

УДК 539.3

© 1996 г. В.М. АХУНДОВ

## **ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛАСТОМЕРНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ СЛОИСТОГО СТРОЕНИЯ**

Ранее была построена математическая модель осесимметричного деформирования многослойных оболочек вращения из эластомерных материалов и предложен итерационный метод расчета таких оболочек [1]. В основу модели положена гипотеза обжимаемого нормального элемента. Согласно гипотезе, нормальный элемент оболочки при деформировании сохраняет свою прямолинейность и нормальность к поверхности приведения, испытывая переменные по толщине каждого слоя относительные удлинения. Модедь дана в строгом соответствии с исходными положениями кинематической гипотезы. Связи между напряжениями и деформациями имеют общий неллинейный вид, определяемый упругими потенциалами материалов слоев. Относительные удлинения тангенциальных и нормальных элементов в каждом слое изменяются вдоль толщинной координаты по криволинейным зависимостям. В предложенном итерационном методе по ходу вычислительного процесса производится итерационное уточнение параметров рассчитываемой оболочки в каждой точке дискретизации решаемой краевой задачи. Вместе с тем численный алгоритм является довольно сложным, что затрудняет его использование в практике инженерных расчетов.

В публикуемой работе построена прикладная модель осесимметричного деформирования тонких оболочек вращения из эластомерных слоев на основе указанной гипотезы обжимаемого нормального элемента. Деформационные соотношения, определяющие тангенциальные удлинения в оболочке, получаются линеаризацией соответствующих соотношений модели [1] по толщинной координате в пределах каждого слоя. Линеаризация тангенциальных удлинений дополняется упрощениями, обусловленными тонкостью оболочки. В итоге деформационные соотношения оболочки приобретают структурированный вид. Тангенциальные удлинения изменяются вдоль толщинной координаты по законам ломаных линий, звенья которых в каждом слое представляют собой прямолинейные отрезки. Удлинения нормальных элементов изменяются вдоль толщинной координаты по законам ломаных линий, звенья которых являются криволинейными отрезками. Такие деформационные соотношения позволили разработать более простой и удобный вариант итерационного метода расчета эластослойных оболочек вращения. Сопоставляются расчетные и экспериментальные данные, относящиеся к резиновому коническому амортизатору осевого сжатия. Решены задачи о раздувании внутренним давлением двухслойной торообразной и трехслойной цилиндрической оболочек из резиновых материалов с разными упругими параметрами.

**1. Описание математической модели.** Рассмотрим тонкую многослойную оболочку осесимметричного строения, составленную из  $N$  эластомерных (высокоэластичных) слоев. Толщины слоев полагаем постоянными или плавно изменяющимися в меридиональном направлении. За поверхность приведения (базовую координатную поверхность) удобно принять внутреннюю граничную поверхность оболочки. Поверхность приведения относим к ортогональной системе координат, определяемой линиями главных кривизн. Поперечную координату  $z$  отсчитываем вдоль внешней нормали к поверхности приведения. В качестве меридиональной координаты принимаем длину  $t$  образующей координатной поверхности от точки граничного контура до текущей точки. Поскольку оболочка деформируется осесимметрично, то все величины, характеризующие ее состояние, являются функциями одной переменной  $t$ .

Введем следующие обозначения:  $h$  – полная толщина пакета слоев оболочки;  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя;  $z_k, z_{k+1}$  – значения координаты  $z$  для нижней и верхней поверх-

ностей, ограничивающих  $k$ -й слой;  $k_1, k_2$  – главные кривизны координатной поверхности оболочки;  $r$  – расстояние, на которое точки координатной поверхности отстоят от оси  $x$  симметрии оболочки;  $\theta$  – угол, составляемый нормалью к координатной поверхности с осью симметрии. Величины, относящиеся к деформированной конфигурации оболочки, отмечаются звездочкой.

Для деформированной оболочки в соответствии с принятой кинематической гипотезой обжимаемого нормального элемента имеют место геометрические зависимости

$$dx^* / dx^* = \sin \theta^*, \quad dr^* / dt^* = \cos \theta^* \quad (1.1)$$

$$x^* = x + u_x, \quad r^* = r + u_r, \quad dx^* = \lambda_1 dt$$

где  $\lambda_1$  – кратность удлинения координатной поверхности в меридиональном направлении. Из соотношений (1.1), учитывая что  $dx/dt = \sin \theta$ ,  $dr/dt = \cos \theta$ , получим дифференциальные уравнения для осевого и радиального перемещений координатной поверхности оболочки

$$du_x / dt = \lambda_1 \sin \theta^* - \sin \theta, \quad du_r / dt = \lambda_1 \cos \theta^* - \cos \theta \quad (1.2)$$

В (1.2) добавим уравнение для угла ориентации нормального элемента в деформированной оболочке

$$d\theta^* / dt = \lambda_1 k_1^* \quad (1.3)$$

которое вытекает из определения меридиональной кривизны деформированной координатной поверхности. Запишем также относящиеся к координатной поверхности соотношения

$$k_2 = \sin \theta / r, \quad \lambda_2 = r^* / r, \quad k_2^* = \sin \theta^* / r^* \quad (1.4)$$

где  $\lambda_2$  – кратность удлинения координатной поверхности в окружном направлении.

Используя кинематическую гипотезу обжимаемого нормального элемента, выразим удлинения слоев оболочки через удлинения и кривизны координатной поверхности и толщины деформированных слоев.

Для недеформированного состояния длина меридионального элемента, находящегося в  $k$ -ом слое на расстоянии  $z$  от координатной поверхности

$$dL = dt(1 + z k_1), \quad k_1 = d\theta / dt, \quad z_k \leq z \leq z_{k+1} \quad (1.5)$$

В деформированной оболочке длина рассматриваемого элемента

$$dL^* = dt^*(1 + z^* k_1^*), \quad k_1^* = d\theta^* / dt^*, \quad z_k^* \leq z^* \leq z_{k+1}^* \quad (1.6)$$

Подставим в формулу  $\lambda_1^k = dL^* / dL$ , определяющую кратность удлинения элемента  $k$ -го слоя, выражение (1.5) для  $dL$  и выражение (1.6) для  $dL^*$ . Принимая во внимание последнее соотношение (1.1) и осуществляя линеаризацию по координате  $z$  в пределах рассматриваемого слоя, получим

$$\lambda_1^k = \Lambda_1^k + (z - z_k) K_1^k, \quad \Lambda_1^k = \lambda_1 (1 + z_k^* k_1^*) / (1 + z_k k_1) \quad (1.7)$$

$$K_1^k = \lambda_1 [(1 + z_{k+1}^* k_1^*) / (1 + z_{k+1} k_1) - (1 + z_k^* k_1^*) / (1 + z_k k_1)] / h_k$$

$$z_k \leq z \leq z_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Выполним разложения дробных частей выражений (1.7) в степенные ряды. Пренебрегая слагаемыми типа  $z_k^* z_k k_1^* k_1$  и слагаемыми более высоких порядков малостей,

обусловливаемых тонкостью оболочки, приходим к окончательным формулам для кратностей удлинений слоев оболочки в меридиональном направлении

$$\begin{aligned} \lambda_1^k &= \Lambda_1^k + (z - z_k)K_1^k, & \Lambda_1^k &= \lambda_1(1 + z_k^*k_1^* - z_k k_1) \\ K_1^k &= \lambda_1 \left( \frac{h_k^*}{h_k} k_1^* - k_1 \right), & z_k &\leq z \leq z_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ z_1^* &= 0, & z_k^* &= \sum_{i=1}^{k-1} h_i^* \quad (k = 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Аналогично для кратностей удлинений слоев оболочки в окружном направлении получим формулы

$$\begin{aligned} \lambda_2^k &= \Lambda_2^k + (z - z_k)K_2^k, & \Lambda_2^k &= \lambda_2(1 + z_k^*k_2^* - z_k k_2) \\ K_2^k &= \lambda_2 \left( \frac{h_k^*}{h_k} k_2^* - k_2 \right), & z_k &\leq z \leq z_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \\ z_1^* &= 0, & z_k^* &= \sum_{i=1}^{k-1} h_i^* \quad (k = 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Кратности удлинений нормального элемента оболочки в слоях из сжимаемых эластомеров определяем зависимостями

$$\lambda_3^k = \lambda_3^k(\sigma_{33}^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k) \quad (1.10)$$

( $k$  – номера слоев из сжимаемых материалов), вытекающими из соотношений упругости. Для слоев из несжимаемых эластомеров кратности удлинений нормального элемента оболочки определяем по формулам

$$x_3^k = 1 / (\lambda_1^k \lambda_2^k) \quad (1.11)$$

где  $k$  – номера слоев из несжимаемых материалов.

Таким образом, гипотеза обжимаемого нормального элемента при выполненных упрощениях приводит к законам ломаных линий (1.8)–(1.11), определяющих изменения кратностей удлинений по толщинной координате. При этом звенья ломаных линий в слоях оболочки для законов тангенциальных удлинений (1.8) и (1.9) являются прямолинейными отрезками, а звенья ломаных линий для законов нормальных удлинений (1.10) и (1.11) являются криволинейными отрезками. Деформационные соотношения (1.8)–(1.11) дополним системой интегральных соотношений, которые определяют толщины слоев в деформированной оболочке

$$h_k^* = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \lambda_3^k(\delta_{33}^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k) dz \quad (1.12)$$

$k$  – номера слоев из сжимаемых материалов

$$h_k^* = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{1}{\lambda_1^k \lambda_2^k} dz \quad (1.13)$$

$k$  – номера слоев из несжимаемых материалов.

Введем удельные усилия и удельные моменты, действующие в окружном и меридиональном сечениях слоистой оболочки и отнесенные в деформированной

метрике:

$$T_1 = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_{11}^k (1 + z^* k_2^*) dz^* \quad (1 \Leftrightarrow 2) \quad (1.14)$$

$$M_1 = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_{11}^k z^* (1 + z^* k_2^*) dz^* \quad (1 \Leftrightarrow 2)$$

Здесь  $\sigma_{11}^k, \sigma_{22}^k$  – нормальные напряжения (компоненты тензора истинных напряжений) в окружном и меридиональном сечениях оболочки для  $k$ -го слоя. Поперечная "деформированная" координата  $z^*$  для каждого из слоев определяется соотношениями

$$dz^* = \lambda_3 dz, \quad z^* = \int_{z_k}^z \lambda_3^k dz + z_k^* \quad (1.15)$$

$$z_k \leq z \leq z_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

где величины  $\lambda_3^k$  в соответствии с типом материала слоя представляются выражениями (1.10) либо (1.11).

Напряжения  $\sigma_{11}^k, \sigma_{22}^k$  и поперечное нормальное напряжение  $\sigma_{33}^k$  в условиях рассматриваемой постановки задачи совпадают с главными напряжениями. Зависимости между главными напряжениями и кратностями главных удлинений определяем на основе упругих потенциалов материалов слоев [2]. Для сжимаемых материалов эти зависимости имеют вид ( $k$  – номера слоев из сжимаемых материалов):

$$\sigma_{11}^k = \sigma_{11}^k(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k), \quad \sigma_{22}^k = \sigma_{22}^k(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k) \quad (1.16)$$

$$\sigma_{33}^k = \sigma_{33}^k(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k)$$

Для несжимаемых материалов зависимости между главными напряжениями и кратностями главных удлинений представим соотношениями ( $k$  – номера слоев из несжимаемых материалов)

$$\sigma_{11}^k = \sigma_{11}^k(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k) + S^k, \quad \sigma_{22}^k = \sigma_{22}^k(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k) + S^k \quad (1.17)$$

$$\sigma_{33}^k = \sigma_{33}^k(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k) + S^k$$

где  $S^k$  – функции гидростатического давления. Выражения (1.16) для напряжений  $\sigma_{33}^k$  позволяют определять зависимости (1.10); выражения (1.17) для напряжений  $\sigma_{33}^k$  позволяют найти функции  $S^k$ . При этом следует принять определенный закон распределения поперечных нормальных напряжений  $\sigma_{33}^k$  по толщинной координате  $z$ . Для тонкой оболочки эти напряжения можно положить равными нулю. Можно использовать линейный закон распределения поперечных нормальных напряжений

$$\sigma_{33}^k = -q_n^- + z(q_n^+ + q_n^-) / h \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.18)$$

где  $q_n^-, q_n^+$  – интенсивности внешних нормальных нагрузок на внутренней и наружной поверхностях оболочки, отнесенные к единице площади поверхностей в деформированном состоянии. Для оболочек, в которых все слои из несжимаемых материалов, можно положить

$$\sigma_{33}^k = -q_n^- + z^*(q_n^+ + q_n^-) / h^* \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.19)$$

В случае оболочек, включающих слои из сжимаемых материалов, использование закона (1.19) вместо (1.18) приводит к усложнению алгоритма расчета и потому нецелесообразно. Аналогичное замечание может иметь место и в случае использования более сложных и точных законов распределения напряжений  $\sigma_{33}^k$  по толщине оболочки.

Подставим в (1.12) и (1.13) выражения кратностей удлинений (1.8), (1.9) и применяемый закон распределения напряжений  $\sigma_{33}^k$  по толщине оболочки (например, закон (1.18) или (1.19)). Тогда система интегральных соотношений (1.12) и (1.13), определяющих толщины слоев в деформированном состоянии, приведет к виду

$$h_k^* = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \lambda_3^k(z, \lambda_1, k_1^*, \lambda_2, k_2^*, h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*) dz \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.20)$$

Форма записи (1.20) отражает функциональную зависимость толщины  $k$ -го деформированного слоя от параметров деформированной координатной поверхности и толщин предшествующих деформированных слоев. Введем в формулы (1.14) выражения напряжений (1.16) для слоев из сжимаемых материалов и (1.17) для слоев из несжимаемых материалов. Принимая во внимание (1.8)–(1.11), (1.15), используемый закон распределения напряжений  $\sigma_{33}^k$  по толщине оболочки и выполнив интегрирование по поперечной координате, найдем удельные усилия и удельные моменты в зависимости от параметров деформированной координатной поверхности и толщин деформированных слоев. Для усилия и момента, действующих в окружном сечении оболочки, эти зависимости представим в виде

$$T_1 = T_1(\lambda_1, k_1^*, \lambda_2, k_2^*, h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*) \quad (1.21)$$

$$M_1 = M_1(\lambda_1, k_1^*, \lambda_2, k_2^*, h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*)$$

Для усилия и момента, действующих в меридиональном сечении оболочки, соответственно, запишем

$$T_2 = T_2(\lambda_1, k_1^*, \lambda_2, k_2^*, h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*) \quad (1.22)$$

$$M_2 = M_2(\lambda_1, k_1^*, \lambda_2, k_2^*, h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*)$$

Условия равновесия элемента оболочки, выделенного меридиональными и окружными сечениями, представляются следующими уравнениями в удельных усилиях и моментах, отнесенными к деформированному состоянию:

$$\frac{dT_1}{dt} r^* + (T_1 - T_2) \frac{dr^*}{dt} + Qr^* \frac{d\theta^*}{dt} + q_1 \lambda_1 r^* = 0 \quad (1.23)$$

$$\frac{dQ}{dt} r^* + Q \frac{dr^*}{dt} - T_1 r^* \frac{d\theta^*}{dt} - T_2 \frac{dx^*}{dt} + q_n \lambda_1 r^* = 0$$

$$\frac{dM_1}{dt} r^* + (M_1 + M_2) \frac{dr^*}{dt} + Q \lambda_1 r^* + m_1 \lambda_1 r^* = 0$$

$$q_1 = q_1^+ (1 + h^* k_1^*) (1 + h^* k_2^*) - q_1^-$$

$$q_n = q_n^+ (1 + h^* k_1^*) (1 + h^* k_2^*) - q_n^-$$

$$m_1 = q_1^+ h^* (1 + h^* k_1^*) (1 + h^* k_2^*)$$

Здесь  $q_1^-, q_n^-, q_1^+, q_n^+$  – интенсивности нагрузок меридионального и нормального направлений, приложенных к внутренней и наружной поверхностям оболочки. Интенсивности нагрузок отнесены к единице площади поверхностей в деформированном состоянии.

**2. Итерационный метод расчета.** Вычислительный алгоритм задачи строим, принимая за основные величины перемещения координатной поверхности  $u_x, u_r$ , угол ориентации нормального элемента в деформированной оболочке  $\theta^*$ , усилия  $T_1, Q$  и момент  $M_1$ . Дифференциальные уравнения (1.2), (1.3) и (1.23) представим в нормальной относительно основных величин форме

$$du_x / dt = \lambda_1 \sin \theta^* - \sin \theta, \quad du_r / dt = \lambda_1 \cos \theta^* - \cos \theta, \quad d\theta^* / dt = \lambda_1 k_1^* \quad (2.1)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{T_2 - T_1}{r + u_r} \left( \cos \theta + \frac{du_r}{dt} \right) - Q \frac{d\theta^*}{dt} - q_1 \lambda_1$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{r + u_r} \left( \cos \theta + \frac{du_r}{dt} \right) + T_1 \frac{d\theta^*}{dt} + \frac{T_2}{r + u_r} \left( \sin \theta + \frac{du_x}{dt} \right) - q_n \lambda_1$$

$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{M_2 - M_1}{r + u_r} \left( \cos \theta + \frac{du_r}{dr} \right) + Q \lambda_1 - m_1 \lambda_1$$

Величины  $\lambda_2, k_2^*$  определяем через основные по формулам (1.4). Зависимости (1.21) и (1.22) устанавливаем проведением численного интегрирования в формулах (1.14) с использованием соотношений (1.8)–(1.11), (1.15)–(1.17) и применяемого закона распределения напряжений  $\sigma_{33}^k$  по толщине оболочки. Система уравнений (1.20) и (1.21) позволяет определить параметры деформированной координатной поверхности  $\lambda_1, k_1^*$  и толщины деформированных слоев  $h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*$ . Решение этой нелинейной системы уравнений производим дискретным методом Ньютона [3]. Используется следующий порядок вычислений. По толщине каждого слоя оболочки принимаем определенное количество точек дискретизации. Выбираем начальные значения параметров  $\lambda_1$  и  $k_1^*$ . Из первого уравнения (1.20), проводя в нем численное интегрирование, определяем  $h_1^*$ . Из второго уравнения (1.20) определяем  $h_2^*$  и так далее, пока не будут найдены значения толщин всех деформированных слоев в рассматриваемом приближении. Затем из уравнений (1.21) производим уточнение величин  $\lambda_1$  и  $k_1^*$ . Вся процедура вновь повторяется до тех пор, пока не будут с заданной точностью определены  $\lambda_1, k_1^*, h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*$ . После итерационного вычисления указанных параметров, из зависимостей (1.22) находим  $T_2, M_2$ . Таким образом, все искомые величины оказываются определенными через основные.

В общем случае решения задачи с высокими нелинейностями геометрического и физического типов расчет следует производить поэтапно, в соответствии с историей нагружения оболочки. Расчет состояния оболочки для очередного этапа нагружения выполняется на основе информации о состоянии оболочки на предыдущем этапе нагружения. На первом этапе нагружения, для которого нагрузки сравнительно малы, можно использовать начальные значения параметров деформирования координатной поверхности  $\lambda_1^{(0)} = 1$  и  $k_1^{*(0)} = k_1$ . Что касается определения толщин деформированных слоев  $h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*$  из уравнений (1.20), то здесь имеет место быстрая сходимость, если в качестве начальных значений использовать  $h_k^{*(0)} = h_k / (\Lambda_1^k \Lambda_2^k)$ , где  $\Lambda_1^k$  и  $\Lambda_2^k$  вычисляются по формулам (1.8) и (1.9).

Решение краевой задачи для системы разрешающих дифференциальных уравнений (2.1) вместе с (1.4), (1.8)–(1.11), (1.20)–(1.22) эффективно осуществляется на основе интегрального метода [4]. При использовании этого метода целесообразно указанный способ выбора начальных значений параметров  $\lambda_1, k_1^*, h_1^*, h_2^*, \dots, h_N^*$  применять в стартовой точке интервала интегрирования, точках разрыва решений (случай составной оболочки) и точках, в которых выполняются условия численной устойчивости (точки сшивания решений на промежуточных отрезках интервала интегрирования). В остальных точках интервала интегрирования в качестве начальных значений берутся значения параметров, вычисленные на предыдущих шагах интегрирования.

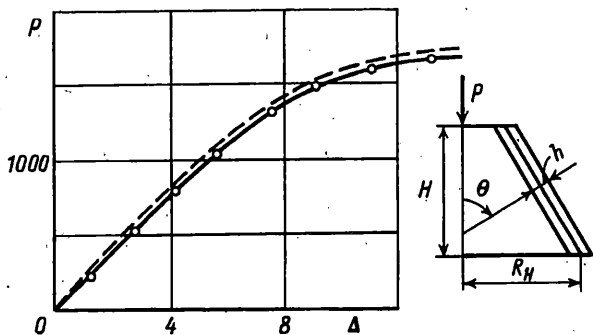
Рассмотренный итерационный метод численного решения задач осесимметричного деформирования многослойных оболочек вращения из эластомерных слоев реализован в программном алгоритме. Устойчивость интегрирования обеспечивается способом сшивания решений на промежуточных отрезках интервала интегрирования. В алгоритме применяется равномерное распределение точек дискретизации по толщине каждого слоя оболочки. Интегрирование в (1.14) и (1.20) производится на основе формул Ньютона – Котеса четвертого порядка.

**3. Решение задач об осевом сжатии резиновой конической оболочки и о раздувании торообразной и цилиндрической резинослойных оболочек.** Программный алгоритм, реализующий итерационный метод на базе построенной математической модели, апробирован на примере расчета однородного резинового конического амортизатора, сжимаемого осевой нагрузкой. Расчеты производились на основе двухпараметрического семейства упругих потенциалов [5]:

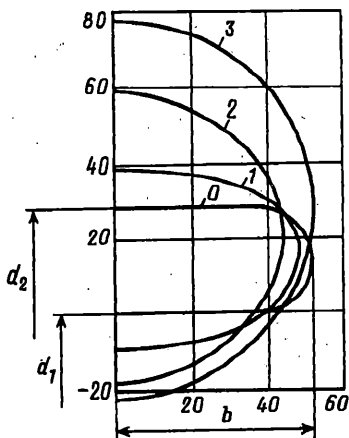
$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 2En^{-2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n - 3) / 3 \quad (3.1)$$

Для нижнего основания конической оболочки принималась заделка, не стесняющая деформацию поперечного обжатия. Точка нижнего основания, принадлежащая срединной поверхности оболочки, считалась фиксированной. Для верхнего основания принимался скользящий шарнир по месту срединной поверхности. Рассчитывалась коническая оболочка с размерами  $H = 60$  мм,  $R_H = 52,5$  мм,  $h = 13$  мм,  $\theta = 60^\circ$  и упругими характеристиками резинового материала  $E = 5,49$  МПа,  $n = 0,2$  (фиг. 1). Вдоль толщинной координаты принимали 11 точек дискретизации. В качестве параметра продолжения решения задачи использовалась величина осадки верхнего основания. Полученные результаты в пределах погрешности представления графического материала совпали с экспериментальными данными, относящимися к амортизатору с указанными параметрами и приведенными в работе [6]. На фиг. 1 представлены графики изменения усилия осевого сжатия  $P[H]$  в зависимости от осадки  $\Delta$  [мм] верхнего основания оболочки. Сплошная линия соответствует решению на основе гипотезы обжимаемого нормального элемента. Светлыми точками обозначены данные эксперимента. Штриховая линия соответствует решению, проведенному в [6] на основе модифицированной гипотезы Кирхгофа.

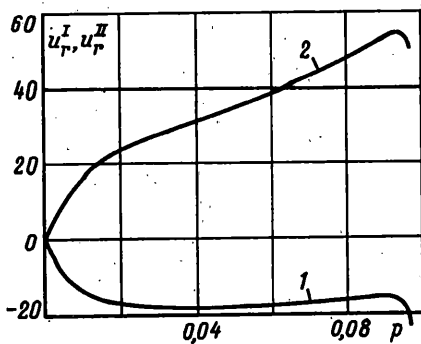
С помощью итерационного метода решена задача о раздувании внутренним давлением резинослойной замкнутой торообразной оболочки. Оболочка симметрична относительно экваториальной плоскости и состоит из двух резиновых слоев с постоянными толщинами. Начальная конфигурация оболочки характеризуется следующими размерами по внутренней поверхности в исходном состоянии:  $b = 52$  мм,  $d_1 = 484$  мм,  $d_2 = 540$  мм (фиг. 2). Толщина первого слоя оболочки  $h_1 = 1,8$  мм; толщина второго слоя оболочки  $h_3 = 3,6$  мм. Механические свойства применяемых в слоях несжимаемых резин описывались двухпараметрическим потенциалом (3.1). Для упругих параметров мягкой резины первого слоя принимались значения  $E = 2,5$  МПа,  $n = 0,5$ ; для более жесткой резины второго слоя принимались  $E = 4$  МПа,  $n = 0,2$ . Распределение поперечных нормальных напряжений по толщине оболочки определялось законом (1.19). По толщине каждого слоя задавались три точки дискретизации: одна – посередине слоя, а



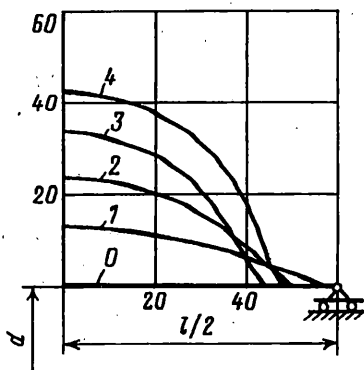
Фиг. 1



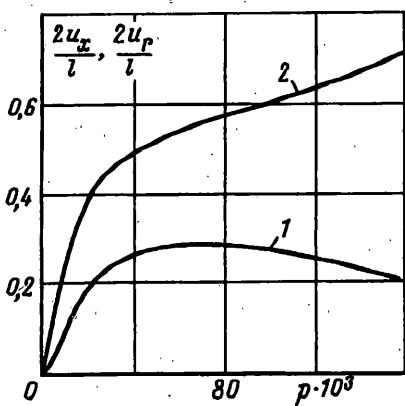
Фиг. 2



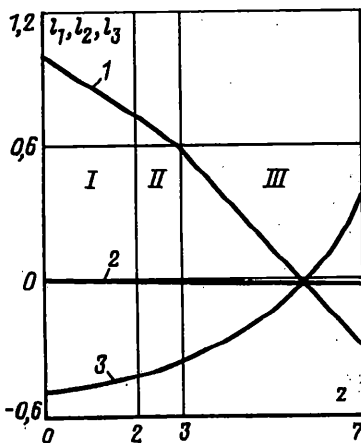
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



$t$	$T_1$	$T_2$	$M_1$	$M_2$	$u_x$	$u_r$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$h_1^*$	$h_2^*$
0	5,20	1,01	13,12	2,95	0,00	-22,77	1,31	0,91	1,49	2,87
12	5,15	1,17	12,96	3,34	3,44	-20,39	1,30	0,92	1,49	2,85
24	5,05	1,63	12,53	4,41	5,27	-13,55	1,28	0,94	1,47	2,81
36	4,92	2,11	10,95	4,83	4,38	-3,02	1,35	0,99	1,36	2,79
48	4,84	3,00	9,00	6,08	2,75	9,21	1,51	1,04	1,20	2,77
60	4,76	3,30	8,89	6,70	0,64	16,97	1,47	1,07	1,20	2,74
72	4,74	3,57	8,91	7,26	1,27	24,34	1,44	1,09	1,19	2,71
84	4,73	3,96	10,73	8,92	2,74	34,86	1,18	1,13	1,33	2,56
96	4,72	4,34	10,56	9,60	3,23	43,29	1,17	1,16	1,31	2,50
108	4,74	4,66	10,64	10,28	1,99	48,45	1,14	1,18	1,31	2,46
120	4,85	6,07	12,53	14,89	0,00	49,80	0,94	1,18	1,46	2,29

две другие – на ограничивающих поверхностях. На фиг. 2 показаны конфигурации оболочки, соответствующие различным значениям давления. Конфигурации представляются положениями образующей внутренней поверхности. Конфигурация 0 отвечает исходному (ненагруженному) состоянию оболочки. Для конфигурации 1 давление равно 0,005 МПа, для конфигурации 2 – 0,04 МПа, для конфигурации 3 – 0,0968 МПа. На фиг. 3 приведены графики изменения радиальных перемещений  $u_r^I$  (кривая 1),  $u_r^{II}$  (кривая 2) центрального и внешнего экваториальных сечений внутренней поверхности оболочки в зависимости от величины давления  $p$  [МПа]. Обе эти зависимости не являются монотонными. Для радиального перемещения центрального экваториального сечения имеют место два локальных экстремума: при давлении 0,04 МПа и в окрестности давления 0,0968 МПа. Зависимость для радиального перемещения внешнего экваториального сечения свой единственный локальный экстремум достигает в окрестности давления 0,0968 МПа. Внутреннее давление 0,0968 МПа является предельным для данной оболочки. В таблице приведены значения ряда величин предельного состояния оболочки в зависимости от текущей длины образующей внутренней поверхности. Значение координаты  $t = 0$  мм соответствует центральному экваториальному сечению оболочки; значение координаты  $t = 120$  мм соответствует внешнему экваториальному сечению оболочки.

В качестве другого иллюстративного примера приведем результаты решения задачи о нагружении резинослойной цилиндрической оболочки внутренним давлением. На краях оболочки принимались шарнирные описания по месту внутренней поверхности, подвижные в осевом направлении. Оболочка включает три резиновых слоя и характеризуется следующими размерами в исходном состоянии: диаметр оболочки по внутренней поверхности  $d = 40$  мм; длина оболочки  $l = 120$  мм. Толщины слоев постоянные на всем протяжении оболочки:  $h_1 = 2$  мм,  $h_2 = 1$  мм,  $h_3 = 4$  мм. Механические свойства резиновых материалов слоев описывались потенциалом (3.1) со значениями упругих параметров: для первого слоя  $E = 2,5$  МПа,  $n = 0,5$ ; для второго слоя  $E = 3,5$  МПа,  $n = 0,5$ ; для третьего слоя  $E = 5$  МПа,  $n = 0,4$ . Поперечные нормальные напряжения аппроксимировались законом (1.19). По толщине каждого слоя оболочки принимались три точки дискретизации в вычислительной процедуре итерационного метода.

На фиг. 4 представлена эволюция конфигурации нагружаемой внутренним давлением резинослойной цилиндрической оболочки. Ввиду симметрии задачи относительно плоскости центрального окружного сечения оболочки изображения даются для половины образующей внутренней поверхности. Цифрой 0 отмечена конфигурация оболочки в исходном состоянии. Цифрой 4 отмечена конфигурация оболочки, нагруженной давлением  $158 \cdot 10^{-3}$  МПа. Остальные конфигурации отвечают промежуточным значениям давления. Конфигурация 1 обусловлена давлением  $8 \cdot 10^{-3}$  МПа.

Для конфигурации 2 давление равно  $20 \cdot 10^{-3}$  МПа. Конфигурация 3 соответствует давлению  $70 \cdot 10^{-3}$  МПа. На фиг. 5 приведены графики зависимостей от внутреннего давления  $p$  [МПа] относительного осевого перемещения  $2u_z/l$  краевого окружного сечения по месту опирания оболочки и относительного радиального перемещения  $2u_r/l$  центрального окружного сечения внутренней поверхности оболочки. Центральное окружное сечение оболочки считается неподвижным в осевом напряжении. Зависимость осевого перемещения краевого сечения (кривая 1) в отличие от зависимости радиального перемещения центрального сечения (кривая 2) не является монотонной. При возрастании давления краевое сечение перемещается в направлении к центру оболочки (края оболочки сближаются), достигая предельного положения при давлении  $70 \cdot 10^{-3}$  МПа. При дальнейшем возрастании давления краевое сечение перемещается в обратном направлении (края оболочки расходятся). Такое поведение цилиндрической оболочки обусловлено раздуванием ее конфигурации под воздействием внутреннего давления. На фиг. 6 показаны изменения относительных удлинений  $e_1 = \lambda_1^k - 1$ ,  $e_2 = \lambda_2^k - 1$ ,  $e_3 = \lambda_3^k - 1$  (кривые 1, 2, 3) в слоях оболочки I, II, III вдоль толщинной координаты по месту краевого сечения при давлении в оболочке  $158 \cdot 10^{-3}$  МПа.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахундов В.М. Итерационный метод расчета однородных и слоистых оболочек вращения из высокоэластичных материалов // Механика композитных материалов. 1990. № 1. С. 109–116.
2. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 558 с.
4. Ахундов В.М. Интегральный метод в краевых задачах композитных оболочек с высокой нелинейностью // Механика композитных материалов. 1989. № 3. С. 482–286.
5. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1976. 336 с.
6. Прасникова С.С. Статический расчет амортизатора вращения // Механика эластомеров. Краснодар: Изд-во Кубан. ун-та, 1980. Т. 3. С. 24–29.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
5.XII.1994