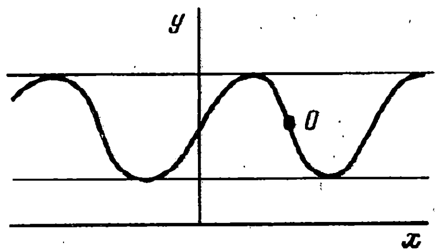
Положение тела определяется тремя параметрами. Пусть x, y – декартовы координаты некоторой точки тела O в плоскости потока жидкости (ось x горизонтальна, ось y направлена вверх, φ – угол поворота тела (фиг. 1)). С телом связана система отсчета $O\xi\eta\zeta$ (ось s ортогональна плоскости потока). Пусть uv – проекции скорости точки O на оси ξ, η; ω – угловая скорость тела. Постоянные коэффициенты a_1, a_2, включают в себя присоединенные массы и присоединенный момент инерции твердого тела. Будем предполагать, что $a_2 > a_1$. Поскольку угол φ отсчитывается против часовой стрелки, то $\omega = -\dot{\varphi}$. Уравнения движения твердого тела в жидкости



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

можно представить в виде уравнений Кирхгофа ([4], § 134):

$$
\begin{aligned}
& a_1\dot{u} + a_2 v\,\dot{\varphi} + \lambda v = -p\cos\varphi \\
& a_2\dot{v} - a_1 u\,\dot{\varphi} - \lambda u = -p\sin\varphi \\
& b\ddot{\varphi} + (a_1 - a_2)uv = M \\
& M = p(\zeta\sin\varphi - \eta\cos\varphi), \quad \lambda = \rho\Gamma
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь p – вес системы «тело – жидкость», M – суммарный момент веса тела и силы Архимеда относительно оси ζ, ρ – плотность жидкости, Γ – циркуляция вокруг тела. Если тело однородно, то ξ, η – декартовы координаты его центра масс. Эти уравнения можно трактовать как классические уравнения Кирхгофа, описывающие движение твердого тела в жидкости без циркуляции, но только на тело действует дополнительная сила $F = (-\lambda v\ \lambda u)$, и ее линия действия проходит через точку O. Скорость точки O находится из очевидных соотношений:

$$\dot{x} = u\sin\varphi - v\cos\varphi, \quad \dot{y} = u\cos\varphi + v\sin\varphi \tag{1.2}$$

Система уравнений (1.1) и (1.2) имеет три интеграла

$$
\begin{aligned}
& H = \tfrac{1}{2}(a_1u^2 + a_2v^2 + b\omega^2) + p(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi) + py \\
& \Phi = a_1u\sin\varphi - a_2v\cos\varphi + \lambda y \\
& \Phi_1 = a_1u\cos\varphi + a_2v\sin\varphi - \lambda x + pt
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Первый из них выражает постоянство полной энергии системы «тело + жидкость» (без учета циркуляционного обтекания).

Таким образом, наличие циркуляции, как видно из (1.1), привело к появлению в уравнениях движения линейных слагаемых по u и v, а также интеграла $G = H - p\Phi/\lambda$, зависящего только от u, v, ω, φ. Докажем, что система (1.1) имеет два независимых семейства периодических решений. Для этого приведем (1.1) к системе, к которой применима известная теорема Ляпунова о голоморфном интеграле (см., например, [5]). Будем считать, что тело однородно ($\xi = \eta = 0$). В системе (1.1) сделаем замену $v = (V - p)/\lambda$ и линеаризуем ее по V, u, ω, φ. Тогда получим

$$a_1\dot{u} + (p/\lambda)\omega + V = 0, \quad b\dot{\omega} + (1/\lambda)p(a_1 - a_2)u = 0$$

$$(a_2/\lambda)\dot{V} - \lambda u = -p\varphi, \quad \dot{\varphi} = -\omega$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$\mu^4 + A\mu^2 + B = 0, \quad A = \frac{\lambda^2}{a_1 a_2} - \frac{a_2 p^2(a_1 - a_2)}{\lambda^2 a_1 b}$$

$$B = p^2(a_2 - a_1)/(a_1 a_2 b)$$

Так как $a_2 > a_1$, то это уравнение имеет две пары чисто мнимых корней: $\pm i\mu_1$, $\pm i\mu_2$(μ_i – действительные, положительные числа). Будем рассматривать, как наиболее типичную ситуацию, случай отсутствия резонансов, т.е. $\mu_1 \neq n\mu_2$, $\mu_2 \neq m\mu_1$; m, $n \in Z$. Это равносильно тому, что $A/B \neq (k + 1/k)^2$, где $k \in Z$. Докажем, например, существование периодических решений с частотой μ_1. Введем новые переменные u_1, v_1, ω_1, φ_1 по формулам

$$u_1 = \lambda p\varphi - \mu_1^2 a_1 a_2 u, \quad \omega_1 = \omega + c\mu_1 v_1$$

$$v_1 = -\mu_1 a_2 V + \frac{\lambda p}{\mu_1}\left(\frac{a_2^2\mu_1^2}{\lambda^2} - 1\right), \quad \varphi_1 = \varphi - cu_1$$

$$c = \varkappa/(\mu_1^2 + \varkappa\lambda p), \quad \varkappa = (a_1 - a_2)p/(a_1 a_2 \lambda b \mu_1^2)$$

В новых переменных система (1.1) и интеграл G примут вид

$$\dot{u}_1 = -\mu_1 v_1 + \ldots, \quad \dot{\omega}_1 = \varkappa\lambda p\varphi_1 + \ldots$$

$$\dot{v}_1 = \mu_1 u_1 + \ldots, \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \ldots$$

$$G = (v_1^2 + u_1^2 + B(\varphi_1, \ \omega_1) + S(v_1, \ u_1, \ \varphi_1, \ \omega_1))d$$

$$d = \text{const} \neq 0$$

Здесь многоточия обозначают слагаемые более высоких степеней по u_1, v_1, ω_1, φ_1; B (φ_1, ω_1) – квадратичная форма по φ_1, ω_1; S (v_1, u_1, φ_1, ω_1) – слагаемые третьего порядка по указанным переменным. Согласно теореме Ляпунова о голоморфном интеграле, данная система обладает однопараметрическим семейством периодических решений периода $2\pi/\mu_1$ в окрестности нулевого решения. В первом приближении по малому параметру ε получим

$$u_1 = \varepsilon\cos\mu_1 t, \ v_1 = \varepsilon\sin\mu_1 t, \ \varphi_1 = 0, \ \omega_1 = 0$$

Возвращаясь к старым переменным, будем иметь

$$u = \varepsilon\frac{1 - c\lambda p}{\mu_1^2 a_1 a_2}\cos\mu_1 t, \quad v = -\frac{p}{\lambda} - \frac{\varepsilon(1 + c\mu_1)\sin\mu_1 t}{\lambda\mu_1 a_2} \tag{1.4}$$

$$\varphi = \varepsilon\cos\mu_1 t$$

Выясним теперь качественную картину движения тела, отвечающую полученным периодическим решениям. Для этого выразим из (1.3) x, y и подставим в полученные выражения решения (1.4):

$$x = pt/\lambda + f(t), \quad y = \psi(t)$$

где $f(t)$ и $\psi(t)$ – периодические функции времени. Из (1.2) следует, что $\dot{x} = p/\lambda + O(\varepsilon^2)$. Если ε – достаточно мало, то $\dot{x}$ – не меняет знак в процессе движения и траектория тела представляет собой горизонтально расположенную «синусоиду» (фиг. 3).

Оказывается, качественная картина тела остается, в определенном смысле, такой же для любых начальных данных. Это может быть получено из следующих простых соображений. Рассмотрим для этого еще раз связку интегралов (1.3):

$$G = H - \frac{p}{\lambda}\Phi = \frac{a_1}{2}\left(u - \frac{p}{\lambda}\sin\varphi\right)^2 + \frac{a_2}{2}\left(v + \frac{p}{\lambda}\cos\varphi\right)^2 + \frac{b}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{p^2(a_2 - a_1)}{\lambda^2}g(\varphi)$$

$$g(\varphi) = \beta\sin\varphi - \alpha\cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi$$

$$\alpha = -\xi\lambda^2/(p(a_2 - a_1)); \quad \beta = \eta\lambda^2/(p(a_2 - a_1))$$

Отсюда можно заключить, что u и v – ограниченные функции. Воспользовавшись (1.3), получим

$$x = pt/\lambda + O(1), \quad y = O(1)$$

Итак, благодаря циркуляции тело в процессе движения остается в полосе конечной ширины, параллельной оси x, причем его средняя скорость равна p/λ.

Траектория точки O тела описывается формулами (1.6).

2. Случай тела с отверстием. Рассмотрим теперь задачу о падении тела с отверстием в бесконечном объеме идеальной, несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности. Будем предполагать, что тело имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии. Свяжем с телом систему координат $O\xi\eta$ (ось ζ ортогональна плоскости рисунка) (фиг. 2). Пусть Y вектор скорости тела с компонентами (u, v, w) в системе координат $O\xi\eta\zeta$. Аналогичные обозначения введем для угловой скорости ω $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Пусть

$$T = \tfrac{1}{2}(a_1u^2 + a_2v^2 + a_3w^2 + b_1\omega_1^2 + b_2\omega_2^2 + b_3\omega_3^2)$$

кинетическая энергия системы «тело – жидкость» (без учета энергии циркуляционного обтекания, которая является константой). Наличие циркуляции приводит к появлению в уравнениях Кирхгофа двух векторов $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и μ, чьи компоненты в системе $O\xi\eta\zeta$ являются константами, зависящими от геометрии тела (см. [4] § 133). Уравнения Кирхгофа, описывающие движения тела, имеют вид ([4] § 134 и [1]):

$$(\partial T/\partial \mathbf{V})^{\cdot} + \omega \times (\partial T/\partial \mathbf{V} + \lambda) = -p\gamma \tag{2.1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)^{\cdot} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\partial T}{\partial \omega} + \boldsymbol{\mu}\right) + V \times \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} + \boldsymbol{\lambda}\right) = \mathbf{M}$$

Здесь p – все системы «тело – жидкость»; $\mathbf{M}$ – вектор моментов внешних сил, γ – единичный вектор вертикали. Если предположить, что $\mu = 0$ и $\lambda_3 = 0$ (эти два равенства можно трактовать как действие на тело дополнительных сил и моментов, компенсирующих соответствующие слагаемые в левых частях (2.1), а также что в начальный момент времени $w = 0$ и $\omega_1 = \omega_2 = 0$, то плоскость симметрии тела, перпендикулярная оси ζ, будет оставаться вертикальной во время движения. Таким образом, пространственная задача сведена к плоской. С учетом сделанных предположений, уравнения (2.1) примут вид

$$a_1\dot{u}+\dot{\varphi}(a_2 v+\lambda_2)=-p\cos\varphi \tag{2.2}$$

$$a_2\dot{v}-\dot{\varphi}(a_1 u+\lambda_1)=-p\sin\varphi$$

$$-b\ddot{\varphi}+u(a_2 v+\lambda_2)-v(a_1 u+\lambda_1)=-p(\xi\sin\varphi-\eta\cos\varphi)$$

Смысл обозначений ξ, η объяснен в п. 1, φ – угол поворота тела (фиг. 2) относительно вертикали, $\dot{\varphi}=-\omega_3$. Система (2.2) имеет два первых интеграла, являющихся по сути следствием теоремы об изменении импульса системы «тело – жидкость»

$$(a_1 u+\lambda_1)\sin\varphi-(a_2 v+\lambda_2)\cos\varphi=c_1=\text{const}$$

$$(a_1 u+\lambda_1)\cos\varphi+(a_2 v+\lambda_2)\sin\varphi=-pt+c_2,\quad c_2=\text{const} \tag{2.3}$$

При $\lambda_1=\lambda_2=0$ эти интегралы указаны в [1].

С помощью соотношений (2.3) последнее уравнение в системе (2.2) может быть приведено к виду

$$b\ddot{\varphi}+p^2t^2\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\sin\varphi\cos\varphi+\operatorname{tg}(\varphi)+f(\varphi)=0 \tag{2.4}$$

$$g(\varphi)=-\frac{p}{a^2}(c_2\sin 2\varphi+c_1\cos 2\varphi-\lambda_2)+\frac{p}{a_1}(c_2\sin 2\varphi+c_1\cos 2\varphi+\lambda_1)$$

$$f(\varphi)=\left(\frac{c_2}{a_2}\sin\varphi-\frac{c_1}{a_2}\cos\varphi-\frac{\lambda_2}{a_2}\right)(c_2\cos\varphi+$$

$$+c_1\sin\varphi)-\left(\frac{-\lambda_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_1}\cos\varphi+\frac{c_1}{a_1}\sin\varphi\right)(c_2\sin\varphi-c_1\cos\varphi)$$

Уравнение типа (2.4) исследовано в [2], где показано, в частности, что для почти всех начальных данных $\varphi\to\pi/2\ (\mathrm{mod}\ \pi)$, т.е. тело стремится занять такое положение, при котором его широкая сторона (та, которой соответствует большая присоединенная масса) горизонтальна. Для функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих уравнению типа (2.4), соотношения (1.2) проинтегрированы в [2]:

$$x=\frac{c_1}{a_2}t+o(t),\quad y(t)=-\frac{pt^3}{2a_2}+o(t^2)$$

Итак, как и в случае отсутствия циркуляции, асимптотически (при больших значениях t) траектория движения точки O является параболой (если, конечно, $C_1\neq 0$). Таким образом, в случае a_1/a_2, наличие циркуляции не меняет качественной картины падения тела.

3. Случай гидродинамической симметрии. Рассмотрим теперь задачу из предыдущего пункта для случая, когда $a_1=a_2=a$.

Уравнение (2.4) примет вид

$$\ddot{\varphi}+t\frac{p}{ab}(\lambda_2\cos\varphi-\lambda_1\sin\varphi)+f(\varphi)=0 \tag{3.1}$$

Делая замены $\delta = \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)$ и $S = t^{3/2}$, $\alpha = \arccos[\lambda_1 / (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2}]$ получим уравнение для δ (штрихом будем обозначать производную по S):

$$\delta'' - \frac{4}{9} k \sin 2\delta = -\frac{1}{3}\delta' s^{-1} - \frac{2}{9} s^{-2/3} f(2\delta + \alpha)$$

$$k = (p / (ab))(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2}$$

Правая часть последнего уравнения является малой величиной. Введем в рассмотрение энергию невозмущенной задачи $H = \frac{1}{2} \times (\delta'^2 + \frac{4}{9}\cos^2\delta)$. Дословно повторяя рассуждения из [2], получим, что почти для всех начальных данных $H \to 0$ при $t \to +\infty$ $\delta \to \frac{1}{2}\pi (\operatorname{mod} \pi)$ при $t \to +\infty$ и, следовательно, $\varphi \to \pi + \alpha$. Таким образом, при $a_1 = a_2$, предельная ориентация тела определяется компонентами циркуляционного вектора λ. Тело стремится занять такое положение, при котором λ направлен вертикально вниз.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93–013–16244).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Полное собр. соч. Л.: Изд-во АН СССР. 1933. Т. 1. С. 133–150.
2. *Козлов В.В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10–17.
3. *Козлов В.В.* О падении тяжелого цилиндрического твердого тела в жидкости // Изв. АН. МТТ. 1933. № 4. С. 113–117.
4. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
5. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний // Л.; М.: Гостехиздат, 1949. 244 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1994