

УДК 531.3

© 1996 г. Б.Р. КЛЕПФИШ, А.А. МЕЛИКЯН

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ДИСКОВОГО КУЛАЧКА В ПЛОСКОМ МЕХАНИЗМЕ

Рассматривается кулачковый механизм с коромысловым толкателем, расположенный в горизонтальной плоскости. Выведены уравнения движения этого механизма; предложена методика оптимизации формы кулачка (в смысле равномерности хода), основанная на решении задачи оптимального управления полученной динамической системой. Близкие задачи рассматривались в работах [1, 2]. Развитый подход может быть перенесен на другие кинематические схемы кулачковых механизмов.

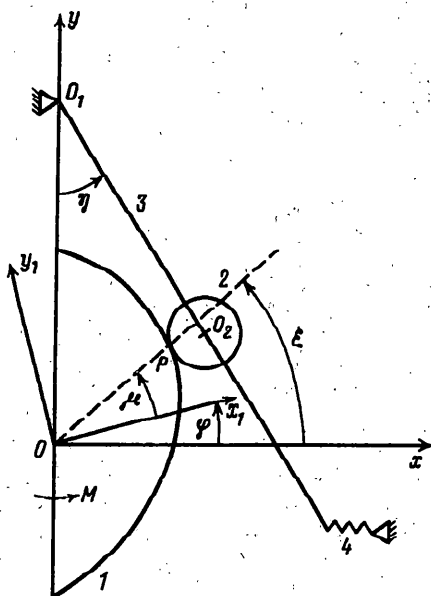
1. Уравнения движения. В движении исследуемого механизма (фиг. 1) выделяются следующие фазы: подъем толкателя, выстой и сброс нагрузки. Фрагменты профиля кулачка, соответствующие выстоям, представляют собой дуги окружностей заданных радиусов. Таким образом, определению подлежат лишь части профиля, обеспечивающие остальные фазы движения, причем наибольший интерес представляет участок, соответствующий подъему толкателя.

Кинематическая схема механизма изображена на фиг. 1. Введены две системы координат с центром в точке O : неподвижная декартова система координат xOy и вращающаяся вместе с кулачком система x_1Oy_1 . В начальный момент времени оси систем совпадают.

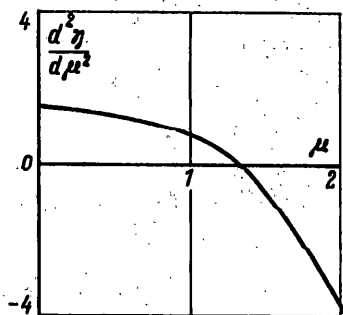
Ось вращения кулачка, к которой приложен крутящий момент M , проходит через начало координат перпендикулярно плоскости рисунка. Вращение кулачка 1 происходит против часовой стрелки. Круговой ролик 2 радиуса r , контактируя с кулачком, вращается без проскальзывания вокруг O_2 . Ось вращения ролика зафиксирована на рычаге 3 , который может вращаться в плоскости чертежа вокруг точки O_1 . Ролик прижимает к кулачку пружина 4 .

Зависимость $\rho = \rho(\mu)$, $0 \leq \mu \leq 2\pi$, определяющую профиль кулачка, будем считать заданной в полярных координатах (ρ, μ) (ρ – радиус точки, μ – полярный угол) в подвижной системе x_1Oy_1 . Пусть ξ – полярный угол точки касания ролика и кулачка в неподвижной системе координат xOy , а φ – угол поворота подвижной системы относительно неподвижной, фиг. 1. Тогда в предположении, что ролик в течение всего движения контактирует с кулачком, расстояние от оси вращения до точки касания ролика и кулачка в любой момент определится как $\rho(\mu)$, где $\mu = \xi - \varphi$.

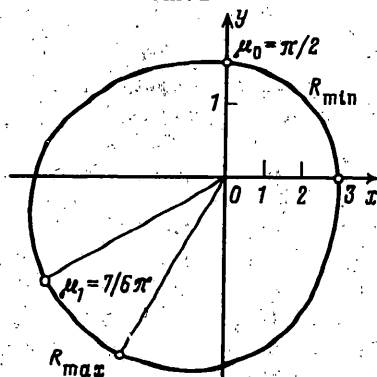
Для описания исследуемой механической системы удобно использовать три параметра ξ , η и φ , где η – угол поворота рычага, несущего ролик, а φ – угол поворота кулачка. Величину η будем отсчитывать от Oy , а φ – от Ox , соответственно, против часовой стрелки. Поскольку кулачковый механизм имеет одну степень свободы, то указанные переменные должны удовлетворять некоторым уравнениям связей. Будем полагать, что η и φ являются обобщенными лагранжевыми координатами, а ξ – вспомогательной переменной, зависящей от η и φ . Связь между η и φ будет введена в уравнения движения с помощью множителя Лагранжа, а функциональная зависимость ξ от η и φ использована для получения выражений, которые потребуются при выводе уравнений. Конкретный вид связи между η и φ , а также функциональную зависимость ξ от η и φ определим ниже.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Приведем основные соотношения. Кинетическая энергия системы может быть представлена в виде

$$T = \frac{1}{2} \left[(J_1 + J_2 \frac{\rho^2}{r^2}) \dot{\varphi}^2 + (J_3 + ml^2 + J_2 \frac{l^2}{r^2}) \dot{\eta}^2 + 2J_2 \frac{\rho l}{r^2} \sin(\xi - \eta) \dot{\varphi} \dot{\eta} \right] \quad (1.1)$$

Здесь J_1, J_3 – моменты инерции кулачка и рычага, соответственно, относительно осей их вращения, m и J_2 – масса ролика и его момент инерции относительно точки O_2 , l – расстояние между O_1 и O_2 .

Выражение для кинетической энергии кулачка и рычага как твердых тел, вращающихся вокруг фиксированной оси, записывается стандартным способом [3]. Скорость ролика вычисляется из уравнений связей, отражающих условие отсутствия проскальзывания (совпадение скоростей ролика и кулачка в точке касания).

При подсчете потенциальной энергии V следует учитывать только вклад пружины, так как механизм расположен в горизонтальной плоскости. Следовательно,

$$V = \frac{1}{2} c (l_1 \sin \eta - x_0)^2 \quad (1.2)$$

где c – коэффициент жесткости пружины, l_1 – расстояние от O_1 до точки крепления пружины к рычагу; x_0 – начальная затяжка. В качестве уравнения связи примем следующее требование на скорость центра ролика (b – расстояние между O и O_1):

$$l \dot{\eta} (b \sin \eta - \rho \cos(\xi - \eta)) - \rho \dot{\varphi} (b \cos \xi - l \cos(\xi - \eta)) = 0 \quad (1.3)$$

означающее, что с одной стороны центр ролика принадлежит рычагу и имеет скорость $l\dot{\eta}$, с другой – движется вокруг мгновенного центра скоростей.

В выражение для кинетической энергии (1.1) и в уравнение связи (1.3) входит

переменная ξ , которая является функцией от обобщенных координат η , φ . Для получения связи между ξ , η , φ спроектируем векторный четырехугольник $OP_1O_2O_1$, фиг. 1, на оси декартовых координат; после преобразований полученных уравнений можно получить соотношение, выражающее неявно ξ через η и φ . Кроме того, нам понадобится условие совпадения нормалей к профилям ролика и кулачка в точке касания:

$$\rho^2 + l^2 + b^2 - r^2 - 2bl \cos \eta = 2\rho(b \sin \xi - l \sin(\xi - \eta))$$

$$d\rho/d\mu(b \sin \xi - \rho - l \sin(\xi - \eta)) + \rho(b \cos \xi - l \cos(\xi - \eta)) = 0 \quad (1.4)$$

Напомним, что здесь $\rho = \rho(\mu)$, $d\rho/d\mu$ – производная функции $\rho = \rho(\mu)$, задающей профиль кулачка.

С использованием соотношений (1.1)–(1.4) уравнения Лагранжа для рассматриваемой механической системы со связью могут быть записаны в виде [3]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = M - \lambda \rho(b \cos \xi - l \cos(\xi - \eta))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial T}{\partial \eta} = -\frac{\partial V}{\partial \eta} + \lambda l(b \sin \eta - \rho \cos(\xi - \eta)) \quad (1.5)$$

где λ – множитель Лагранжа (неизвестная функция времени), M – крутящий момент, обобщенная сила, соответствующая координате φ .

Соотношения (1.3)–(1.5) составляют замкнутую систему дифференциальных и конечных уравнений, путем интегрирования и решения которых можно найти траекторию $\eta(t)$, $\varphi(t)$ рассматриваемой системы, соответствующую некоторым начальным условиям и заданной зависимости $\rho = \rho(\mu)$.

На практике вычисления удобно вести, исключив из рассмотрения множитель λ и переходя к системе из трех дифференциальных уравнений (первого порядка) и конечных уравнений (1.4). Это исключение можно провести следующим образом.

Поскольку равенство (1.3) выполняется во все моменты времени тождественно, то будет равна нулю и производная по времени левой части (1.3). Объединим соотношения (1.5) с равенством, полученным дифференцированием левой части (1.3), и рассмотрим полученную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора X :

$$AX = B, \quad X = (d^2\varphi/dt^2, d^2\eta/dt^2, \lambda) \quad (1.6)$$

Здесь A – матрица 3×3 , элементы которой выглядят следующим образом

$$A_{11} = J_1 + J_2 \frac{\rho^2}{r^2}, \quad A_{12} = A_{21} = J_2 \frac{\rho l}{r^2}, \quad A_{22} = J_3 + ml^2 + J_2 \frac{l^2}{r^2}$$

$$A_{13} = \rho(b \cos \xi - l \cos(\xi - \eta)), \quad A_{23} = -l(b \sin \eta - \rho \cos(\xi - \eta))$$

$$A_{32} = -A_{23}, \quad A_{31} = -A_{13}, \quad A_{33} = 0 \quad (1.7)$$

Компоненты B_i вектора (B_1, B_2, B_3) вычисляются очевидным образом, при этом B_1 , B_2 выражаются через производные

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = J_2 r^{-2} \left[\varphi^2 \rho \rho' \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} + l \dot{\varphi} \dot{\eta} \left(\rho' \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \sin(\xi - \eta) + \rho \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \cos(\xi - \eta) \right) \right] \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = J_2 r^{-2} \left[\varphi^2 \rho \rho' \frac{\partial \mu}{\partial \eta} + l \dot{\varphi} \dot{\eta} \left(\rho' \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \sin(\xi - \eta) + \rho \cos(\xi - \eta) \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} - 1 \right) \right) \right] \quad (1.9)$$

Выражения для частных производных ξ по ϕ и по η получены, способом, который приведен в [4]. Кроме того, поскольку $\mu = \xi - \phi$, то из связей системы координат, вращающейся вместе с кулачком и неподвижной системы $\partial\mu/\partial\phi = \partial\xi/\partial\phi - 1$, $\partial\mu/\partial\eta = \partial\xi/\partial\eta$. Штрихами здесь и ниже обозначены производные соответствующих функций по переменной μ .

Разрешая систему (1.6), можно получить следующее выражение для первой компоненты $d^2\phi/dt^2$ вектора X :

$$d^2\phi/dt^2 = (-B_1 A_{23} A_{32} + B_2 A_{13} A_{32} + B_3 (A_{12} A_{23} - A_{13} A_{22}))/\det A \quad (1.10)$$

где $\det A$ – определитель матрицы A из (1.6).

Правая часть (1.10) зависит от ϕ , η , η' , ρ , ρ' , ρ'' . Выразив η через ϕ из равенства (1.3), получим совместно с (1.10) динамическую систему, которую замыкают соотношения (1.4). Численное решение данной системы позволяет определить траекторию механической системы, соответствующую фиксированному профилю кулачка $\rho = \rho(\mu)$.

2. Задача оптимизации формы кулачка. Как отмечалось выше, кулачок представляет собой диск, профиль которого состоит из четырех участков. Два участка – это дуги окружностей заданных радиусов R_{\min} и R_{\max} , $R_{\max} > R_{\min}$, соответствующих выстоям. Движение ролика по этим окружностям обеспечивает пребывание толкателя в предельных положениях. Оставшиеся два участка профиля – кривые, гладко сопряженные с окружностями, движение ролика по этим кривым соответствует подъему толкателя и сбросу нагрузки. Таким образом, задача оптимизации формы кулачка сводится к оптимизации этих кривых из безотрывной модели движения.

Сформулируем задачу оптимизации. Постановка задачи состоит из описания управляемой динамической системы, указания оптимизируемого функционала, ограничений на управляющие и фазовые переменные, начальных и граничных условий.

В соотношениях (1.3)–(1.10), рассматриваемых в некоторый момент времени t , фигурируют лишь мгновенные значения величин ρ , $d\rho/d\mu$, ρ'' . Это обстоятельство позволяет динамическую систему, представленную в предыдущем разделе, привести к виду управляемой динамической системы с управляющим параметром $u = \rho''$. Перейдем к производным по параметру μ , используя равенства $d\eta/d\mu = \eta'/\mu$ и так далее. Тогда, рассматривая (1.3) совместно с (1.4), (1.10), получим управляемую систему вида

$$d\eta/d\mu = F(\eta, \phi', \rho), \quad d^2\phi/d\mu^2 = F_1(\eta, \phi', \xi, \rho, d\rho/d\mu, u) \quad (2.1)$$

$$\rho'' = u, \quad \mu \in [\mu_0, \mu_1], \quad \rho(\mu_0) = R_{\min}, \quad \rho(\mu_1) = R_{\max}$$

К системе (2.1) следует добавить начальные значения величин η , ϕ , ϕ' .

Значения $\eta(\mu_0)$ и $\rho(\mu_0)$ в (2.1) соответствуют касанию ролика с кулачком в точке сопряжения окружности радиуса R_{\min} и искомой кривой, величина $\eta(\mu_0)$ легко вычисляется из геометрических соображений.

Зависимость $\rho = \rho(\mu)$ определяется выбором управляющей функции $u = \rho''$, $\mu \in [\mu_0, \mu_1]$, значениями $\rho(\mu_0)$, $d\rho/d\mu(\mu_0)$, $\rho(\mu_1)$, $d\rho/d\mu(\mu_1)$. На значения функции $d\rho/d\mu(\mu)$ на концах интервала $[\mu_0, \mu_1]$ наложены (фазовые) ограничения

$$d\rho/d\mu|_{\mu=\mu_0}, \quad \mu_1 = 0 \quad (2.2)$$

Условия (2.2) обеспечивают гладкость сопряжения синтезируемого участка профиля с окружностями радиусов R_{\min} и R_{\max} , соответствующих фазам выстоев.

Будем полагать, что в исследуемой модели усилие используемой пружины соответствует не только собственно пружине, но и воспроизводит (имитирует) также силу, приложенную к рычагу, возникшую в результате взаимодействия рычага и толкателя, и введем функционал, оценивающий движение исследуемого механизма в

рамках представленной модели:

$$I = \int_{\mu_0}^{\mu_1} (\eta''(\mu))^2 d\mu \quad (2.3)$$

Эта величина, очевидно, характеризует неравномерность движения рычага, несущего ролик.

В качестве ограничений на управляющую функцию укажем соотношения, отражающие тот факт, что кривизна профиля не отрицательна (условие выпуклости), а радиус кривизны не меньше радиуса ролика

$$\rho + \frac{2(dp/d\mu)^2}{\rho} - \frac{(\rho^2 + (dp/d\mu)^2)^{3/2}}{r\rho} \leq u \leq \rho + \frac{2(dp/d\mu)^2}{\rho} \quad (2.4)$$

Подводя итог, отметим, что задача оптимизации формы кулачка представлена в виде задачи оптимального управления с фиксированным временем для динамической системы (2.1), функционала (2.3), а также начальных и граничных условий и ограничений (2.2), (2.4) [5–7]. Это стандартный набор соотношений, позволяющий использовать для решения задачи известные методы оптимизации.

3. Результаты расчетов и их анализ. Сформулированная выше задача оптимального управления решалась численно градиентным методом [6, 7].

В качестве начального приближения по управлению была выбрана функция, соответствующая зависимости $\rho = \rho(\mu)$, заданной в форме кубического сплайна [8], удовлетворяющего граничным условиям в (2.1).

Матрицы Якоби правых частей управляемой динамической системы, градиент подынтегрального выражения (2.3) по фазовым переменным и его производная по переменной управления определялись численно по конечно-разностным формулам. Подбор длин соответствующих интервалов осуществлялся в соответствии с рекомендациями [9]. Ограничения на управления (2.4) учитывалось методом штрафных функций. Окончание счета происходило после выполнения необходимых условий оптимальности с заданной точностью.

Решение задачи проводилось при различных значениях крутящего момента, начальной скорости вращения и максимального радиуса кулачка (R_{\max}) для следующих значений параметров (в условных безразмерных единицах): $R_{\min} = 3$; $r = 1,5$; $J_1 = 175$; $J_2 = J_3 = 0,05$; $b = 8,5$; $l = 5,5$; $c = 1000$; $m = 0,8$; длина интервала интегрирования составляла $(\mu_1 - \mu_0) = 2/\pi$.

Значения l_1, x_0 выбирались из геометрических соображений так, чтобы началу движения соответствовало свободное положение пружины.

Опишем характерные результаты. Оптимальные формы кулачка, получающиеся при различных значениях величин крутящего момента и начальной скорости вращения отличались лишь в пределах погрешности проводимых вычислений. Во всех случаях полученное оптимальное значение управляющей функции находилось внутри допустимой области.

На фиг. 2 представлена соответствующая оптимальному решению зависимость $\eta''(\mu)$ для значений $M = 75$, $\varphi'(\mu_0) = 32$, $R_{\max} = 4,0$, демонстрирующая близость движения рычага к равномерному и отсутствие скачков. Отметим, что обобщенные реакции связи [3] изменяют свой знак при изменении знака $\eta''(\mu)$. На фиг. 3 показан кулачок, соответствующая часть профиля которого рассчитана предложенным методом. Участок, соответствующий сбросу нагрузки, построен из соображений симметрии.

Таким образом, изложенный подход позволил получить оптимальную форму кулачка и детализированные характеристики движения. Это говорит о применимости методики при проектировании как низкоскоростных, так и высокоскоростных механизмов, в которых, если не учитывать динамических эффектов, могут возникать

значительные усилия, приводящие к отрыву ролика от кулачка во время движения. Кроме того, подход основан на точной постановке и решении задачи оптимального управления, что обеспечивает полное использование резервов исследуемой кинематической схемы по выбранному критерию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sadler J.P., Yang Zhijia.* Optimal design of cam-linkage mechanisms for dynamic-force characteristics // *Mech. and Mach. Theory.* 1990. V. 25. No. 1. P. 41–57.
2. *Тартаковский И.И.* К оптимизационному синтезу кулачковых механизмов с силовым замыканием // *Теория механизмов и машин.* Харьков: Основа, 1990. No. 49. С. 17–23.
3. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. Т.2. М.: Высш. шк., 1973. 470 с.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
6. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
7. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.
8. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
9. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.II.1995