

УДК 539.3

© 1996 г. П.В. КЕРЕКЕША

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О НАПРЕССОВКЕ НА УПРУГИЙ ВАЛ
ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ
МЕХАНИЧЕСКИМИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

В [1] методом факторизации решена точно контактная задача теории упругости для бесконечно длинного кругового цилиндра с напрессованной полубесконечной оболочкой толщины t . Позднее¹ задача, рассмотренная в [1], исследована с учетом винклеровского основания между цилиндром и оболочкой. При этом получено точное и приближенное решения с соответствующей оценкой погрешности.

В данной статье в отличие от указанных исследований рассмотрен случай, когда оболочка бесконечная, но имеющая различные механические и геометрические характеристики слева и справа от срединной плоскости цилиндра.

1. Постановка задачи. Пусть на бесконечный вал радиуса R напрессована с натягом r_0 бесконечная оболочка ($-\infty < \xi < +\infty$) с кусочно-постоянными механическими и геометрическими характеристиками (точка раздела $\xi = 0$). На оболочку действует радиальная нагрузка $g_0(\xi)$. Требуется найти прогибы оболочки $w_0(\xi)$, изгибающий момент $M_0(\xi)$ и контактное напряжение $p_0(\xi)$.

Обозначим радиальные смещения поверхностных точек вала через $u_0(\xi)$. Эти смещения можно определить по формулам [1]:

$$u_0(\xi) = \lambda_0 p_0(\xi) + \frac{\theta_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 \left(\frac{\xi - \eta}{R} \right) p_0(\eta) d\eta, \quad -\infty < \xi < +\infty \quad (1.1)$$

$$\theta_0 = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{E_0}, \quad v_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-it\xi) dt}{(I_0^2 / I_1^2 - 1)t^2 - 2(1 - \nu_0)}$$

Здесь λ_0 – коэффициент винклеровского основания, E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона для цилиндра, $I_0(t)$ и $I_1(t)$ – функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и первого порядков. Прогибы оболочки должны удовлетворять условию [1]:

$$D(\xi) \frac{d^4 w_0(\xi)}{d\xi^4} + \frac{E(\xi)t(\xi)}{R^2} w_0(\xi) = g_0(\xi) - p_0(\xi), \quad -\infty < \xi < +\infty \quad (1.2)$$

$$D(\xi) = \begin{cases} D_1, & \xi > 0 \\ D_2, & \xi < 0 \end{cases}, \quad E(\xi) = \begin{cases} E_1, & \xi > 0 \\ E_2, & \xi < 0 \end{cases}, \quad t(\xi) = \begin{cases} t_1, & \xi > 0 \\ t_2, & \xi < 0 \end{cases}$$

где $D(\xi)$ – изгибная жесткость, $E(\xi)$ – модуль упругости оболочки, $t(\xi)$ – толщина оболочки.

Для упрощения выкладок будем предполагать, что жесткость связана соотно-

¹ Керекеша П.В. Задачи теории упругости, сводящиеся к задаче сопряжения аналитических функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.: Одесса, 1970. 11 с.

шением

$$D = t_1^3 \cdot 12^{-1} (1 - \nu_1^2)^{-1} = t_2^3 12^{-1} (1 - \nu_2^2) \quad (1.3)$$

где $\nu_{1,2}, E_{1,2}$ — соответственно коэффициенты Пуассона и модули упругости слева и справа от срединной плоскости $\xi = 0$ напессованной оболочки. Условие (1.3) означает, что изгибная жесткость слева и справа от срединной плоскости цилиндра одинакова. Условия типа (1.3) используются в теории сопротивления материалов [2]. Суть условия (1.3) заключается в том, что изменяя механические характеристики E и ν при переходе через точку $\xi = 0$ необходимо соответствующим образом варьировать геометрическую характеристику t .

Далее, поскольку имеет место напессовка с натягом r_0 , должно выполняться условие

$$u_0(\xi) - w_0(\xi) = r_0, \quad -\infty < \xi < +\infty \quad (1.4)$$

где r_0 — постоянная величина.

Наконец, должны быть выполнены условия сопряжения

$$w_0^{(j)}(+0) = w_0^{(j)}(-0) \quad (j = 0, \dots, 3) \quad (1.5)$$

Условия (1.5) означают непрерывность прогиба оболочки, углов поворота, изгибающего момента и поперечных сил в точке $\xi = 0$. Задачу (1.1)–(1.5) запишем в виде

$$u(x) = \lambda_0 R^{-1} p(x) + \frac{\theta_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(x-t) p(t) dt, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.6)$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta(x) w(x) = \frac{R^3}{D} [q_0(x) - p(x)], \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.7)$$

$$u(x) - w(x) = r_0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.8)$$

$$w^{(j)}(+0) = w^{(j)}(-0) \quad (j = 0, \dots, 3) \quad (1.9)$$

$$p(x) = R p_0(xR), \quad q_0(x) = R q_0(xR), \quad u(x) = u_0(xR), \quad w(x) = w_0(xR)$$

$$\beta(x) = \begin{cases} \beta_1 = E_1 t_1 R^2 D^{-1}, & x > 0 \\ \beta_2 = E_2 t_2 R^2 D^{-1}, & x < 0 \end{cases}$$

2. Сведение задачи (1.6)–(1.9) к задаче Римана. Неизвестную функцию $W(x)$ будем искать в виде

$$w(x) = w_+(x) + w_-(x) \quad (2.1)$$

$$w_+(x) = \begin{cases} w(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad w_-(x) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ w(x), & x < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$w_{\pm}(x) = w_{1\pm}(x) + (c)_{\pm} \quad (2.3)$$

Постоянные $(c)_{\pm}$ заранее неизвестны, но обладают следующими свойствами:

$$(c)_+ = 0 \quad \text{при } x < 0 \quad \text{и} \quad (c)_- = 0 \quad \text{при } x > 0. \quad (2.4)$$

Для строгого построения решения задачи, не ограничивая общности, будем предполагать, что функция $g_0(x)$ достаточно гладкая в окрестности точки $x = 0$ и на бесконечности убывает как $O(|x|^{-(1+\xi)})$, $|x| \rightarrow 0$, $\xi > 0$.

Будем предполагать, что

$$1) w_{1+}^{(j)}(x) \in L_2[0, +\infty), \quad (j = 0, \dots, 4);$$

$$2) \text{ существуют } \lim w_{1+}^{(j)}(x) = w_{1+}^{(j)}(0) \quad \text{при } x \rightarrow +0 \quad (j = 0, \dots, 3);$$

$$3) \text{ функции } w_{1+}^{(j)}(x) \text{ исчезают при } x \rightarrow \infty \quad (j = 0, \dots, 3).$$

Аналогичными свойствами обладает функция $w_{1-}(x)$. При этом очевидно (см. [3]) в

соответствии с равенствами (2.3)–(2.4), что функции $w_{\pm}(x)$ принадлежат соответственно пространствам обобщенных функций $L_{2\pm}[1, 0]$. Другую неизвестную функцию $p(x)$ будем искать в пространстве обобщенных функций $L_2[1, 0]$.

К системе (1.6)–(1.8) применим интегральное преобразование Фурье. С учетом (1.9) система (1.6)–(1.8) перейдет в линейную алгебраическую систему относительно функций $w^{\pm}(x) = V(w_{\pm})(x)$, $U(x) = (Vu)(x)$, $P(x) = V(p)(x)$. Исключая из полученной системы функции $U(x)$ и $P(x)$, приходим к задаче Римана ($\delta(x)$ – дельта-функция Дирака):

$$W^{\pm}(x)K(x) = -W^{-}(x) + G_1(x) + \alpha\sqrt{2\pi}\delta(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.5)$$

$$G_1(x) = R^3 D^{-1} Q_0(x)(x^4 + \beta_2 \mu(x))^{-1}; \quad Q_0(x) = (Vq_0)(x) \quad (2.6)$$

$$K(x) = (x^4 + \beta_1 + \mu(x)) / (x^4 + \beta_2 + \mu(x)) \quad (2.7)$$

$$\mu(x) = R^3 D^{-1} (\lambda + \theta_0 V_0(x))^{-1}, \quad V_0(x) = ((I_0^2 / I_1^2 - 1)x^2 - 2(1 - v_0))^{-1} \quad (2.8)$$

$$\lambda = \lambda_0 R^{-1}, \quad \alpha = -(\mu(0)r_0 / (\beta_2 + \mu(0)))$$

3. Решение задачи Римана в квадратурах. Так как мы ищем решение задачи Римана (2.5) в классе обобщенных функций, то в равенстве (2.7) следует предположить, что $K(x)$ является дифференцируемой функцией и dk/dx удовлетворяет условию Гельдера на всей сомкнутой оси. Учитывая вид функции $K(x)$, нетрудно заметить, что она удовлетворяет выше перечисленным требованиям и, кроме того, индекс задачи Римана равен нулю, то есть

$$\text{Ind } K(x) = \frac{1}{2\pi} \arg K(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Тогда задача Римана (2.5) разрешима и имеет единственное решение

$$W^{\pm}(x) = \pm X^{\pm}(x) \left\{ G^{\pm}(x) + \frac{\alpha}{X^{-}(0)} \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^{\pm}} \right\} \quad (3.1)$$

$$X^{\pm}(x) = \exp \left\{ V \left(\frac{\text{sgn } t \pm 1}{2} (V^{-1}(\ln K(\tau))(t)) \right) (x) \right\} \quad (3.2)$$

$$G^{\pm}(x) = V \left\{ \frac{\text{sgn } t \pm 1}{2} (V^{-1}(G(\tau))(t)) \right\} (x) \quad (3.3)$$

$$G(\tau) = G_1(\tau) (X^{-}(\tau))^{-1} \quad (3.4)$$

Исходя из структуры функции $G(x)$, определяемой равенствами (2.6), (3.4), функция $G(x)$ принадлежит $L_2[0-4]$ (см. [3]).

Обобщенные функции $1/x^{\pm}$ определяются равенствами

$$\left(\frac{1}{x^{\pm}}, \varphi \right) = \mp \pi i \varphi(0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Далее, принимая во внимание формулу $V^{-1}(i\sqrt{2/\pi}/t) = \text{sgn } x$, будем иметь

$$w_+(x) = w_{1+}(x) + (\alpha/K(0))_+ \quad (3.5)$$

$$w_-(x) = w_{1-}(x) + (\alpha)_- \quad (3.6)$$

$$w_{1+}(x) = g_{\pm}(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g_+(t) L_+(x-t) dt + \left(\frac{\alpha}{2X^{-}(0)} \right)_+ - \left(\frac{\alpha}{2K(0)} \right)_+$$

(3.7)

$$+ \frac{\alpha}{2X^-(0)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x L_+(t) dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} L_+(t) dt \right)$$

$$w_{1-}(x) = g_-(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g_-(t) L_-(x-t) dt + \left(\frac{\alpha}{2X^-(0)} \right)_- - \left(\frac{\alpha}{2} \right)_- \quad (3.8)$$

$$- \frac{\alpha}{2\sqrt{2\pi}X^-(0)} \left(\int_{-\infty}^x L_-(t) dt + \int_0^x L_-(t) dt \right)$$

$$g_{\pm}(x) = (V^{-1}G^{\pm})(x), \quad L_{\pm}(x) = (V^{-1}L^{\pm})(x), \quad L^{\pm}(x) = X^{\pm}(x) - 1 \quad (3.9)$$

Определим предельные значения функций $w_{\pm}^{(j)}(x)$ соответственно при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Действительно

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w_{1\pm}^{(j)}(x) = 0 \quad (j = 0, \dots, 3) \quad (3.10)$$

При доказательстве утверждения (3.10) учтены равенства

$$\int_0^{\infty} L_+(t) dt = \sqrt{2\pi}L^+(0), \quad \int_{-\infty}^0 L_-(t) dt = \sqrt{2\pi}L^-(0)$$

соотношения (3.9) и принадлежность функции $G(\tau)$ пространству $L_2[0, -4]$. Легко показать, что существуют пределы $\lim_{x \rightarrow \pm 0} w_{\pm}^{(j)}(x)$, при $x \rightarrow \pm 0$. Более того, справедливы равенства $w_+^{(j)}(+0) = w_-^{(j)}(0)$ ($j = 0, \dots, 3$). В частности,

$$w_+(+0) = w_-(-0) = \alpha / X^-(0) \quad (q_0(x) = 0) \quad (3.11)$$

Итак, все условия наложенные на функции $w_{\pm}(x)$ выполняются и, следовательно, задача поставлена корректно, имеет единственное решение и функция $w(x)$ последовательно строится по формулам (3.5)–(3.9), (2.1)–(2.3), (2.8). При этом константы $(c)_{\pm}$ определяются однозначно в виде

$$(c)_+ = (\alpha / K(0))_+, \quad (c)_- = (\alpha)_-$$

Другая неизвестная функция определяется по формулам

$$p(x) = (V^{-1}P)(x), \quad p(x) = \frac{W(x)}{\lambda + \theta_0 V_0(x)} + \frac{\sqrt{2\pi}r_0\delta(x)}{\lambda + \theta_0 V_0(0)} \quad (3.12)$$

4. Приближенное решение задачи Римана (2.5). В п. 3 получено точное решение задачи Римана (2.5), но для численных расчетов оно мало пригодно. Поэтому встает проблема построения приближенного решения задачи Римана (2.5) с соответствующей оценкой погрешности. Наряду с задачей Римана (2.5) рассмотрим следующую:

$$\tilde{W}^+(x)\tilde{K}(x) = -\tilde{W}^-(x) + \tilde{G}(x) + \alpha\sqrt{2\pi}\delta(x) \quad (4.1)$$

$$\tilde{K}(x) = (x^4 + \beta_1 + \tilde{\mu}(x))(x^4 + \beta_2 + \tilde{\mu}(x))^{-1} \quad (4.2)$$

где $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{G}(x)$ – оптимальные аппроксимации функций $\mu(x)$ и $G(x)$. Через $\tilde{W}^{\pm}(x)$ обозначим приближенное решение задачи Римана (2.5), т.е. задачи Римана (4.1). При построении приближенного решения задачи Римана функция $\tilde{K}(x)$ выбирается так, чтобы ее факторизация осуществлялась элементарно. Идея приближенной факторизации заложена еще в работе Койтера [4]. Однако оценка погрешности не была дана. Для получения оценки погрешности приближенного решения задачи Римана (4.1)

используем теорему Ю.И. Черского [5]. Применительно к задачам Римана (2.5), (4.1) точное и приближенное решение искалось в пространстве функций $\Phi^\pm(x)$ таких, что

$$\frac{x\Phi^+(x)}{x+i} \in L_2[0,0], \quad \frac{x\Phi^-(x)}{x-i} \in L_2^-[0,0] \quad (4.3)$$

Благодаря классам (4.3) и конкретному выбору функционала

$$(T, \Phi^+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon x\Phi^+(x) dx$$

можно показать, что если функции $\tilde{K}(x)$ и $\tilde{G}(x)$ удовлетворяют условиям:

a) $\text{Ind } \tilde{K}(x) = 0;$

b) $\tilde{K}(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей сомкнутой оси Ox ;

c) $\max_{-\infty < x < +\infty} \left| \frac{\sqrt{x^2+1}(K(x) - \tilde{K}(x))}{x} \right| < \text{const}$

d) $\eta_0 = \gamma_0 \Delta_0 < 1$

$$\Delta_0 = \max_{-\infty < x < +\infty} |K(x) - \tilde{K}(x)|, \quad \gamma_0 = \max_{-\infty < x < +\infty} |\tilde{X}^+(x)| |\tilde{X}^-(x)|^{-1}$$

e) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon W^+(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon \tilde{W}^+(x) dx$

f) $(Q(x) - \tilde{Q}(x)) \in L_2(-\infty; +\infty)$

то $(W^\pm - \tilde{W}^\pm) \in L_2^\pm[0, 0]$. Таким образом, разность между точным и приближенным решением задачи Римана принадлежит более узкому классу, причем среднеквадратическая погрешность будет тем меньше, чем меньше величины

$$\delta_0 = \max_{-\infty < x < +\infty} |V_0(x) - \tilde{V}_0(x)|, \quad \Delta_1 = |\beta_1 - \beta_2|$$

Отметим, что для выполнения условий с) и е) необходимо положить

$$K(0) = \tilde{K}(0) \quad (V_0(0) = \tilde{V}_0(0)) \quad (4.4)$$

5. Аппроксимация функции $U(x)$. Построение функции $K(x)$ и ее факторизация.

Учитывая представление функции $V_0(x)$ будем искать функцию $\tilde{V}_0(x)$ в виде

$$V_0(x) = (bx^2 + a)^{-1} \quad (5.1)$$

Выбор константы a предопределен:

$$a = ((4 - 2(1 - v_0))^{-1})$$

Это вытекает из того, что должно выполняться условие (4.5) и что (см. [1]):

$$\lim_{x \rightarrow 0} (I_0^2 / I_1^2 - 1)x^2 = 4$$

Выбор же константы b определяется из минимизации величины δ_0 . Ограничимся рассмотрением случая, когда $v_0 = 0,3$. В качестве первого приближения положим $b = 0$, а второго $-b = 0,072$. Тогда

$$\tilde{V}_0^{(1)}(x) = V_0(0) = 5/13, \quad \tilde{V}_0^{(2)}(x) = (0,072x^2 + 2,6)^{-1} \quad (5.2)$$

Ясно, что для первого приближения $\delta_0 = 5/13$. Для второго приближения δ_0 оказалась равной 0,02412 (величины $b = 0,072$ и $\delta_0 = 0,02412$ определены на персональном

компьютере IBM PC 386 методом "пристрелки"). Построим теперь функции $\tilde{K}_1(x)$ (первое приближение) и $\tilde{K}_2(x)$ (второе приближение). С учетом формул (2.7), (2.8), (5.2) они приобретают следующий вид:

$$\tilde{K}_1(x) = \frac{x^4 + q_1}{x^4 + q_2}, \quad \tilde{K}_2(x) = \frac{x^4 + p_1 x^2 + q_1}{x^4 + p_2 x^2 + q_2} \quad (5.3)$$

$$q_{1,2} = \beta_{1,2} + \frac{2,6R^3}{D\theta_0}, \quad p_1 = p_2 = \frac{0,072R^3}{D} \quad (5.4)$$

Факторизация функций $\tilde{K}_{1,2}(x)$ ($\tilde{K}_{1,2}(x) = \tilde{X}_{1,2}^-(x) / \tilde{X}^+(x)$) определяемых равенствами (5.3), (5.4) осуществляется элементарно:

$$\tilde{X}_{1,2}^-(x) = (x - \alpha_1^{(1,2)})(x - \alpha_2^{(1,2)})(x - \alpha_3^{(1,2)})^{-1}(x - \alpha_4^{(1,2)})^{-1} \quad (5.5)$$

$$\tilde{X}_{1,2}^+(x) = (x + \alpha_3^{(1,2)})(x + \alpha_4^{(1,2)})(x + \alpha_1^{(1,2)})^{-1}(x + \alpha_2^{(1,2)})^{-1} \quad (5.6)$$

$$\alpha_{1,2}^{(1)} = \sqrt{q_1/4} \quad (i \pm 1), \quad \alpha_{3,4}^{(1)} = \sqrt{q_2/4} \quad (i \pm 1)$$

$$\alpha_{1,2}^{(2)} = \pm \sqrt{(p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4q_1})/2i}, \quad \alpha_{3,4}^{(2)} = \pm \sqrt{(p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4q_2})/2i}$$

При факторизации функции $\tilde{K}_2(x)$ учтено, что для реальных геометрических и механических характеристик для оболочки и цилиндра справедливы неравенства $p_{1,2}^2 - 4q_{1,2} > 0$.

6. Приближенные формулы для вычисления прогибов оболочки $w(x)$, приведенного момента $M(X)$ и приведенного контактного напряжения $p(x)$. Согласно формулам (2.1)–(2.3) приближенное решение запишем в виде

$$\tilde{w}_+(x) = \tilde{w}_{1+}(x) + (\alpha / K(0))_+ \quad (x > 0) \quad (6.1)$$

$$\tilde{w}_-(x) = \tilde{w}_{1-}(x) + (\alpha)_- \quad (x < 0) \quad (6.2)$$

где $\tilde{w}_{1\pm}(x)$ определяются по формулам (3.7)–(3.9) с заменой $g_{\pm}, l_{\pm}, L^{\pm}, G^{\pm}$ на $\tilde{g}_{1\pm}, \tilde{l}_{\pm}, \tilde{L}^{\pm}, \tilde{G}^{\pm}$.

Составной частью решения (6.1), (6.2) являются функции $\tilde{l}_{\pm}^{(1,2)}(x)$. Они находятся в явном виде

$$\tilde{l}_+^{(1,2)}(x) = \sqrt{2\pi} (A_1^{(1,2)} \exp(i\alpha_1^{(1,2)}x) + A_2^{(1,2)} \exp(i\alpha_2^{(1,2)}x)) \quad (6.3)$$

$$\tilde{l}_-^{(1,2)}(x) = \sqrt{2\pi} (A_3^{(1,2)} \exp(-i\alpha_3^{(1,2)}x) + A_4^{(1,2)} \exp(-i\alpha_4^{(1,2)}x)) \quad (6.4)$$

$$A_1^{(1)} = \sqrt[4]{q_2/4} - \sqrt[4]{q_1/4}, \quad A_2^{(1)} = -\sqrt{q_2/q_1} A_1^{(1)}$$

$$A_3^{(1)} = -A_1^{(1)}, \quad A_4^{(1)} = \sqrt{q_1/q_2} A_1^{(1)}$$

$$A_3^{(2)} = (\alpha_1^{(2)}\gamma + \beta)(\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)})^{-1}, \quad A_4^{(2)} = (\alpha_2^{(2)}\gamma + \beta)(\alpha_2^{(2)} - \alpha_1^{(2)})^{-1}$$

$$\gamma = \alpha_3^{(2)} + \alpha_4^{(2)} - \alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)}, \quad \beta = \alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)} - \alpha_3^{(2)}\alpha_4^{(2)}$$

Здесь функции $\tilde{l}_{\pm}^{(1)}(x)$, определяемые формулами (6.3), (6.4), соответствуют первому приближению, а $\tilde{l}_{\pm}^{(2)}(x)$ – второму. Отметим, что если нагрузка на оболочку отсутствует ($q_0(x) = 0$), то через функции $\tilde{l}_{\pm}(x)$ определяются приближенно напряженное состояние оболочки и цилиндра, которые возникают за счет напрессовки.

Приближенное значение изгибающих моментов находим по формуле

$$\tilde{M}_{\pm}^{(1,2)}(x) = Dd^2 \tilde{w}_{\pm}(x) / dx^2 \quad (6.5)$$

а приближенное приведенное контактное напряжение $\tilde{p}(x)$ по формуле

$$\tilde{p}^{(1,2)}(x) = \frac{r_0}{\theta_0 V_0(0) + \lambda} + V^{-1} \left(\frac{\tilde{W}^{(1,2)}}{\lambda + \theta_0 V_0(0)} \right) (x) \quad (6.6)$$

Из равенств (3.12), (6.6) с учетом условия (4.4) вытекает, что разность между точным и приближенным приведенным контактным напряжением принадлежит более узкому пространству $L_2(-\infty, +\infty)$. При этом справедливы формулы

$$\tilde{f}^{(1,2)}(+\infty) = f(+\infty) = \frac{\alpha(K(0))^{-1} + r_0}{\lambda + \theta_0 V_0(0)} = \frac{\beta_1 r_0}{((\lambda + \theta_0 V_0(0))\beta_1 + R^3 / D)}$$

$$\tilde{f}^{(1,2)}(-\infty) = f(-\infty) = \frac{\alpha + r_0}{\lambda + \theta_0 V_0(0)} = \frac{\beta_2 r_0}{(\lambda + \theta_0 V_0(0))\beta_2 + R^3 / D}$$

7. Численные результаты. Пусть $E_0 = 2,1 \cdot 10^5$ Н/мм², $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0 = 0,3$, $\theta_0 = \frac{20}{21} \cdot 10^{-7}$, $E_2 = KE_1$, $t_2 = 10^{-1}R$, $t_1 = t_2 \sqrt[3]{K}$, $D = D_1 = D_2 = E_2 R^3 / 120$, $r_0 = R \cdot 10^{-3}$, $R = 10^2$ мм, $g_0(x) = 0$, $\lambda = 0$

Тогда согласно (5.4) будем иметь

$$q_1 = \beta_1 + 32760 \cdot 10^5 / E_2, \quad q_2 = \beta_2 + 32760 \cdot 10^5 / E_2$$

$$\beta_1 = 12K^{-2/3}, \quad \beta_2 = 12, \quad p_1 = p_2 = 907,2 \cdot 10^5 / E_2, \quad V_0(0) = 5 / 13$$

Таким образом, приближенные решения будут зависеть от величин E_1 или E_2 и K . Для различных сочетаний они будут различны.

Благодаря формулам (3.1), (6.3)–(6.6) и очевидным соотношениям $\tilde{p}_0(\xi) = R^{-1} \tilde{p}(x)$, $\tilde{M}_0(\xi) = \tilde{M}(x)R^{-2}$, $\xi = xR$ легко построить эпюры приближенных значений изгибающего момента $M_0(\xi)$ и приближенного контактного напряжения $p_0(\xi)$. Для иллюстрации изобразим $\tilde{M}_0^{1,2}(\xi)$ (фиг. 1, 2) и $\tilde{p}_0^{1,2}(\xi)$ (фиг. 3, 4) в случае трех сочетаний оболочки (сталь – алюминий: $E_2 = 2,1 \cdot 10^5$ Н/мм², $K = 3$; медь – алюминий: $E_2 = 1,1 \cdot 10^5$ Н/мм², $K = 11/7$; латунь – алюминий: $E_2 = 0,75 \cdot 10^5$ Н/мм², $K = 15/14$).

На фиг. 1, 2 кривые 1–3 характеризуют приближенные значения изгибающего момента $M_0^{(1,2)}(\xi)$ при $E_1 = 0,7 \cdot 10^5$ Н/мм². Кривая 1 соответствует $k = 3$; кривая 2 – $k = 11/7$; кривая 3 – $k = 15/14$. Отметим, что на фиг. 1, 2 эпюры приближенных значений изгибающих моментов $M_0^{(1,2)}(\xi)$ изображены лишь при $\xi \geq 0$. При $\xi \leq 0$ картина изменения $M_0^{(1,2)}(\xi)$ аналогична. Необходимо только учесть, что функция $M_0^{(1,2)}(\xi)$ почти симметрична относительно начала координат.

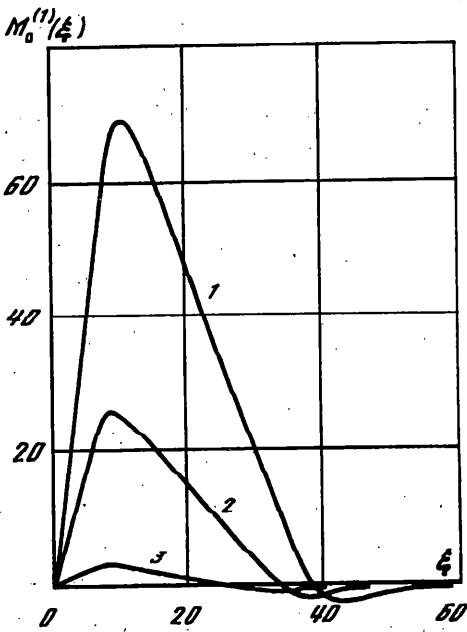
На фиг. 3, 4 кривые 1–3 характеризуют приближенное контактное напряжение $p_0^{(1,2)}(\xi)$ при $E_1 = 0,7$ Н/мм². Кривая 1 соответствует $k = 3$; кривая 2 – $k = 11/7$; кривая 3 – $k = 15/14$.

Из фиг. 1–4 видно, что при $k = 15/14$ картина напряженного состояния цилиндра и оболочки практически совпадает со случаем однородной оболочки.

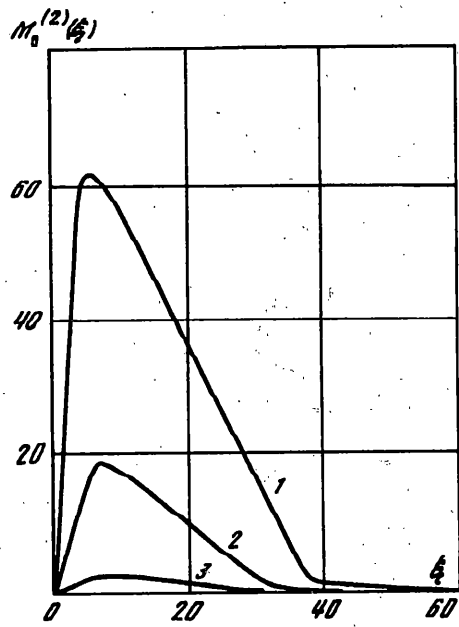
8. Случай винклеровского основания. Рассмотрим поставленную задачу в случае, когда поверхностные перемещения точек вала связаны соотношением

$$u_0(\xi) = \rho_0 p_0(\xi), \quad \rho_0 = \text{const}, \quad -\infty < \xi < +\infty \quad (8.1)$$

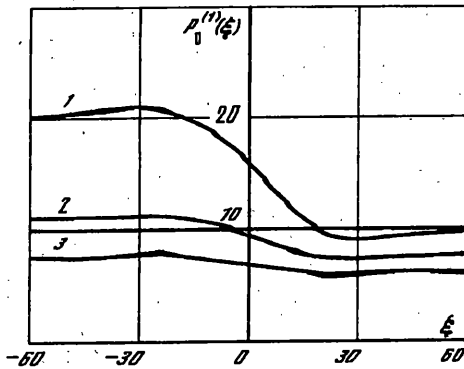
В такой постановке контактная задача решается сравнительно просто. Она приводится к решению двух обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с использованием условий (1.2)–(1.4). Однако оказалось, что эффективнее



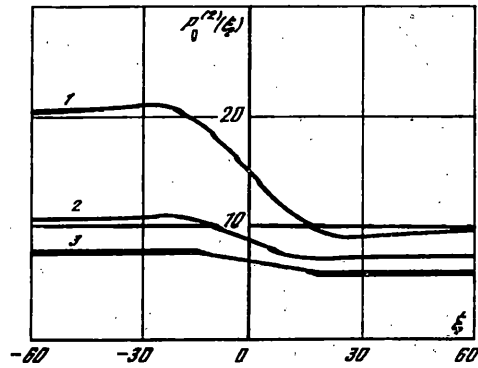
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

свести указанную задачу к задаче Римана (здесь обозначения те же, что и в п. 1):

$$W^+(x)K(x) = -W^-(x) + \alpha\sqrt{2\pi}\delta(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (8.2)$$

$$K(x) = \frac{x^4 + q_1}{x^4 + q_2}, \quad q_{1,2} = \beta_{1,2} + R^3 / D\rho, \quad \rho = \rho_0 R^{-1} \quad (8.3)$$

Константа α с учетом (8.1) приобретает вид

$$\alpha = -\frac{R^3}{\rho D} \frac{r_0}{\beta_2 + R^3 / D\rho} \quad (8.4)$$

Решение задачи Римана (8.1) строится легко. Функции $w_{\pm}(x)$ определяются по тем же формулам (3.5)–(3.9). Факторизация $K(x)$ и нахождение функций $l_{\pm}(x)$ осуществляются точно также, как и в п. 5, но с учетом соотношений (8.3)–(8.4).

Точное значение изгибающего момента находится из равенства

$$M_{\pm}(x) = Dd^2 w_{\pm}(x) / dx^2 \quad (8.5)$$

При этом следует обратить внимание на то, что структура функции, определяемая формулой (8.5) совпадает со структурой функции $\tilde{M}_{\pm}^{(1)}(x)$, определяемой формулой (6.5). Что же касается приведенного контактного $p(x)$, то оно вычисляется по формуле

$$p(x) = (w(x) + r_0) / \rho \quad (8.6)$$

9. Сопоставление результатов и выводы. Анализ формул (6.5), (6.6), (8.5), (8.6) показывает, что решение задачи разд. 8 полностью совпадает с первым приближением решения исходной задачи при условии, что

$$\rho = \lambda + \theta_0 V_0(0) \quad (9.1)$$

Таким образом, в первом приближении поставленную задачу можно решать как задачу с винклеровским основанием, но при соответствующем выборе (9.1) коэффициента Винклера. Следует однако отметить, что абсолютная погрешность (см. фиг. 1–4) незначительна для $r_0 = 10^{-3}$ В. Если же r_0 увеличивать, то абсолютная погрешность увеличивается. Естественно, что в этом случае надо пользоваться более точным вторым приближением.

Замечание. Если отказаться от выполнения условия (1.3), то поставленная задача сводится к так называемой "нагруженной" задаче Римана, свободный член которой содержит две искомые постоянные $C_1 = w(0)$ и $C_2 = w'(0)$. Решение такой задачи принципиальных затруднений не вызывает. Усложняется лишь алгоритм построения решения, связанный с фиксированием констант C_1 и C_2 .

Автор глубоко признателен Г.Я. Попову за внимание к работе и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г.Я. К решению контактных (смешанных) задач теории упругости для бесконечно длинного кругового цилиндра // Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1964. Т. 17. № 4. С. 51–62.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 379 с.
3. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
4. Koiter W.T. Approximate solution of with applications Pt. 1–3. // Proc. Bd. 57. No. 5. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. 1954. P. 558–579.
5. Черский Ю.И. К решению смешанных задач для уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 647–662.

Одесса

Поступила в редакцию
17.V.1995