МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. **А.И. ВЕСНИЦКИЙ, А.В. МЕТРИКИН**

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЕБАНИЙ ОБЪЕКТА, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СИСТЕМЕ

Интенсивное развитие высокоскоростного наземного транспорта обострило интерес к проблемам взаимодействия упругих систем с движущимися по ним объектами [1–4]. Одной из наиболее интересных и практически важных в этой области является проблема обеспечения устойчивости системы движущийся объект – направляющая. При взаимодействии колеса вагона с рельсовым путем, например, неустойчивость приводит к одному из самых нежелательных режимов движения – "галопированию", представляющему собой последовательность разрывов и возобновлений контакта между колесом и рельсовым путем. В системе токосъема неустойчивость колебаний пантографа, взаимодействующего с контактной подвеской, приводит к искрению и существенному увеличению расхода энергии. Механизм и условия возникновения неустойчивости безграничных упругих направляющих, взаимодействующих с равномерно движущимся объектом, были получены и проанализированы в [5–7]. В этих работах было показано, что неустойчивость может иметь место лишь при скоростях движения объекта, превышающих наименьшую фазовую скорость $v^{ph}_{\min}$ изгибных волн в направляющей. Для рельсового пути эта скорость по различным оценкам составляет 900–1100 км/ч и для современных поездов является недостижимой. В работе [8] была проанализирована устойчивость колебаний объекта, равномерно движущегося вдоль периодически-неоднородной направляющей. Было показано, что неустойчивость здесь может иметь место при скоростях, существенно меньших $v^{ph}_{\min}$. Предположение о периодической неоднородности таких направляющих, как рельсовый путь и контактная подвеска, обусловленное наличием шпал и стыков в первом случае и узлов креплений во втором, более адекватно реальности, чем предположение об однородности этих направляющих. Однако, и периодически-неоднородная модель направляющей обладает рядом недостатков, основным из которых является игнорирование далеко не строгой периодичности рассматриваемых систем. На практике неоднородность как рельсового пути, так и контактной подвески имеет статистический характер, близкий, в то же время, к периодическому.

В настоящей работе исследуется устойчивость поперечных колебаний объекта, равномерно движущегося вдоль случайно-неоднородной направляющей. Система моделируется струной, лежащей на случайно-неоднородном упругом основании, вдоль которой равномерно и безотрывно движется точечная масса. Показано, что среднестатическая амплитуда колебаний массы может возрастать в процессе движения, т.е. колебания системы могут быть неустойчивы в среднем. Установлено, что неустойчивость возникает при выполнении условия стохастического параметрического резонанса, когда удвоенная частота колебаний массы, движущейся по однородной струне, совпадает с характерной частотой изменения параметров направляющей под движущейся массой.

1. Уравнения движения. Рассмотрим равномерное $x = vt$ движение тела массы m по струне с погонной плотностью ρ и натяжением N, лежащей на случайно-неоднородном основании, жесткость которого описывается функцией $k(x) = k_0 + \mu k_1(x)$, где $k_0 = \mathrm{const}$, $\mu \ll 1$ – безразмерный малый параметр, $k_1(x)$ – случайная функция координаты, причем $\langle k_1(x)\rangle = 0$. Угловые скобки означают статистическое усреднение.

Система уравнений, описывающая безотрывные колебания струны и тела, в безразмерных переменных имеет вид

$$U_{\tau\tau} = U_{zz} + 2\mu\nu U_\tau + h^2(z)U = -M\ddot{y}(\tau)\delta(z - \alpha\tau) \tag{1.1}$$

$$h^2(z) = 1 + \mu h_1(z),\ \ h_1(z) = k_1(z)/k_0,\ \ y(\tau) = U(\alpha\tau,\ \tau)$$

где $U\ (z, \tau)$ – поперечное смещение струны, $y\ (\tau)$ – поперечное смещение массы, $z = h_0 x/c,\ \ \tau = h_0 t (c^2 = N/\rho,\ \ h_0^2 = k_0/\rho)$ – безразмерные координата и время, $\alpha = v/c$ $(\alpha < 1)$, $M = mh_0/\rho c$ – безразмерные скорость и масса тела, $2\mu\nu$ – безразмерная вязкость основания струны, $\delta\ (...)$ – дельта-функция.

Представим $h_1(z)$ в виде интеграла Фурье

$$h_1(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\varkappa)e^{i\varkappa z}d\varkappa = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q^*(\varkappa_1)e^{-i\varkappa_1 z}d\varkappa_1 \tag{1.2}$$

$$\langle Q(\varkappa)\rangle = \langle Q^*(\varkappa_1)\rangle = 0$$

Звездочка означает комплексно сопряженную величину. Будем полагать в дальнейшем, что флуктуации жесткости упругого основания однородны, т.е. $\langle h_1(z)h_1(z_1)\rangle = K(|z - z_1|)$. Тогда, согласно [9]:

$$\langle Q(\varkappa)Q^*(\varkappa_1)\rangle = S(\varkappa)\delta(\varkappa - \varkappa_1) \tag{1.3}$$

где $S\ (\varkappa)$ и $K\ (z)$ связаны соотношениями Винера – Хинчина, $\delta(\varkappa)$ – дельта-функция. Подставляя (1.2) в (1.1), используя условие безотрывности колебаний струны и массы, из которого следует, что

$$\ddot{y}(\tau) = (U_{\tau\tau} + 2\alpha U_{\tau z} + \alpha^2 U_{zz})|_{z=\alpha\tau}$$

и переходя в движущуюся со скоростью массы систему координат $\xi = z - \alpha\tau$, $\tau = \tau$, получим из (1.1):

$$U_{\tau\tau} - 2\alpha U_{\tau\xi} - (1-\alpha^2)U_{\xi\xi} + 2\mu\nu(U_\tau - \alpha U_\xi) +$$
$$+\left(1 + \mu\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\varkappa)e^{i\varkappa(\xi+\alpha\tau)}\,d\varkappa\right)U = -MU_{\tau\tau}\delta(\xi) \tag{1.4}$$

Задача (1.4), описывающая взаимодействие массы и струны, является линейной, поэтому анализ вопроса об устойчивости системы сводится к получению характеристического уравнения и отысканию собственных частот колебаний массы. Для вывода характеристического уравнения, описывающего среднестатистические колебания массы, удобен метод среднего поля [10, 11], которым мы и воспользуемся.

Отыскивая решение (1.4) в виде $U = U^0 + \mu U^1$, где U^0 — среднее поле, U^1 – флуктуационное поле, получим уравнение, описывающее среднее поле:

$$U^0_{\tau\tau} - 2\alpha U^0_{\tau\xi} - (1-\alpha^2)U^0_{\xi\xi} + 2\mu\nu(U^0_\tau - \alpha U^0_\xi) +$$
$$+U^0 + \mu^2\left\langle U^1\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\varkappa)e^{i\varkappa(\xi+\alpha\tau)}\,d\varkappa\right\rangle = -MU^0_{\tau\tau}\delta(\xi) \tag{1.5}$$

и уравнение для флуктуационного поля:

$$U^1_{\tau\tau} - 2\alpha U^1_{\tau\xi} - (1-\alpha^2)U^1_{\xi\xi} + U^1 = \tag{1.6}$$
$$= -U^0\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q^*(\varkappa_1)e^{-i\varkappa_1(\xi+\alpha\tau)}\,d\varkappa_1 - MU^1_{\tau\tau}\delta(\xi)$$

Применяя к (1.5) и (1.6) интегральные преобразования Фурье по координате и времени

$$V_\omega^{0,1}(\omega,\ \xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} U^{0,1}(\tau,\ \xi)e^{i\omega\tau}\,d\tau,\quad W_{\omega,k}^{0,1}(\omega,\ k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_\omega^{0,1}(\omega,\ \xi)e^{-ik\xi}\,d\xi$$

найдем уравнения для среднего и флуктуационного поля в изображениях:

$$(-\omega^2-2\alpha\omega k+(1-\alpha^2)k^2+1-2i\mu\nu(\omega+\alpha k))W_{\omega,k}^0+$$
$$+\mu^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle Q(\varkappa)W_{\omega,k}^1(\omega+\alpha\varkappa,\ k-\varkappa)\rangle d\varkappa=M\omega^2V_\omega^0(\omega,\ 0) \tag{1.7}$$

$$(-\omega^2-2\alpha\omega k+(1-\alpha^2)k^2+1)W_{\omega,k}^1=$$
$$=M\omega^2V_\omega^1(\omega,\ 0)-\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q^*(\varkappa_1)W_{\omega,k}^0(\omega-\alpha\varkappa_1,\ k+\varkappa_1)d\varkappa_1 \tag{1.8}$$

2. Характеристическое уравнение. Для того, чтобы записать замкнутое уравнение, описывающее среднее поле, необходимо из (1.8) выразить $W_{\omega,k}^1$ и подставить в (1.7). Учитывая, что в пределах рассматриваемой точности (до μ^2), выражение для $W_{\omega,k}^0$ в (1.8) должно быть записано в виде

$$W_{\omega,k}^0=M\omega^2V_\omega^0(\omega,\ 0)/A(\omega,\ k)$$
$$A(\omega,\ k)=k^2(1-\alpha^2)-2\alpha\omega k+1-\omega^2$$

получим из (1.8):

$$W_{\omega,k}^1=M\omega^2V_\omega^1(\omega,\ 0)/A(\omega,\ k)-\frac{M}{A(\omega,\ k)}\times \tag{2.1}$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{Q^*(\varkappa_1)(\omega-\alpha\varkappa_1)^2V_\omega^0(\omega-\alpha\varkappa_1,\ 0)}{A(\omega-\alpha\varkappa_1,\ k+\varkappa_1)}d\varkappa_1$$

Прежде чем подставлять выражение для $W_{\omega,k}^1$ в (1.7), необходимо найти $V_\omega^1(\omega,\ 0)$. Применим для этого к (2.1) обратное преобразование Фурье по координате:

$$V_\omega^1(\omega,\ \xi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_{\omega,k}^1e^{ik\xi}dk=M\omega^2V_\omega^1(\omega,\ 0)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}A^{-1}(\omega,\ k)e^{ik\xi}dk- \tag{2.2}$$
$$-\frac{M}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q^*(\varkappa_1)(\omega-\alpha\varkappa_1)^2V_\omega^0(\omega-\alpha\varkappa_1,\ 0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}A^{-1}(\omega,\ k)A^{-1}(\omega-\alpha\varkappa_1,\ k+\varkappa_1)e^{ik\xi}dkd\varkappa_1$$

Полагая в (2.2) $\xi=0$ и вводя обозначение $\Phi\{f(\omega,\ k,\ \varkappa)\}=\int dk/2\pi f(\omega,\ k,\ \varkappa)$ (интеграл берется в бесконечных пределах), получим из (2.2) выражение для $V_\omega^1(\omega,0)$:

$$V_\omega^1(\omega,\ 0)=$$
$$=\frac{-M\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q^*(\varkappa_1)(\omega-\alpha\varkappa_1)^2V_\omega^0(\omega-\alpha\varkappa_1,\ 0)\Phi\{A^{-1}(\omega,k)A^{-1}(\omega-\alpha\varkappa_1,\ k+\varkappa_1)\}}{1-M\omega^2\Phi\{A^{-1}(\omega,k)\}}d\varkappa_1. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.1) в (1.7), с учетом (2.3) и (1.3) получим

$$W_{\omega,k}^0(A(\omega,k)-2i\mu\nu(\omega+\alpha k))=M\omega^2V_\omega^0(\omega,\ 0)-$$
$$-\mu^2MV_\omega^0(\omega,0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}S(\varkappa)(A^{-1}(\omega,k)A^{-1}(\omega+\alpha\varkappa,\ k-\varkappa)+$$
$$\left.+\frac{\omega^2(\omega+\alpha\varkappa)^2\Phi\{A^{-1}(\omega,\ k+\varkappa)\}}{A(\omega+\alpha\varkappa,\ k-\varkappa)(1-M(\omega+\alpha\varkappa)^2\Phi\{A^{-1}(\omega+\alpha\varkappa,\ k)\})}\right)d\varkappa=0 \tag{2.4}$$

Применяя к (2.4) обратное преобразование Фурье по координате и полагая в полученном выражении $\xi = 0$, получим уравнение, описывающее среднестатистические колебания массы:

$$V_{\omega}^{0}(\omega,0)z(\omega)=0$$

$$z(\omega)=1-M\omega^2\Phi\{A^{-1}(\omega,k)\}-2i\mu\nu\Phi\{(\omega+\alpha k)\times$$

$$\times A^{-1}(\omega,k)\}-\mu^2 M\int_{-\infty}^{\infty} S(\varkappa)(\Phi\{A^{-2}(\omega,k)A^{-1}(\omega+\alpha\varkappa,\ k-\varkappa)\}+$$

$$+\frac{\omega^2(\omega+\alpha\varkappa)^2\Phi^2\{A^{-1}(\omega,\ k+\varkappa)A^{-1}(\omega+\alpha\varkappa,\ k)\}}{1-M(\omega+\alpha\varkappa)^2\Phi\{A^{-1}(\omega+\alpha\varkappa,\ k)\}}\mathrm{d}\varkappa$$

3. Зоны неустойчивости. Корни характеристического уравнения $z(\omega) = 0$ определяют устойчивость колебаний массы в среднем. Если хотя бы один корень этого уравнения имеет положительную мнимую часть, колебания системы в среднем будут неустойчивы.

Собственные частоты колебаний массы, равномерно движущейся вдоль однородной струны, являющиеся корнями уравнения $z(\omega) = 0$ при $\mu = 0$, определяются выражением $\Omega=\pm\sqrt{2}\left(\sqrt{1+M^2(1-\alpha^2)}-1\right)^{1/2}\big/M$. Очевидно, что данные колебания являются гармоническими (напомним, что рассматривается случай $\alpha < 1$).

Определим поправку к частоте колебаний массы, вносимую малыми вязкостью и случайной неоднородностью основания. Для этого корни уравнения $z(\omega) = 0$ при $\mu \neq 0$ будем искать в виде $\omega = \Omega + \mu\delta$. При этом будем интересоваться мнимой частью δ, т.к. именно знак мнимой части δ и определяет устойчивость колебаний массы в среднем.

Вследствие того, что с точностью до слагаемых порядка μ справедливо соотношение

$$1-M\omega^2\Phi\{A^{-1}(\omega,k)\}\approx-\frac{2\mu\delta}{M\Omega}\left(1+\frac{2}{M^2\Omega^2}\right) \tag{3.1}$$

в коэффициентах, стоящих в $z(\omega)$ при μ и μ^2, нас будут интересовать лишь их мнимые части. Определяя влияние малой вязкости, получим

$$\mathrm{Im}\left(-2i\mu\nu\Phi\left\{\frac{\omega+\alpha k}{A(\omega,k)}\right\}\right)=-\frac{2\mu\nu}{M\Omega(1-\alpha^2)} \tag{3.2}$$

Как и следовало ожидать, вязкость основания оказывает стабилизирующее воздействие на колебания массы.

Определим влияние случайной неоднородности основания. Поскольку мнимая часть интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\varkappa)\Phi\{A^{-2}(\Omega,k)A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,\ k-\varkappa)\}\mathrm{d}\varkappa$$

равна нулю, его значение не влияет на устойчивость колебаний.

Выражения $\Phi\{A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,\ k)\}$ и $\Phi\{A^{-1}(\Omega,\ k+\varkappa)A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,\ k)\}$ после вычисления интегралов запишутся в виде

$$\Phi\{A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,\ k)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,\ k)dK=1/(2R_2)$$

$$\Phi\{A^{-1}(\Omega,\ k+\varkappa)A^{-1}(\Omega+\alpha,\ \varkappa,\ k)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A^{-1}(\Omega,\ k+\varkappa)A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,\ k)dK=$$

$$=\frac{\varkappa(1-\alpha^2)(\alpha^2\varkappa+2\alpha\Omega+i(R_1+R_2))}{2R_1R_2(R_1+R_2+i\varkappa)(R_1+R_2-i\varkappa)(R_1-R_2+i\varkappa)}$$

$$R_1=\sqrt{1-\alpha^2-\Omega^2},\quad R_2=\sqrt{1-\alpha^2-(\Omega+\alpha\varkappa)^2},\quad \mathrm{Re}(R_1,\ R_2)>0$$

Подставляя эти выражения в интеграл

$$\mathrm{Int}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\varkappa)\frac{\Omega^2(\Omega+\alpha\varkappa)^2\Phi^2\{A^{-1}(\Omega,k+\varkappa)A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,k)\}}{1-M(\Omega+\alpha\varkappa)^2\Phi\{A^{-1}(\Omega+\alpha\varkappa,k)\}}\mathrm{d}\,\varkappa$$

и вычисляя его мнимую часть (интеграл вычисляется в смысле главного значения), получим

$$\mathrm{Im}(-\mu^2 M\,\mathrm{In}\,t)=\frac{\mu^2M(1-\alpha^2)}{\Omega(2+M\Omega^2)}\left\{\frac{S(0)}{\alpha M^4\Omega^4}-\frac{\alpha^3S(2\Omega/\alpha)}{(4+\alpha^2M^2\Omega^2)^2}\right\} \tag{3.3}$$

Используя теперь (3.1)–(3.3), найдем из уравнения $z(\omega)=0$ мнимую часть δ, знак которой определяет устойчивость колебаний массы:

$$\mathrm{Im}(\delta)=-\frac{\nu M^2\Omega^2}{(1-\alpha^2)(2+M^2\Omega^2)}-\frac{\mu M^4(1-\alpha^2)^2\Omega^2}{(2+M^2\Omega^2)(2+M\Omega^2)}\left\{\frac{S(0)}{\alpha M^4\Omega^4}-\frac{\alpha^3S(2\Omega/\alpha)}{(4+\alpha^2M^2\Omega^2)^2}\right\}$$

Таким образом, поперечные колебания массы, равномерно движущейся вдоль струны, лежащей на случайно-неоднородном, упруго-вязком основании, неустойчивы в среднем, если выполнено условие

$$\frac{\alpha^3S(2\Omega/\alpha)}{(4+\alpha^2M^2\Omega^2)^2}-\frac{S(0)}{\alpha M^4\Omega^4}>\frac{2\nu(2+M\Omega^2)}{\mu M^2(1-\alpha^2)^3} \tag{3.4}$$

Очевидно, что если случайная функция $h_1(z)$ обладает скрытой периодичностью, т.е. $S(\varkappa)$ имеет вид, изображенный на фиг. 1, колебания массы могут быть неустойчивы. Для реализации неустойчивого режима необходимо, чтобы характерное волновое число неоднородности $\varkappa_0$ было близко к $2\Omega/\alpha$, иными словами, удвоенная частота колебаний массы, движущейся по однородной струне Ω, должна быть близка к характерной частоте $\alpha\varkappa_0$, с которой изменяется жесткость упругого основания под движущейся массой $2\Omega\approx\alpha\varkappa_0$.

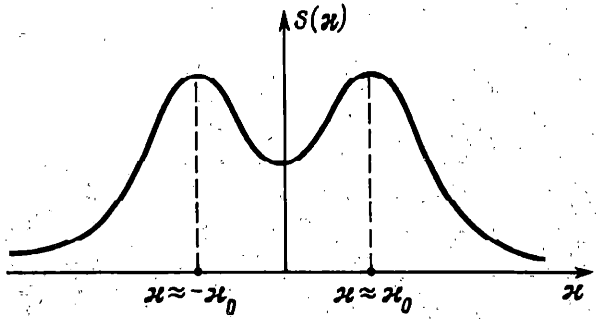
Определим область неустойчивости параметров системы в случае, когда $S(\varkappa)$ описывается выражением (см. фиг. 1 и [9]):

$$S(\varkappa)=\frac{2\sigma_0^2}{\pi}\frac{\gamma\varkappa_0^2}{(\varkappa^2-\varkappa_0^2)^2+4\gamma^2\varkappa^2} \tag{3.5}$$

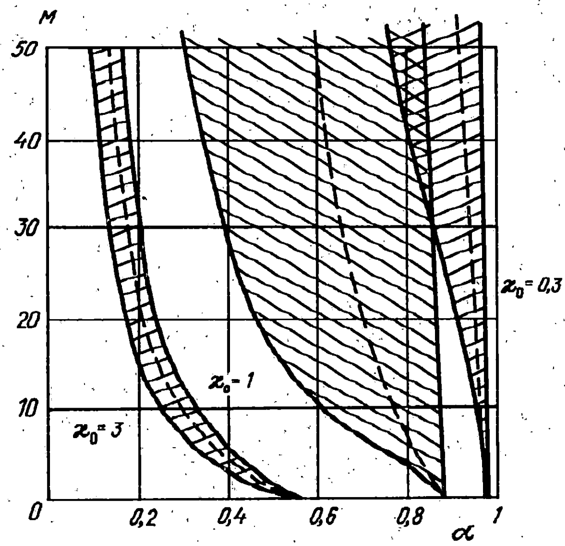
Здесь σ_0^2 – дисперсия функции $h_1(z)$, $\varkappa_0$ – характерный период неоднородности, γ^{-1} – радиус корреляции. Допустим вначале, что вязкость основания струны равна нулю. Подставляя (3.5) в (3.4) и полагая в полученном уравнении $\nu=0$, получим условие неустойчивости при пренебрежимо малой диссипации

$$\frac{\alpha^3}{(4+\alpha^2M^2\Omega^2)^2}\frac{1}{(4\Omega^2/\alpha^2-\varkappa_0^2)^2+16\gamma^2\Omega^2/\alpha^2}-\frac{1}{\alpha M^4\Omega^4\varkappa_0^4}>0 \tag{3.6}$$

Из (3.6) видно, что существенное влияние на устойчивость системы оказывает радиус корреляции γ^{-1} случайно-неоднородного основания струны. Чем меньше радиус корреляции (чем больше γ), тем меньше вероятность возникновения неустойчивости. На фиг. 2, на плоскости параметров α, M заштрихованы области неустойчивости для различных значений $\varkappa_0$. Внутри этих областей всегда существует такое значение



Фиг. 1



Фиг. 2

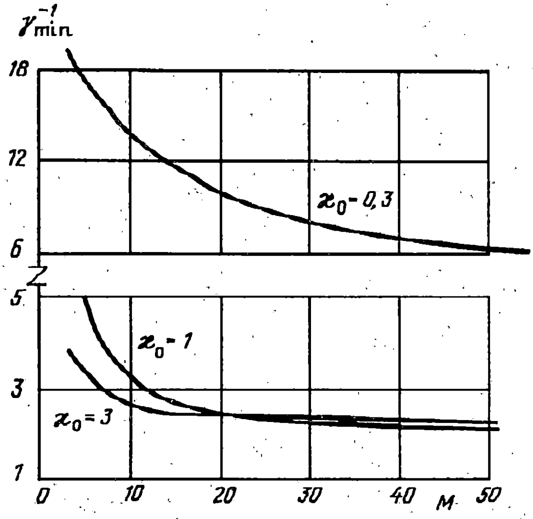
γ, что условие (3.6) выполнено. Анализируя фигуру, можно сделать следующие выводы:

1. С ростом характерного периода неоднородности $\varkappa_0$ зона неустойчивости смещается в область меньших скоростей движения α;

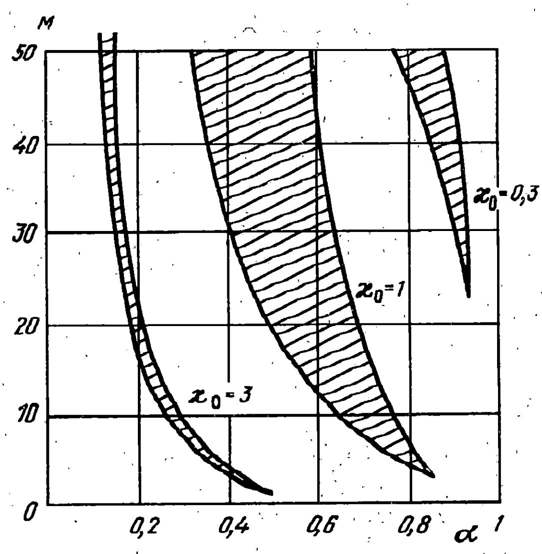
2. Зона неустойчивости расширяется по α с ростом массы тела M;

3. Ширина зоны неустойчивости по α при заданной массе тела немонотонно зависит от характерного периода неоднородности.

Важной характеристикой неустойчивости является минимальный радиус корреляции $\gamma_{\min}^{-1}$, при котором возможна неустойчивость для заданного значения массы тела M. На фиг. 2 внутри каждой зоны пунктиром изображена кривая, на которой неустойчивость возникает при минимальном радиусе корреляции. Зависимость величины $\gamma_{\min}^{-1}$ от массы тела для различных значений характерного периода неоднородности $\varkappa_0$ изображены на фиг. 3. Видно, что с ростом массы тела величина $\gamma_{\min}^{-1}$ уменьшается. Кроме того, нетрудно заметить, что для зоны неустойчивости, "прижатой" к скорости распространения волн в струне ($\varkappa_0 = 0{,}3$), минимально возможный для возникновения неустойчивости радиус корреляции существенно больше, чем для остальных зон неустойчивости, соответствующих большим $\varkappa_0$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если не пренебрегать вязкостью основания струны и подставить выражение для $S(\varkappa)$ из (3.5) в (3.4), то условие неустойчивости системы примет вид

$$\frac{\alpha^3}{(4+\alpha^2M^2\Omega^2)^2}\,\frac{1}{(4\Omega^2/\alpha^2-\varkappa_0^2)^2+16\gamma^2\Omega^2/\alpha^2}-\frac{1}{\alpha M^4\Omega^4\varkappa_0^4}>\frac{\nu}{\mu\sigma_0^2}\,\frac{\pi}{\gamma\varkappa_0^2}\,\frac{2+M\Omega^2}{M^2(1-\alpha^2)^3}$$

Зоны неустойчивости, полученные согласно (3.7), изображены на фиг. 4 (параметр $\nu/\mu\sigma_0^2$ полагается равным $2\cdot10^{-3}$). Видно, что при наличии вязкости неустойчивость может возникать не при любых массах тела, а лишь начиная с некоторой критической массы M^*, причем чем меньше характерный период неоднородности, тем больше M^*.

Итак, для уменьшения области неустойчивости параметров системы нужно увеличивать диссипацию в направляющей ν и уменьшать а) глубину модуляции параметра неоднородности μ; б) дисперсию неоднородности σ_0^2; в) радиус корреляции неоднородности γ^{-1}. Кроме того, начиная с $\varkappa_0 \approx 1$, выгодно уменьшать характерный период неоднородности $\varkappa_0$.

В заключение отметим, что условие неустойчивости (3.4) является ни чем иным, как аналогом условия неустойчивости в среднем в системе, описываемой стохастическим аналогом уравнения Матье $\ddot{x}+2\nu\dot{x}+\omega_0^2 x(1+\mu\Phi(t))=0$, которое, согласно [7, 12], имеет вид

$$\mu^2(S_\Phi(2\omega_0)-S_\Phi(0))>2\nu/\pi\omega_0^2$$

где $S_\Phi(\omega)$ и $\Phi(t)$ связаны соотношениями Винера – Хинчина, $\Phi(t)$ – стационарный случайный процесс. Это естественно, так как на равномерно движущейся вдоль случайно-неоднородной направляющей объект действует сила, эквивалентная реакции пружины со случайно изменяющейся во времени жесткостью, что и приводит к параметрической раскачке колебаний массы. Данная аналогия позволяет предположить, в частности, что колебания объекта могут быть неустойчивы и тогда, когда неоднородность не обладает скрытой периодичностью. В этом случае неустойчивость должна проявляться в нарастании моментных функций высшего порядка [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fryba L.* Vibration of solids and structures under moving loads. Prague: Academia, 1972. 484 p.
2. *Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С.* Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. Киев: Наук. думка, 1974. 176 с.
3. *Duffy D.G.* The response of an infinite rilroad track to a moving, vibrating mass // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1990. V. 57. N 1. P. 66–73.
4. *Весницкий А.И.* Волновые эффекты в упругих системах // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С. 15–30.
5. *Денисов Г.Г., Кугушева Е.К., Новиков В.В.* К задаче об устойчивости безграничных упругих систем // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 4. С. 691–696.
6. *Bogacz R., Nowakowski S., Popp K.* On the stability of a Timoshenko beam on an elastic foundation under a moving springmass system // Acta mech. 1986. V. 61. N 1–4. P. 117–127.
7. *Метрикин А.В.* Неустойчивость поперечных колебаний объекта, равномерно движущегося вдоль упругой направляющей, как следствие аномального эффекта Доплера // Акуст. ж. 1994. Т. 40. № 1. С. 99–103.
8. *Весницкий А.И., Метрикин А.В.* Параметрическая неустойчивость колебаний тела, равномерно движущегося по периодически неоднородной упругой системе // ПМТФ. 1993. № 2. С. 127–133.
9. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
10. *Басс Ф.Г.* О тензоре эффективной диэлектрической проницаемости в среде со случайными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2. № 6. С. 1015–1016.
11. *Докучаев В.П., Разин А.В.* Распространение упругих волн в твердой среде с флуктуирующими параметрами // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987. № 4. С. 40–45.
12. *Весницкий А.И., Метрикин А.В.* Переходное излучение в одномерных упругих системах // ПМТФ. 1992. № 2. С. 40–45.
13. *Весницкий А.И., Метрикин А.В.* Излучение, возникающее при равномерном движении объекта по случайно-неоднородной упругой системе // Прикладная механика. 1992. Т. 28. № 9. С. 46–50.
14. *Алексеев В.М., Валеев К.Г.* Исследование колебаний линейной системы со случайными коэффициентами // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т. 14. № 12. С. 1810–1815.
15. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 386 с.

Н. Новгород

Поступила в редакцию
24.II.1994