МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 539.3:534.1

© 1996 г. Р.Ю. АМЕНЗАДЕ, С.А. ШЕСТЕРИКОВ

НЕЛИНЕЙНОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПО ТОЛЩИНЕ КОЛЬЦА ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

В последнее время трубопроводы все чаще проектируются в виде многослойных оболочек, изготовленных из композитных материалов, которым присуще свойство кусочной неоднородности по толщине [1]. Это обусловлено, в частности, стремлением к экономии металла при одновременном уменьшении веса конструкции и изысканием дополнительных прочностных ресурсов. Немаловажно, что такие конструкции обладают антикоррозионными свойствами. В связи с этим одной из важных (и одновременно весьма трудных) задач механики является создание эффективных методов исследования нелинейного поведения многослойных оболочек.

1. Рассмотрим тонкое упругое и изотропное кольцо. Подобный объект может описывать поведение длинных оболочек в области, где можно пренебречь влиянием закреплений. Предположим теперь, что круговое кольцо радиуса R и толщиной $2h$ составлено из n чередующихся различных по толщине слоев с различными модулями упругости E_{i+1} $[i = 0, 1, 2... (n-1)]$. Толщину каждого слоя обозначим через δ_i. Таким образом $\sum\delta_i = 2h$. Условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении [2]. Из этого следует равенство на них перемещений, напряжений и отсутствие взаимного давления слоев. В дальнейшем будем руководствоваться гипотезами плоских сечений Кирхгофа – Лява, при которых сформулированные выше условия выполняются автоматически.

При сделанных предположениях выпишем физическое соотношение для пакета в целом в виде одного равенства

$$e^f = \frac{\sigma}{E_{k+1}}, \quad -h+\sum_{i=0}^{k-1}\delta_i \leqslant z \leqslant -h+\sum_{i=0}^{k}\delta_i \tag{1.1}$$

В случае равных по толщине слоев, когда $\delta_i = \delta = \text{const}$ и $\sum\delta_i = k\delta$ $(i = 0, 1... k-1)$ из (1.1) имеем

$$-h + k\delta \leqslant z \leqslant -h + (k+1)\delta \tag{1.2}$$

При этом толщина каждого слоя равна $\delta = 2hn^{-1}$. Как следует из (1.2) при четных значениях n раздел слоев приходится на сечение $z = 0$. Для нечетных n при целой части $[n/2]$ раздел осуществляется левее $z = 0$, а при $[n/2] + 1$ – правее.

Рассмотрим теперь нелинейное поведение выбранного кольца, находящегося под действием равномерно распределенной по поверхности нагрузки q. Для решения поставленной задачи воспользуемся модифицированным методом смешанного типа [3]. В этом случае, введя в рассмотрение полярные координаты и учитывая нелинейность только прогиба w, соответствующий функционал запишем в виде

$$J = \int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\left\{\dot{e}\dot{\sigma}+\frac{\sigma}{2R^2}\left(\frac{\partial\dot{w}}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{1}{2}\dot{e}\dot{\sigma}\right\}Rd\varphi dz - R\int_{0}^{2\pi}\dot{q}\dot{w}d\varphi \tag{1.3}$$

Под точкой здесь и в дальнейшем следуя [3] понимается дифференцирование по q, т.е. $\dot{q} = 1$. Однако в контурном интеграле функционала (1.3) сознательно оставлено это выражение для удобства последующего интегрирования уравнений Эйлера. Учитывая (1.1) в (1.3), функционал J перепишем следующим образом:

$$J = \int_{-h}^{h}\int_{0}^{2\pi}\left\{\dot{e}\sigma + \frac{\sigma^2}{2R^2}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi}\right)^2\right\}Rd\varphi dz -$$

$$-\frac{R}{2}\int_{0}^{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_k+\delta_k}\dot{\sigma}^2 dz d\varphi - R\int_{0}^{2\pi}\dot{q}\dot{w}d\varphi \tag{1.4}$$

$$-h + \sum_{i=0}^{k-1}\delta_i = a_k, \quad -h + \sum_{i=0}^{k}\delta_i = a_k + \delta_k$$

Вследствие гипотезы плоских сечений имеем $e = e_0 - \varkappa z$, где e_0 и изменение кривизны $\varkappa$ определяются по формулам уравнений теории тонких оболочек [4]:

$$e_0 = \frac{1}{R}\left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{2R^2}\left[\left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\delta \varphi} - v\right)^2\right]$$

$$\varkappa = \frac{1}{R_2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)$$

Пренебрегая в приведенных соотношениях касательным перемещением v и считая справедливым неравенство $w/R \ll 1$, будем иметь

$$e_0 = \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2, \quad \varkappa = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.4), после интегрирования по z получим

$$J = \int_{0}^{2\pi}\left\{\frac{1}{R}\dot{q}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \varphi^2}\dot{M} + \frac{q}{2R}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{E_{k+1}}\left[\frac{R^2}{2h^2}\delta_k + \frac{3}{4h^4}\dot{q}R\dot{M}\delta_k A_k + \frac{9}{4h^6}\dot{M}^2\delta_k B_k\right]\right\}Rd\varphi \tag{1.6}$$

$$A_k = 2a_k + \delta_k, \quad B_k = (a_k + \delta_k)^2 + a_k(a_k + \delta_k) + a_k^2 \tag{1.7}$$

где $N = qR$ – усилие, M – момент. Кольцевое напряжение σ в силу тонкостенности принималось равным $\sigma = {}^1/_2 Nh + {}^3/_2 Mz/h^3$.

Для нахождения стационарного значения функционала (1.6) применим метод Ритца. Для этого аппроксимирующие функции зададим в виде

$$w = w_0(q) + w_1(q)\sin l\varphi, \quad M = m(q)\sin l\varphi \tag{1.8}$$

или после дифференцирования

$$\dot{w} = \dot{w}_0 + \dot{w}_1 \sin l\varphi, \quad \dot{M} = \dot{m}\sin l\varphi \tag{1.9}$$

Здесь величина l принимает четные значения и характеризует число волн в окружном направлении, а $\dot{w}_0$, $\dot{w}_1$ и $\dot{m}$ – независимые варьируемые величины. Дальнейший ход вычислений состоит в том, что выражения (1.8) и (1.9) подставляются в (1.7) и функционал J находится как функция w_1, m и производных этих величин по q. Далее, приравняв $\partial J / \partial \dot{w}_1 = 0$ и $\partial J / \partial \dot{m} = 0$, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$R(w_1 q)^{\cdot} + \dot{m} = 0$$

$$\frac{l}{R^2}\dot{w}_1 - \frac{9}{4h^6}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_k}{E_{k+1}}B_k\right)\dot{m} = 0$$

Отсутствие третьего уравнения связано с тем, что после интегрирования функционала по φ члены, содержащие w_0, выпадают. Проинтегрировав полученную систему с учетом начальных условий $m(0) = 0$, $w(0) = \overset{0}{w}_1 \sin l\varphi$, где $\overset{0}{w}_1$ – амплитуда начального несовершенства, после элементарных преобразований, получим

$$m = -Rqw_1 \tag{1.10}$$

$$\frac{l^2}{R^2}(w_1 - w_1^0) + \frac{9}{4h^6}Rq\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_k}{E_{k+1}}B_k\right)w_1 = 0$$

Из второго уравнения (1.10) имеем

$$w_1\left\{l^2 + \frac{9R^3}{4h^6}q\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_k}{E_{k+1}}B_k\right)\right\} = l^2 w_1^0 \tag{1.11}$$

В этом случае

$$m = -Rql^2 w_1^0\left\{l^2 + \frac{9R^3}{4h^6}q\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_k}{E_{k+1}}B_k\right)\right\}^{-1}$$

и напряжение σ определится следующей формулой:

$$\sigma = \frac{qR}{2h} + \frac{3}{2h^3}zm\sin l\varphi$$

или

$$\sigma = \frac{qR}{2h} - \frac{3}{2h^3}zRql^2 w_1^0\left\{l^2 + \frac{9R^3}{4h^6}q\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_k}{E_{k+1}}B_k\right)^{-1}\right\}\sin l\varphi \tag{1.12}$$

2. Пусть осуществляется внешнее давление ($q < 0$). Тогда критическая сила определяется из условия равенства нулю выражения в фигурных скобках (1.11):

$$\bar{q} = \frac{4}{9}l^2\frac{h^6}{R^3}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta_k}{E_{k+1}}B_k\right)^{-1} \tag{2.1}$$

В качестве примера рассмотрим устойчивость трехслойного кольца со следующей структурой: $E_1 = E_3$, $\delta_0 = \delta_2 = {}^1/_3h$, $\delta_1 = {}^4/_3h$. В этом случае из (2.1) имеем

$$\bar{q} = \frac{4}{9}l^2\frac{h^6}{R^3}\left(\frac{2L_0}{E_1} + \frac{L_1}{E_2}\right)^{-1} \tag{2.2}$$

$$L_0 = L_2 = \delta_0 B_0 = {}^{19}\!/_{27}h^3, \quad L_1 = \delta_1 B_1 = {}^{16}\!/_{27}h^3 \tag{2.3}$$

Отметим, что величина эйлеровой силы $q_э$ автоматически следует из (2.2) при $E_1 = E_2 = E$.

В силу соотношений (2.3) с учетом следующих безразмерных величин: $q_* = \bar{q}E_2^{-1}$, $\lambda = hR^{-1}$, $\alpha = E_2E_1^{-1}$, $\tau_* = q_*q_э^{-1}$, $q_э = {}^2\!/_9 l^2\lambda^2$, критическая сила τ_* будет равна $\tau_* =$ $= {}^{27}/_{19}\alpha + 8$.

Анализ опытных данных для таких широко встречающихся на практике материалов как алюминий, вольфрам, стали, конструкционные пластики и композиты, указывает на то, что величина α может принимать значения разных порядков. Сама величина τ_* реально может меняться от 0,02 до 3.

α	10^{-2}	10^{-1}	0,5	1	2	10	10^{2}
τ^*	3,367	3,298	1,543	1	0,587	0,136	0,014

Полученные результаты позволяют утверждать, что подбором неоднородности можно увеличить критическую силу при тех же геометрических параметрах кольца.

3. Для той же модели кольца рассмотрим случай внутреннего давления ($q > 0$). Тогда из равенства (1.12) с учетом дополнительных безразмерных величин $q_0 = qE_2^{-1}$, $c_0 = w_1^0 h^{-1}$, $\xi = zh^{-1}$, $\sigma_0 = 2\lambda E_2^{-1}\sigma$ для напряжения σ_0 будем иметь

$$\sigma_0 = q_0\left\{1 - 3\xi\frac{l^2 c_0}{l^2 + \frac{1}{6}q_0\lambda^{-1}(19\alpha + 8)}\sin l\varphi\right\}$$

Примем $l = 2$, что соответствует деформированию кольца в виде "восьмерки", а $\varphi = \pi/4$. При принятых параметрах очевидно, что максимальное напряжение $\sigma_0 = \sigma_{\max}$ достигается при $\xi = -1$.

Очевидно, что при $c_0 \ll 1$ и $\alpha \ll 1$ значение $\sigma_{\max}$ будет мало отличаться от q_0. Когда c_0 порядка 0,1 и α от 10 до 100 (реальные значения для некоторых комбинаций указанных выше материалов) максимальные напряжения могут уменьшаться на 10–20% по сравнению с однородным случаем. Последнее существенно для оценки возможности разрушения и возникновения пластических областей.

Из простейших оценок следует, что увеличение α приводит к понижению максимального напряжения, в то время как критическая сила увеличивается при малых значениях α.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
2. *Амензаде Р.Ю., Шестериков С.А.* Устойчивость неоднородного по толщине стержня из композитного материала // Механика композит. материалов. 1992. № 1. С. 115–118.
3. *Амензаде Р.Ю.* Выпучивание сжатого стержня, изготовленного из нелинейного материала // Учен. зап. Азерб. ун-та, 1970. № 1. С. 70.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

Москва

Поступила в редакцию
7.I.1994