**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996**

УДК 534.1:629.123.56

© 1996 г. Г.Ф. ЗОЛОТЕНКО

К ДИНАМИКЕ ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ "ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БАК – ЖИДКОСТЬ"

Рассматривается задача определения парциальных частот системы "упругая оболочка – жидкость" в случае, когда оболочка в недеформированном состоянии имеет форму прямоугольного параллелепипеда, а содержащаяся в ней жидкость является идеальной и несжимаемой. Считается, что оболочка сильно наклонена по отношению к вектору силы тяжести, так что свободная поверхность жидкости пересекает ее верхнюю грань. Основное внимание уделено парциальным частотам жидкого звена системы. Применен вариационный метод, основанный на принципе Гамильтона – Остроградского для жидкой среды, с лагранжианом в форме Бейтмена – Люка. Построено частотное уравнение для жидкого звена системы в случае сильных наклонов бака. В качестве примера приведены результаты расчетов парциальных частот грузового отсека танкера, заполненного жидким грузом.

1. Введение. Один из методов исследования динамики сложной механической системы, каковой является рассматриваемая гидроупругая система, заключается в ее разбиении на парциальные подсистемы [1]. Такой подход позволяет предварительно оценивать собственные частоты колебаний как отдельных звеньев, так и системы в целом. Для оболочек, заполненных жидкостью лишь частично, он приобретает особое значение, поскольку гравитационные волны на свободной поверхности жидкости (регулярные и нерегулярные) характеризуются, в первую очередь, спектром парциальных частот жидкости. Обычно информация о парциальных частотах жидкого звена системы в сочетании с данными о режиме движения несущего объекта, на котором установлена оболочка, используется для оценки поведения жидкости и ее влияния на динамику упругого звена. Полный анализ динамики всей системы требует учета взаимосвязи ее упругого и жидкого звеньев. Такой подход, правда, без учета волн на свободной поверхности жидкости, применен, например, в [2]. Однако часто, особенно в случаях, когда жидкость можно считать несжимаемой, а основная парциальная частота оболочки намного превосходит основную парциальную частоту жидкости, влияние упругих колебаний стенок оболочки на волновые движения жидкости оказываются незначительными и задача сводится к случаю колебаний жидкости в абсолютно жесткой оболочке.

В настоящей работе решается задача определения парциальных частот плоских колебаний несжимаемой идеальной жидкости, частично заполняющей с касанием крышки прямоугольный бак, повернутый вокруг горизонтальной оси на некоторый, вообще говоря, немалый, угол. Подобная задача возникает, в частности, в динамике танкеров, имеющей дело преимущественно с полостями призматических форм.

Полость в форме прямоугольного параллелепипеда относится к каноническим областям в динамике ограниченного объема жидкости, однако случай ее сильных наклонов, когда жидкость касается верхней плоскости, до настоящего времени подробно не описан. Ранее рассматривались наклоненные полости, но цилиндрических, конических и осесимметричных форм [3, 4]. Случай с крышкой, но в круговом цилиндре, изучался в [5]. Известна работа [6], в которой численными методами просчитывались траектории жидких частиц свободной поверхности, соударяющихся с крышкой прямоугольного сосуда. Довольно близкая к рассматриваемой в настоящей работе

система исследовалась в [7] в связи с эффектом сильных наклонов свободной поверхности жидкости относительно вертикального прямоугольного сосуда под воздействием высокочастотных вибраций, однако вопрос о свободных колебаниях жидкости в ней не затрагивался. Наконец, об экспериментальных исследованиях наклоненных прямоугольных баков с крышками, заполненных жидкостью и совершающих горизонтальные и вертикальные перемещения, кратко сообщено в [8].

2. Краевая задача для жидкого звена. Рассматривается прямоугольный бак длиной $2a$, шириной $2b$ и высотой $2c$, частично заполненный идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ. С баком неизменно связана система координат $Oxyz$, начало O которой размещено в центре бака, а если x, y, z направлены параллельно ребрам $2a$, $2b$, $2c$ соответственно. Считается, что бак повернут на угол α вокруг горизонтальной оси ξ абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$, ось ζ которой направлена по восходящей вертикали. В исходном положении, т.е. при $\alpha = 0$, системы координат $Oxyz$ и $O\xi\eta\zeta$ совпадают. Положительному α соответствует поворот бака против хода часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси ξ. Глубина заполнения бака жидкостью $H_0 = c + h_0$, где h_0 – уровень свободной поверхности неподвижной жидкости при $\alpha = 0$.

Бак считается сильно наклоненным, если свободная поверхность покоящейся жидкости пересекает его верхнюю грань. Из геометрических соображений следует, что при сильных наклонах бака выполняется соотношение

$$|\alpha| > \operatorname{arctg}[(c - h_0)/b], \quad |h_0| < c \tag{2.1}$$

Свободные колебания жидкости в вертикальном баке, т.е. при $\alpha = 0$, рассматривались в [9]. В этом случае ее собственные частоты определяются по формуле (g – ускорение силы тяжести):

$$\omega_{nm} = [g\varkappa_{nm} \operatorname{th}(\varkappa_{nm} H_0)]^{1/2} \quad (n, m = 1, 2\ldots) \tag{2.2}$$

$$\varkappa_{nm} = \frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{n-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{m-1}{b}\right)^2\right]^{1/2}$$

В дальнейшем ограничимся случаем колебаний жидкости в плоскости Oyz. Для сильно наклоненного бака краевая задача о волновых движениях жидкости может быть записана в виде

$$\Delta\varphi = 0, \quad -b < y < b, \quad -c < z < f(y, t), \quad \tau_1 < t < \tau_2 \tag{2.3}$$

$$\partial\varphi/\partial y = 0, \quad y = \pm b, \quad -c \leqslant z \leqslant f(\pm b, t) \tag{2.4}$$

$$\partial\varphi/\partial z = 0, \quad -b \leqslant y \leqslant b, \quad z = -c \tag{2.5}$$

$$\partial\varphi/\partial z = 0, \quad y \in S_\pm, \quad z = c \tag{2.6}$$

$$\partial\varphi/\partial z = \partial\zeta/\partial t + \partial\varphi/\partial y, \partial\zeta/\partial y, \quad y \in Y_\pm, \quad z = \zeta(y, t) \tag{2.7}$$

$$\rho[C(t) - \partial\varphi / \partial t - \tfrac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - gy\sin\alpha - gz\cos\alpha] = p_0 \tag{2.8}$$

$$y \in Y_\pm, \quad z = \zeta(y, t)$$

В соотношениях (2.3)–(2.8) функция $\varphi(y, z, t)$ обозначает потенциал скорости жидкости, $z = \zeta(y, t)$ – уравнение ее свободной поверхности, τ_1, τ_2 – границы рассматриваемого промежутка времени, $S_\pm, Y_\pm$ – области изменения координаты y, определяемые соотношениями

$$S_+ = \{-b \leqslant y \leqslant y_c\}, \quad Y_+ = \{y_c \leqslant y \leqslant b\} \quad \text{при} \quad \alpha > 0 \tag{2.9}$$

$$S_- = \{y_c \leqslant y \leqslant b\}, \quad Y_- = \{-b \leqslant y \leqslant y_c\} \quad \text{при} \quad \alpha < 0 \tag{2.10}$$

Здесь y_c – y-координата точки пересечения свободной поверхности с плоскостью

$z = c$, p_0 – давление на свободной поверхности, $f(y, t)$ – функция, определяющая верхнюю границу жидкого объема и имеющая вид

$$f(y,t) = \begin{cases} c, & y \in S_{\pm} \\ \zeta(y,t), & y \in Y_{\pm} \end{cases} \tag{2.11}$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени из интеграла Лагранжа – Коши, который в связанной с баком системе координат $Oxyz$ определяется равенством

$$\partial\varphi/\partial t + {}^1/_2(\nabla\varphi)^2 + gy\sin\alpha + gz\cos\alpha + p/\rho = C(t) \tag{2.12}$$

где $p(y, z, t)$ – давление в жидкости.

В динамическом краевом условии (2.8) остается неизвестной функция $C(t)$. Определим ее. Для этого рассмотрим равновесное положение жидкости, при котором потенциал скорости $\varphi(y, z, t) \equiv 0$, а свободная поверхность является плоской и описывается уравнением

$$z = -y\mathrm{tg}\alpha + h_z \tag{2.13}$$

В (2.13) величина h_z задает z-координату точки пересечения свободной поверхности с осью Oz. С помощью условия постоянства объема жидкости в баке можно показать, что

$$h_z = c \pm b\,\mathrm{tg}\,\alpha \mp 2[\pm b(c - h_0)\mathrm{ctg}\,\alpha]^{1/2} \tag{2.14}$$

где верхний знак соответствует $\alpha > 0$, а нижний – $\alpha < 0$. Из (2.12) с учетом (2.13) получаем искомое выражение

$$C(t) = h_z g\cos\alpha + p_0/\rho \tag{2.15}$$

Заметим, что при вертикальном положении бака ($\alpha = 0$) и при размещении начала координат на свободной поверхности ($h_z = h_0 = 0$) формула (2.15) приводит к известному в гидростатике соотношению $C(t) = p_0/\rho$.

Таким образом, для определения парциальных частот жидкого звена рассматриваемой системы необходимо решить краевую задачу (2.3)–(2.8) с неизвестными функциями $\varphi(y, z, t)$ и $\zeta(y, t)$.

3. Эквивалентная вариационная задача. Для решения задачи (2.3)–(2.8) применим вариационный метод, основанный на принципе Гамильтона – Остроградского для жидкой среды. Следуя [10], можно показать, что, несмотря на относительно сложную форму области, занятой жидкостью, краевая задача (2.3)–(2.8) эквивалентна вариационной задаче о стационарном значении действия по Гамильтону

$$W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L dt \tag{3.1}$$

где лагранжиан L определяется соотношением (лагранжиан Бейтмена – Люка):

$$L = \int_{Q(t)} (p - p_0) dQ \tag{3.2}$$

Здесь $Q(t)$ – пространственная область, занятая жидкостью и описанная в (2.3), а подынтегральная функция определяется из (2.12) с учетом (2.15) и имеет вид

$$p - p_0 = -\rho[\partial\varphi/\partial t + {}^1/_2(\nabla\varphi)^2 + gy\sin\alpha - g(h_z - z)\cos\alpha] \tag{3.3}$$

Из эквивалентности рассматриваемых задач следует, что искомые функции $\varphi(y, z, t)$ и $\zeta(y, t)$ должны удовлетворять равенству

$$\delta W = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta L dt = 0 \tag{3.4}$$

В дальнейшем ограничимся случаем $\alpha < 0$, поскольку из физических соображений ясно, что направление поворота бака не влияет на собственные частоты жидкости. Тогда явное выражение для лагранжиана, полученное из (3.2) с учетом (2.9)–(2.11) и (3.3), будет следующим:

$$L = -\rho \int_{y_c}^{b} \int_{-c}^{c} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \right] dzdy - \rho \int_{-b}^{y_c} \int_{-c}^{\zeta} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 \right] dzdy +$$

$$+\rho g c[2h_z(b - y_c)\cos\alpha - (b^2 - y_c^2)\sin\alpha] - \rho g \sin\alpha \int_{-b}^{y_c} y(\zeta + c)dy -$$

$$-\frac{1}{2}\rho g \cos\alpha \int_{-b}^{y_c} [\zeta^2 - 2h_z(\zeta + c) - c^2]dy \tag{3.5}$$

Выражение (3.5) определяет лагранжиан в случае сильно наклоненного бака. Если жидкость не касается крышки, то $y_c = b$. Если, кроме того, бак вертикален, а начало координат находится в центре свободной поверхности, то $\alpha = 0$ и $h_0 = 0$. При этих условиях лагранжиан (3.5) принимает вид

$$L = -\rho \int_{-b}^{b} \int_{-c}^{\zeta} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + gz \right] dzdy$$

который с точностью до обозначений и области интегрирования совпадает с приведенным в [11].

4. Частотное уравнение для жидкого звена. Аппроксимируем искомые функции выражениями

$$\varphi(y,z,t) = \sum_{i=1}^{M} R_i(t)\varphi_i(y,z), \quad \zeta(y,t) = h_z - y\,\mathrm{tg}\,\alpha + \sum_{r=1}^{N} \beta_r(t) f_r(y) \tag{4.1}$$

где $R_i(t)$, $\beta_r(t)$ – обобщенные координаты жидкости $\varphi_i(y, z)$, $f_r(y)$ – базисные функции. Перейдем от интегрального равенства (3.4) к уравнениям Эйлера – Лагранжа рассматриваемой вариационной задачи, которые в общем случае имеют вид [10]:

$$\frac{d}{dt}(\partial L / \partial \dot{R}_i) - \partial L / \partial R_i = 0 \quad (i = \overline{1, M}) \tag{4.2}$$

$$\partial L / \partial \beta_r = 0 \quad (r = \overline{1, N}) \tag{4.3}$$

Учитывая, что в силу второго из соотношений (4.1) величина y_c является функцией от $\beta_1,..., \beta_N$ и подставляя (3.5) в (4.2), (4.3), после линеаризации получающихся выражений по переменным R_i, β_r, $\dot{R}_i$, $\dot{\beta}_r$ приходим к следующим уравнениям свободных колебаний жидкого звена системы "прямоугольный бак – жидкость" в случае сильных наклонов бака

$$C_{ri}\dot{\beta}_r - D_{ij}R_j = 0 \quad (i, j = \overline{1, M}) \tag{4.4}$$

$$C_{ri}\dot{R}_i + B_{rs}\beta_s = 0 \quad (r, s = \overline{1, N}) \tag{4.5}$$

Здесь повторяющиеся индексы обозначают суммирование, а коэффициенты вычисляются по формулам ($\alpha < 0$):

$$C_{ri} = \int_{-b}^{y_*} \varphi_1[y, z_0(y)] f_r(y)dy, \quad B_{rs} = g\cos(\alpha) \int_{-b}^{y_*} f_r(y) f_s(y)dy$$

$$D_{ij} = \int_{-b}^{y_*} \int_{-c}^{z_0(y)} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j dzdy + \int_{y_*}^{b} \int_{-c}^{c} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j dzdy$$

$$z_0(y) = -y\,\mathrm{tg}\,\alpha + h_z, \quad y_* = -b + 2[b(h_0 - c)\,\mathrm{ctg}\,\alpha]^{1/2} \tag{4.6}$$

Пользуясь известным методом теории колебаний, представим решение уравнений (4.4), (4.5) в виде

$$\beta_r(t) = x_r e^{\lambda t}, \quad R_i(t) = y_i e^{\lambda t} \quad (r = 1,\ldots,N, \quad i = 1,\ldots,M) \tag{4.7}$$

где амплитуды x_r, y_i и частота λ (комплекснозначная) не известны. Подстановка (4.7) в (4.4), (4.5) приводит к следующей обобщенной задаче на собственные значения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \lambda\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

Здесь введены матричные обозначения

$$\mathbf{C} = \|C_{ri}\|, \quad \mathbf{B} = \|B_{ri}\|, \quad \mathbf{D} = \|D_{ij}\|, \quad \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_N, y_1,\ldots,y_M) \tag{4.9}$$

а $\mathbf{C}^T$ обозначает транспонированную матрицу $\mathbf{C}$.

Условие разрешимости системы уравнений (4.8) дает частотное уравнение для жидкого звена рассматриваемой системы при больших углах наклона бака, а именно

$$\det\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{C}^T & -\mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \lambda\mathbf{C} \end{bmatrix} = 0, \quad \lambda = \sqrt{-1}\omega \tag{4.10}$$

где ω – круговая частота.

Заметим, что для последовательности базисных функций $\varphi_i(y, z)$, начинающейся с константы, матрица $\mathbf{D}$, а следовательно и матрица при $\mathbf{x}$ в (4.8), оказываются вырожденными (в силу $\nabla\varphi_1 \equiv 0$). В этом случае, выражая x_1, $y_2,\ldots,$ y_M через y_1, $x_2,\ldots,$ x_N, можно перейти от определителя (4.10) к определителю размера $N \times N$ вида

$$|\mathbf{c}_1, \lambda^2\mathbf{e}_1 + \mathbf{t}_1, \lambda^2\mathbf{e}_2 + \mathbf{t}_2, \ldots, \lambda^2\mathbf{e}_{N-1} + \mathbf{t}_{N-1}| = 0 \tag{4.11}$$

Здесь $\mathbf{c}_1$ – первый вектор-столбец матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{e}_1,\ldots,$ $\mathbf{e}_{N-1}$ – вектор-столбцы матрицы $\mathbf{E} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$, $\mathbf{t}_1,\ldots,$ $\mathbf{t}_{N-1}$ – вектор-столбцы матрицы $\mathbf{T}$, причем элементы матриц $\mathbf{H}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ определяются через элементы исходных матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ (4.9) по формулам (i – номер строки, j – номер столбца):

$$\mathbf{H} = \|C_{ij}\| \quad (i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{2,M})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_0^{-1}, \quad \mathbf{D}_0 = \|D_{ij}\| \quad (i = \overline{2,M}, \quad j = \overline{2,M})$$

$$\mathbf{S} = \|S_{ij}\| = \|C_{ji} - C_{i1}C_{j1}/C_{11}\| \quad (i = \overline{2,M}, \quad j = \overline{2,N})$$

$$\mathbf{T} = \|T_{ij}\| = \|B_{ij} - B_{i1}C_{j1}/C_{11}\| \quad (i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{2,N})$$

Решение уравнения (4.11) можно осуществить численными методами.

5. Пример. Рассмотрим грузовой отсек танкера в форме прямоугольного параллелепипеда с внутренними размерами $2a$ = 22 м, $2b$ = 42 м, $2c$ = 17 м, заполненный на 75% по высоте (H_0 = 12,75 м, h_0 = 4,25 м) жидким грузом плотности ρ = 1000 кг/м^3 и наклоненный на угол α = 30°. Оценим основные парциальные частоты этой системы в предположении, что стенки бака выполнены из стали и имеют толщину 0,02 м.

В данном случае $\mathrm{tg}\alpha$ = 0,5774, $(c - h_0)/b$ = 0,2024, так что условие (2.1) выполняется и жидкость касается крышки. При этом y-координата точки пересечения свободной поверхности покоящейся жидкости с крышкой y_* = 3,865 м, а параметр h_z = 6,268 м. При крайних угловых положениях бака, т.е. при α = 0 и α = 90°, собственные частоты

$\omega(\alpha) = |\lambda^2|^{1/2}$ жидкости, рассчитанные по формулам (2.2), имеют значения $\omega(0) = 0{,}74$ рад/с, $\omega(90°) = 1{,}35$ рад/с.

Выберем в качестве базисных функций $\varphi_k(y, z)$ гармонические полиномы [3]:

$$\{\varphi_k(y,z)\} = \{1, R^k \sin(k\eta), R^k \cos(k\eta)\} \quad (k = \overline{1, M}) \tag{5.1}$$

$$R = (y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \cos\eta = y / R, \quad \sin\eta = z / R$$

Свободную поверхность аппроксимируем последовательностью

$$\{f_r(y)\} = \left\{(2l)^{1/2}, l^{1/2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \frac{(r-1)\pi}{2l}(y - y_0)\right\} \quad (r = \overline{1, N}) \tag{5.2}$$

где синусы соответствуют четным, а косинусы – нечетным r:

$$l = (y_* + b)/2, \quad y_0 = (y_* - b)/2$$

Подстановка (5.1), (5.2) в формулы (4.6) и вычисление корней уравнения (4.11) на ЭВМ при $N = 10$, $M = 7$ в результате дают значение основной частоты жидкого груза $\omega(30°) = 1{,}01$ рад/с. Как и следовало ожидать, $\omega(0) < \omega(30°) < \omega(90°)$. Основная частота жидкого груза при $\alpha = 30°$ превосходит соответствующую частоту при $\alpha = 0°$ (в вертикальном баке) на 36%.

Основные парциальные частоты упругих стенок бака оценим по формуле для собственных частот колебаний прямоугольной пластины, жестко защемленной по контуру, [12]:

$$\omega = \pi^2 \left[\frac{D_1}{\rho_1 h_1}\left(\frac{1{,}506^4}{a_1^4} + \frac{1{,}506^4}{a_2^2} + 2\frac{1{,}248^2}{a_1^2 a_2^2}\right)\right]$$

где ρ_1 – плотность материала пластины, a_1, a_2 – длина и ширина пластины, h_1 – толщина пластины, $D_1 = E_1 h_1^3/[12(1 - \nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость. Полагая $E_1 = 20 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu = 0{,}3$, получаем следующие оценки парциальных частот стенок бака: для $a_1 = 42$ м, $a_2 = 17$ м (большая стенка) частота $\omega_1 = 2{,}5$ рад/с, для $a_1 = 22$ м, $a_2 = 17$ м (малая стенка) – $\omega_2 = 3{,}1$ рад/с, для $a_1 = 42$ м, $a_2 = 22$ м (дно бака) – $\omega_3 = 1{,}5$ рад / с.

Таким образом, расчеты показывают, что основная собственная частота жидкого груза меньше минимальной из собственных частот упругих элементов бака. Кроме того, поскольку, как известно, основная частота системы в целом меньше минимальной из ее парциальных частот, основная частота данной системы $\omega_{min} < 1{,}01$ рад/с. Эта оценка, в свою очередь, означает, что при волнении моря 5–7 баллов (по шкале Бофорта), когда средняя частота волн лежит в пределах 0,7–0,9 рад/с и приблизительно равна частоте вынужденных колебаний танкера в целом, гидроупругая система "бак – жидкость" может войти в резонанс на частоте ω_{min}, чего, вообще говоря, не должно быть. Одна из мер по предотвращению этой опасности могла бы заключаться в изменении габаритов грузового отсека с целью увеличения основной парциальной частоты жидкого груза, а вместе с ней и частоты ω_{min}. Тогда ни в прямом, ни в наклонном положении бака резонансов на основной частоте при волнении 5–7 баллов в системе не будет.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике. Т. 1 /Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. *Мокеев В.В., Павлюк Ю.С.* Эффективная процедура решения задач о собственных значениях при

исследованиях взаимодействия конструкция–жидкость на основе конечноэлементных моделей // Изв. АН МТТ. 1992. № 4. С. 178–182.
3. *Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. Киев: Наук.думка, 1984. 228 с.
4. *Чахлов С.В.* Вычисление гидродинамических коэффициентов для наклонной осесимметричной полости // Динамика механических систем: Тез. докл. Всесоюз. школы-семинара. Томск: Изд-во Том. ун-та. 1986. С. 43.
5. *Симонова Н.М.* Расчет коэффициентов уравнений движения твердого тела с жидкостью, частично заполняющей несимметричную полость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. Тр. 5-го семинара. Томск: Изд-во Томс. ун-та. 1984. С. 153–164.
6. *Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.Е.* Введение в динамику сосудов с жидкостью. Томск: Изд-во Томс. ун-та, 1977. 144 с.
7. *Тимоха А.Н.* Поведение свободной поверхности жидкости в вибрирующем ограниченном сосуде: Препринт № 92.22. Киев: Ин-т математики: АН Украины, 1992. 45 с.
8. *Биличенко Ю.Н., Богомаз Г.И., Луковский И.А.* Экспериментальные исследования нелинейных колебаний жидкости в жестких баках // Динамика механических систем. Тез. докл. Всесоюз. школы-семинара. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. С. 12–13.
9. *Моисеев Н.Н., Петров А.А.* Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 269 с.
10. *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. Киев: Наук. думка, 1990. 295 с.
11. *Luke J.C.* A variational principle for a fluid with a free surface // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. Pt. 2. P. 395–397.
12. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. Справочник в трех томах / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 567 с.

Киев

Поступила в редакцию
5.I.1995