МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 624.072.4

© 1996 г. Ф.Г. АБДУЛЛА-ЗАДЕ

К РАСЧЕТУ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Приводятся нелинейные уравнения равновесия упругих криволинейных стержней с учетом начального напряжения. Уравнения получены из условия стационарности некоторого одномерного функционала, полученного преобразованием из трехмерного упругого функционала Рейснера, сформулированного для предварительно напряженных тел. На основе полученных уравнений рассмотрена задача об определении прогиба предварительно напряженного прямолинейного стержня при изгибе.

1. Криволинейные стержни типа арка, кольцо, прямолинейный стержень являются основными элементами при проектировании большинства машин и механизмов. Кроме того, этими элементами можно моделировать поведение более сложных конструкций, так например, поведение тонкостенных оболочек. Все это указывает на актуальность усовершенствования методов расчета стержней, связанных прежде всего с учетом технологических особенностей конструкций.

Одной из таких особенностей является предварительное напряжение. Под начальными напряжениями [1] подразумеваются те напряжения, которые возникают в теле в исходном состоянии, т.е. перед началом развития рассматриваемой деформации. В таких задачах исходное состояние берется в качестве отсчетного. Предположим, что начальные напряжения σ_{0ij} возникают под действием начальных массовых сил F_{i0} и начальных поверхностных усилий T_{0i}, приложенных на всей поверхности тела S, т.е. σ_{0ij} являются решением следующей системы уравнений:

$$\sigma_{0ij,j} + F_{0i} = 0, \quad x \in V; \quad \sigma_{0ij,j} n_j = T_{0i}, \quad x \in S \tag{1.1}$$

где V – объем недеформированного тела, n_i – компоненты вектора нормали к недеформированной поверхности, запятая означает дифференцирование по координате.

Предположим, что добавочные напряжения σ_{ij} обусловлены заданием дополнительных массовых сил F_i, дополнительных поверхностных усилий $\overline{T}_i$, действующих на части поверхности тела S_σ и заданием перемещений $\overline{u}_i$ на оставшейся части поверхности S_u (перемещения отсчитываются от исходного состояния). Отметим, что силы $F_i + F_{0i}$ и $\overline{T}_i + T_{0i}$ вызывают в теле полное напряжение, определенное следующей суммой: $\sigma_{ij} + \sigma_{0ij}$. Из условия равновесия тела под действием полной нагрузки и полного напряжения для добавочных напряжений получаем следующую систему уравнений [1]:

$$\begin{gathered}
\left[\sigma_{ij}(\delta_{ik} + u_{k,i})\right]_{,j} + (\sigma_{0ij} u_{k,i})_{,j} + F_k = 0, \quad x \in V \\
\left[\sigma_{ij}(\delta_{ik} + u_{k,i})\right] + \left[\sigma_{0ij} u_{k,i}\right] n_j \equiv T_k = \overline{T}_k, \quad x \in S_\sigma \\
u_i = \overline{u}_i, \quad x \in S_u
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, σ_{ij} – второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа в

декартовой системе координат. При написании этих уравнений предполагалась нелинейность соотношения между деформацией и перемещением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \tag{1.3}$$

Предполагая тело упругим, т.е. $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}$, где C_{ijkl} – модули упругости, получаем, что уравнения (1.2) и (1.3) описывают распределения добавочных напряжений и перемещения, при этом величина σ_{0ij} определяется из (1.1) независимо от решения поставленной задачи. В случае малости перемещений и конечности начальных напряжений уравнения равновесия (1.2) видоизменяются следующим образом:

$$\sigma_{kj,j} + (\sigma_{0ij}u_{k,i})_{,j} + F_k = 0, \quad x \in V \tag{1.4}$$

$$\left(\sigma_{kj} + \sigma_{0ij}u_{k,i}\right)n_j \equiv T_k = \overline{T}_k, \quad x \in S_\sigma$$

Из приведенных уравнений (1.2) и (1.4) видно, что учет начального напряжения видоизменяет уравнение равновесия, вводя дополнительный член, в общем случае, с переменным коэффициентом. Наличие этого члена и нелинейность приводят к необходимости при решении поставленной задачи применения приближенного метода.

Одним из таких методов является вариационный, в частности, принцип Рейснера [2]. Модифицируем вариационный принцип Рейснера для геометрически нелинейных задач теории упругости с учетом наличия начального напряжения. Функционал Рейснера по аналогии с [3] имеет вид

$$J = \int_V \left\{ \sigma_{ij}\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) + \frac{1}{2}\sigma_{0ij}u_{k,i}u_{k,j} - \right. \tag{1.5}$$

$$\left. -\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - F_i u_i \right\} dV - \int_{S_\sigma} \overline{T}_i u_i dS - \int_{S_u} T_i(u_i - \overline{u}_i)dS$$

где независимыми величинами являются u_i, σ_{ij}. Очевидно, что уравнениями Эйлера функционала (1.5) являются три уравнения системы (1.2) и следующее уравнение состояния:

$$\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) = C_{ijkl}\sigma_{kl}$$

Это доказывает, что решение уравнений (1.2) и (1.3) эквивалентно нахождению стационарного значения функционала (1.5).

Так как уравнение равновесия пространственной задачи с учетом начального напряжения видоизменяются (1.2), то, очевидно, что должны видоизменяться и уравнения равновесия криволинейных стержней. Учитывая приближенность этих уравнений, целесообразно их получать из вариационного принципа в рамках принятого приближения [2]. Для этого необходимо выбрать ту или иную теорию стержней и в рамках этой теории (приближения) преобразовать один из функционалов теории упругости, в частности, (1.5). Уравнения Эйлера, получаемого функционала, описывают равновесие стержня с взятой точностью [2].

Получим уравнения, определяющие добавочные напряжения в криволинейных тонкостенных стержнях в рамках нелинейной теории сечений. Для удобства рассмотрим криволинейный стержень прямоугольный в плане, толщиной $2h$ и единичной ширины. В рамках гипотезы плоских сечений перемещение произвольной точки тонкостенного стержня вдоль оси имеет вид

$$\tilde{u} = u - Z\frac{1}{A}\frac{dW}{dS} \tag{1.6}$$

где u – продольные перемещения точки оси, Z – поперечная координата сечения, A –

метрика оси, S – координата точки оси, W – прогиб (поперечное перемещение точек оси). В рамках этой же теории, но с учетом нелинейности прогиба, деформация произвольной точки $\tilde{\varepsilon}$ представляется в форме

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + Z\chi$$

$$\varepsilon = \frac{1}{A}\frac{du}{dS} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2A^2}\left(\frac{dW}{dS}\right)^2, \quad \chi = -\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right)$$

где ε – деформация точки оси, χ – изгибная деформация, R – радиус кривизны недеформированной оси. В силу силовой части гипотезы плоских сечений, все компоненты тензора напряжения считаются малыми по сравнению с напряжением вдоль оси, которую возьмем в виде

$$\sigma = \frac{1}{2h}N + Z\frac{3}{2h^3}M \tag{1.7}$$

где σ – напряжение вдоль оси, N – усилие, M – момент. По аналогии с (1.7), начальное напряжение определяется величинами N_0 и M_0, которые находятся из уравнений равновесия криволинейного стержня с учетом принятого предположения. Для линейной теории, по аналогии с (1.1) имеем

$$\frac{dN_0}{dS} = 0, \quad A\frac{N_0}{R} - \frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right) = 0 \quad (0 \leqslant S \leqslant S_0)$$

$$N_0 = \overline{N}_0, \quad M_0 = \overline{M}_0, \quad \frac{1}{A}\frac{dM_0}{dS} = \overline{T}_0 \quad (S = S_\sigma)$$

где S_0 – концевая точка оси, S_σ – координата торца, на которой задана одна из величин $\overline{N}_0, \overline{M}_0, \overline{T}_0$. Отметим, что поверхность $S = S_\sigma$ состоит из двух поверхностей $S = 0$ и $S = S_0$.

Представления для основных величин u, σ, ε учтем в функционале (1.5). При этом необходимо отметить, что рассматривается изотропный стержень, характеризуемый одним параметром E – модулем Юнга. С учетом представления для перемещения найдем:

$$u_{k,1}u_{k,1} = \left\{\frac{1}{A}\frac{du}{dS} - Z\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right) + \frac{W}{R}\right\}^2 + \frac{1}{A^2}\left(\frac{dW}{dS}\right)^2 \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{A^2}\left(\frac{dW}{dS}\right)^2 - 2Z\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right)\frac{1}{A}\frac{du}{dS} \tag{1.8}$$

где полученное выражение взято с точностью до Z^2 и предполагалось, что остальными квадратичными членами по сравнению с оставшимся можно пренебречь. Тогда функционал (1.5) с учетом (1.7) примет вид

$$J = \int_0^{S_0}\left\{N\left(\frac{1}{A}\frac{du}{dS} + \frac{W}{R} + \frac{1}{2A^2}\left(\frac{dW}{dS}\right)^2\right) - M\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right) + \right.$$

$$+N_0\frac{1}{2A^2}\left(\frac{dW}{dS}\right)^2 - M_0\frac{1}{A}\frac{du}{dS}\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right) -$$

$$\left. -\frac{1}{4Eh}\left(N^2 + \frac{3}{h^2}M^2\right) - q_s u - q_z W\right\}AdS - \overline{N}_s u - \overline{M}_z\frac{1}{A}\frac{dW}{dS} - \frac{1}{A}\frac{d\overline{M}_z}{dS}W\Big|_{S=S_\sigma} -$$

$$-\left(N_s(u - \overline{u}) - M_z\frac{1}{A}\left(\frac{dW}{dS} - \frac{d\overline{W}}{dS}\right) + \frac{1}{A}\frac{dM_z}{dS}(W - \overline{W})\right)\Big|_{S=S_u} \tag{1.9}$$

где силы, действующие на боковую поверхность стержня относятся, в силу тонко-

стенности, к массовым [1]. В полученном одномерном функционале варьируемыми величинами являются u, W, N, M. Очевидно, что уравнения Эйлера функционала (1.9) являются уравнениями равновесия предварительно напряженных криволинейных тонкостенных упругих стержней в рамках принятой гипотезы. Итак, искомые уравнения имеют вид

$$\frac{1}{A}\frac{du}{dS}+\frac{W}{R}+\frac{1}{2A^2}\left(\frac{dW}{dS}\right)^2=\frac{1}{2Eh}N$$

$$-\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right)=\frac{1}{2Eh^3}M \quad (0\leqslant S\leqslant S_0)$$

$$-\frac{dN}{dS}+\frac{d}{dS}\left\{M_0\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right)\right\}-Aq_s=0$$

$$A\frac{N}{R}-\frac{d}{dS}\left\{(N+N_0)\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right\}-\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dM}{dS}\right)-\frac{d}{dS}\left\{\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(M_0\frac{1}{A}\frac{du}{dS}\right)\right\}-Aq_z=0$$

$$N-M_0\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}\right)=\overline{N}_s,\quad M+M_0\frac{1}{A}\frac{du}{dS}=\overline{M}_s,\quad S=S_\sigma$$

$$\frac{1}{A}\frac{dW}{dS}(N+N_0)+\frac{1}{A}\frac{dM}{dS}-\frac{1}{A}\frac{d}{dS}\left(\frac{1}{A}\frac{du}{dS}M_0\right)=\frac{1}{A}\frac{d\overline{M}_z}{dS}$$

$$u=\overline{u},\quad W=\overline{W},\quad dW/dS=d\overline{W}/dS,\quad S=S_u \tag{1.10}$$

Отметим, что решение полученной системы уравнений эквивалентно нахождению стационарного значения функционала (1.9), т.е. наличие функционала (1.9) позволяет при решении поставленной задачи использовать один из вариационных методов.

2. Рассмотрим прямолинейный стержень длиной L, прямоугольный в плане, находящийся под действием нагрузок, приложенных по торцам. Предположим, что приложенная нагрузка распределена так, что приводит к усилию $\overline{N}$ и моменту $\overline{M}$ на торцах $X = 0$, $X = L$, где X – координата точки оси. Кроме того, предположим, что в стержне имеется заданное начальное напряжение, определяемое постоянными величинами N и M. Определим прогиб в рассматриваемой конструкции.

Для этого применим функционал (1.9). В рамках рассматриваемой задачи он имеет вид

$$J=\int_0^L\left\{N\left(\frac{du}{dX}+\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dX}\right)^2\right)-M\frac{d^2W}{dX^2}+\frac{1}{2}N_0\left(\frac{dW}{dX}\right)^2-\right.$$

$$\left.-M_0\frac{du}{dX}\frac{d^2W}{dX^2}-\frac{1}{4Eh}\left(N^2+\frac{3}{h^2}M^2\right)\right\}dX-\overline{N}u\Big|_{X=0}^{L}+$$

$$+\overline{M}\frac{dW}{dX}\Big|_{X=0}^{L}-\frac{dM}{dX}W\Big|_{X=0}^{L} \tag{2.1}$$

где при написании принималось, что $W = 0$ при $X = 0$ и $X = L$.

Отсюда получим следующую систему определяющих уравнений:

$$dN/dX-M_0\ d^3W/dX^3=0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dX}\left\{(N+N_0)\frac{dW}{dX}\right\}+\frac{d^2M}{dX^2}+M_0\frac{d^3u}{dX^3}=0$$

$$\frac{du}{dX}+\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dX}\right)^2=\frac{1}{2Eh}N,\quad -\frac{d^2W}{dX^2}=\frac{1}{2Eh^3}M\quad (0\leqslant X\leqslant L)$$

$$\overline{N}=N-M_0\frac{d^2W}{dX^2},\quad \overline{M}=M+M_0\frac{du}{dX},\quad W=0\ \text{при}\ X=0$$

В случае линейной теории функционал (2.1) упрощается, а именно, вторым членом пренебрегаем. Тогда система уравнений (2.2) преобразуется к виду

$$\frac{dN}{dX}-M_0\frac{d^3W}{dX^3}=0,\quad N_0\frac{d^2W}{dX^2}+\frac{d^2M}{d^2X}+M_0\frac{d^3u}{dX^3}=0 \tag{2.3}$$

$$N=2Eh\frac{du}{dX},\quad M=-\frac{2Eh^3}{3}\frac{d^2W}{dX^2}\quad (0\leqslant X\leqslant L)$$

где граничные условия не видоизменяются. Очевидно, что эта система может быть упрощена и сведена к одному уравнению

$$\frac{d^2W}{dX^2}\left(\frac{3}{4E^2h^4}M_0^2\right)+\frac{3}{2Eh^3}N_0W=\frac{3}{2Eh^3}\left(\overline{M}-M_0\frac{\overline{N}}{2Eh}\right) \tag{2.4}$$

Решение этого уравнения с учетом граничных условий представим в виде:

$$W=\frac{1}{\operatorname{sh}KL}(\operatorname{sh}K(X-L)-\operatorname{sh}KX+\operatorname{sh}KL)\frac{1}{N_0}\left(\overline{M}-M_0\frac{\overline{N}}{2Eh}\right)$$

$$K^2=\frac{3}{2Eh^3}N_0\left(1-M_0^2\frac{3}{4E^2h^4}\right)^{-1} \tag{2.5}$$

В зависимости от знаков N_0 и M_0 меняется не только вид прогиба, но и характер поведения. В случае $N>0$; $|M|<2Eh^2/\sqrt{3}$ или $N<0$; $|M|>2Eh^2/\sqrt{3}$ прогиб не имеет особенности. В противном случае существуют такие значения N_0 и M_0, при приближении к которым прогиб неограниченно возрастает. Эти значения N_0 и M_0 определяются из следующего соотношения:

$$|M_0|=\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{3N_0}{2Eh^3}\frac{L^2}{\pi^2m^2}}>\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}}\quad \text{при}\ N_0>0$$

$$|M_0|=\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{3N_0}{2Eh^3}\frac{L^2}{\pi^2m^2}}<\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}}\quad \text{при}\ N_0<0 \tag{2.6}$$

где m – целое число. В последнем случае получаем, что на N_0 должно быть ограничение, а именно, N_0 не равно критической силе потери устойчивости рассматриваемого стержня при шарнирном оперании. Отметим, что в случае отсутствия начального напряжения, $M_0=0$, $N_0=0$ как следует из (2.4), и прогиб не имеет особенности.

Рассмотрим общий случай – систему (2.2). Из первого уравнения и граничного условия находим, что $N=\overline{N}+M\,d^2W/dX^2$. Из соотношения упругости определяем продольное перемещение через прогиб в виде

$$\frac{du}{dX}=\frac{1}{2Eh}\left(\overline{N}+M_0\frac{d^2W}{dX^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dX}\right)^2$$

Подставим найденные значения N и du/dX через прогиб во второе уравнение системы (2.2) и во второе граничное условие. Учитывая зависимость момента от прогиба, окончательно получим следующее уравнение для определения W:

$$W(N_0+\overline{N})\frac{3}{2Eh^3}+\frac{d^2W}{dX^2}\left(-1+M_0^2\frac{3}{4Eh^4}\right)+$$

$$+M_0\overline{N}\frac{3}{4E^2h^4}+C_1+C_2X=0 \tag{2.7}$$

$$\overline{M}=-\frac{1}{2}M_0\left(\frac{dW}{dX}\right)^2+\frac{Eh^3}{3}2\left(-1+M_0^2\frac{3}{4E^2h^4}\right)\frac{d^2W}{dX^2}+M_0N\frac{1}{2Eh}$$

$$W=0 \quad \text{при} \quad X=0$$

где C_i – постоянные интегрирования. Решение дифференциального уравнения представим следующим образом:

$$W=C_3\,\mathrm{sh}\,K_1X+C_4\,\mathrm{ch}\,K_1X-\frac{C_1 2Eh^3}{3(N_0+\overline{N})}-$$

$$-\frac{C_2 2Eh^3}{3(N_0+\overline{N})}X-\frac{M_0\overline{N}}{N_0+\overline{N}}\;\frac{1}{2Eh}$$

$$K_1^2=\frac{3(N_0+\overline{N})}{2Eh^3}\left(1-M^2\frac{3}{4E^2h^4}\right)^{-1}$$

Неизвестные интегрирования C_i находятся из граничных условий. Итак, прогиб определяется следующим образом:

$$W=\frac{2Eh^3}{3}\;\frac{C}{(N_0+\overline{N})}(-\mathrm{sh}\,K_1(X-L)+\mathrm{sh}\,K_1X-\mathrm{sh}\,K_1L) \tag{2.8}$$

где C определяется из решения квадратного уравнения

$$C^2M_0\frac{2E^2h^6}{3(N_0+\overline{N})^2}K_1^2\,\mathrm{th}^2\frac{K_1L}{2}+C\frac{2Eh^3}{3}+\overline{M}-M_0\overline{N}\frac{1}{2Eh}=0 \tag{2.9}$$

Анализ выражения (2.8), по аналогии с (2.5), показывает, что прогиб может иметь особенность, если начальный момент определяется из следующего равенства:

$$|M_0|=\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{3(N_0+\overline{N})}{2Eh^3}\;\frac{L^2}{\pi^2m^2}}>\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}} \quad \text{при} \quad N_0+\overline{N}>0$$

$$|M_0|=\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3(N_0+\overline{N})}{2Eh^3}\;\frac{L^2}{\pi^2m^2}}<\frac{2Eh^2}{\sqrt{3}} \quad \text{при} \quad N_0+\overline{N}<0$$

Кроме этого, ограничение на M_0 имеется еще одно, вытекающее из условия существования действительных корней уравнения (2.9) и обусловленное нелинейностью задачи, а именно

$$\frac{Eh^3}{3}-\left(\overline{M}-M_0\overline{N}\frac{1}{2Eh}\right)M_0\frac{1}{N_0+\overline{N}}\left(1-M_0^2\frac{3}{4E^2h^4}\right)^{-1}\mathrm{th}^2\frac{K_1h}{2}>0$$

Выбор корня уравнения (2.9) определяется исходя из физических соображений. Учет нелинейности прогиба приводит к количественному изменению.

Если в выражении (1.8) принять, что вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым, то получим, что в уравнения равновесия и граничные условия величина M_0 не войдет. Для рассматриваемой задачи это означает, что в уравнение прогиба необходимо положить $M_0 = 0$. Это означает, что стержень может потерять несущую способность, если для линейной теории N_0, а для нелинейной теории $N_0 + \overline{N}$ равны критической силе потери устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987, 542 с.
2. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 228 с.
3. *Абдулла-заде Ф.Г.* Об одном вариационном принципе теории ползучести для расчета предварительно напряженных тел // Изв. АН. МТТ. № 4. 1993. 118–122 с.

Баку

Поступила в редакцию
21.XII.1994

Зав. редакцией *В.М. Кутырева*

Технический редактор *Т.В. Скворцова*

Сдано в набор 02.08.96 Подписано к печати 30.08.96 Формат бумаги $70 \times 100^1/_{16}$

Офсетная печать Усл.печ.л. 14,3 Усл.кр.-отт.7,2тыс. Уч.-изд.л. 17,4 Бум.л. 5,5

Тираж 494 экз. Зак. 399

Адрес редакции: 117526 Москва, проспект Вернадского, д. 101. Тел. 434-35-38

Московская типография № 2 ВО «Наука», 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6