МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 5 • 1996

УДК 532.546

© 1996 г. Ю.Н. ГОРДЕЕВ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА В НЕПРОНИЦАЕМОМ ПЛАСТЕ

Рассматривается задача о распространении вертикальной трещины гидроразрыва в непроницаемых пластах в рамках модели трещины Перкинса – Керна. Эта задача имеет важное значение в теории гидравлического разрыва нефтеносного пласта.

Исследование нелинейных задач, описываемых уравнениями в частных производных, существенно упрощается при нахождении их автомодельных решений. В настоящее время для вертикальных трещин постоянной высоты, расклиниваемых потоком ньютоновской или неньютоновской степенной жидкости, известны отдельные автомодельные решения, как в рамках модели трещины [1,2], так и в рамках модели Перкинса – Керна [3–6]. Результаты этих исследований приведены в [7]. В [6] проведена полная классификация автомодельных решений задачи о распространении вертикальной трещины Перкинса – Керна постояной высоты в непроницаемом пласте. В ней также было показано, что нахождение этих решений сводится к интегрированию обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, которое затем решалось численно.

В данной работе получены аналитические представления через элементарные функции некоторых автомодельных решений задачи о распространении вертикальной трещины Перкинса – Керна постоянной высоты в непроницаемом пласте. Найденные решения использованы затем для решения обратной задачи восстановления характеристик пласта по параметрам, измеряемым в устье скважины.

1. Постановка задачи. Пусть при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта образуется симметричная относительно скважины вертикальная трещина постоянной высоты $2H$ и большой протяженности в горизонтальном направлении $2l >> 2H$ ($|x| \leqslant l$). Следуя [6], нарушениями сплошности среды скважиной будем пренебрегать, упругие постоянные пласта и вмешающих его пород будем считать одинаковыми, давление жидкости в трещине p – постоянным по высоте трещины ($|z| \leqslant H$) в каждом ее вертикальном сечении ($|x| = \text{const}$). Раскрытие трещины $2w$ в каждом сечении ($|x| = \text{const}$) будем находить независимо как решение соответствующей плоской задачи теории упругости для разреза ($|z| \leqslant H$) в упругой плоскости (x, y) с заданными нагрузками на его берегах $p(x, t) - \sigma$, где σ – боковое горное давление, t – время. При принятых предположениях раскрытие трещины, как известно [8], может быть представлено в виде

$$w(x,z,t)=\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}H\sigma\sqrt{1-\left(\frac{z}{H}\right)^2}\left[\frac{p(x,t)}{\sigma}-1\right](|x|\leqslant l(t),|z|\leqslant H) \tag{1.1}$$

В (1.1) переменные x и t являются параметрами, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Ограничемся рассмотрением непроницаемых пластов или слабо проницаемых пластов на начальной стадии гидроразрыва, когда утечками в пласт можно пренебречь. В этом случае течение жидкости в трещине будем описывать уравнениями движения и непрерывности, осредненными по раскрытию и по вертикальному сечению

трещины $|x| = \text{const}$:

$$u^n = -B_n w^m \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle w\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle q\rangle = 0, \quad q = wu \tag{1.3}$$

$$\langle f\rangle = \frac{1}{2H}\int_{-h(x,t)}^{h(x,t)} f(z)dz$$

Здесь u – скорость движения в трещине, а m, n и B_n – некоторые постоянные.

Степенной закон сопротивления (1.2) описывает медленные течения псевдопластических жидкостей со степенным реологическим законом в узкой щели [9]: $\dot{\varepsilon} = K\tau^n$, где K – коэффициент консистентности, τ – касательные напряжения сдвига, $\dot{\varepsilon}$ – скорость сдвига. При этом

$$m = n+1, \quad B_n = \left(\frac{n}{1+2n}\right)^n K^{-1}, \quad 0 < n \leqslant 1$$

Если $n = 1$, то показатель консистентности переходит в вязкость жидкости μ, а (1.2) – в формулу Буссинеска для вязкой ньютоновской жидкости в узкой щели. В случае быстрых течений, полагая в (1.2) $m = 1$, $n = 2$, $B_n = (\rho\lambda)^{-1}$, получим квадратичный закон сопротивления, отвечающий турбулентным течениям ньютоновской жидкости [10]. Здесь ρ – плотность жидкости, а λ – коэффициент сопротивления, зависящий, в общем случае, от числа Рейнольдса Re и относительной шероховатости стенок трещины.

В силу симметрии задачи относительно оси $x = 0$ далее будем рассматривать только правую половину трещины $x \geqslant 0$.

Уравнения (1.1)–(1.3) дополняются следующими условиями: условием "непротекания" в концах трещины для осредненного одномерного потока, определяющим закон распространения трещины

$$\dot{l}(t) = dl(t)/dt = \langle u\rangle, \quad x = l(t) \tag{1.4}$$

условием плавного смыкания поверхностей трещины в ее концах (аналогом условия Христиановича [1]):

$$p = \sigma, x = l(t) \tag{1.5}$$

начальными условиями

$$l(0) = l_0, p(x, 0) = p_0(x) \tag{1.6}$$

а также условием, определяющим режим нагнетания жидкости в трещину

$$q(t, 0) = q^0(t) \tag{1.7}$$

2. Автомодельные решения. Используя (1.1) можно вычислить средние величины, входящие в (1.3) и (1.7):

$$\langle w\rangle = \pi/4 w_0 \Phi(x,t)$$

$$\langle q\rangle = -1/2\sqrt{\pi}\gamma B_n^{1/n}\sigma^{1/n} w_0^{m/n+1}\operatorname{sgn}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right]\left|\Phi^{m+n}\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right|^{1/n} \tag{2.1}$$

$$\langle u\rangle = \frac{\langle q\rangle}{\langle w\rangle} = -2\pi^{-1/2}\gamma B_n^{1/n}\sigma^{1/n}w_0^{m/n}\operatorname{sgn}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right]\left|\Phi^m\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right|^{1/n}$$

$$\Phi(x,t) = \frac{\rho}{\sigma} - 1,\ \ w_0 = \frac{2(1-\nu^2)}{E}H\sigma,\ \ \gamma = \Gamma\left(\frac{3n+m}{2n}\right)/\Gamma\left(\frac{4n+m}{2n}\right)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Перейдем к безразмерным переменным

$$X = \frac{x}{l(t)},\ \ L = \frac{l(t)}{l_0},\ \ \tau = \frac{t}{t_0},\ \ U = \frac{\langle u\rangle}{u_0},\ \ Q = \frac{\langle q\rangle}{q_0}$$

$$b = 2\pi^{-1/2}\gamma B_n^{1/n}\sigma^{1/n}w_0^{m/n},\ \ t_0 = \frac{l_0^{1/(n+1)}}{b},\ \ u_0 = \frac{b}{l_0^{1/n}},\ \ q_0 = \frac{\pi b w_0}{l_0^{1/n}} \tag{2.2}$$

Тогда уравнения (1.2), (1.3) и условия (1.4)–(1.7) примут вид

$$L^{(n+1)/n}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\dot L}{L}X\frac{\partial}{\partial X}\right)\Phi + \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial X}\Phi\right)\frac{\partial}{\partial X}\left(\left|\Phi^{m+n}\frac{\partial}{\partial X}\Phi\right|^{1/n}\right) = 0 \tag{2.3}$$

$$\dot L = dL/d\tau = U(1,\tau) \tag{2.4}$$

$$\Phi(1,\tau) = 0 \tag{2.5}$$

$$L(0) = 1,\ \ \Phi(X,0) = \Phi_0(X) = p_0(X)/\sigma - 1 \tag{2.6}$$

$$Q(0,\tau) = Q_0(\tau) = 1/(4H)q^0(t)/q_0 \tag{2.7}$$

$$Q(X,\tau) = -L^{-1/n}\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial X}\Phi\right)\Phi^{m/n+1}\left|\frac{\partial}{\partial X}\Phi\right|^{1/n}, \tag{2.8}$$

$$U(X,\tau) = -L^{-1/n}\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial}{\partial X}\Phi\right)\Phi^{m/n}\left|\frac{\partial}{\partial X}\Phi\right|^{1/n}$$

Будем искать решение (2.3)–(2.7) в форме

$$\Phi(X,\tau) = \alpha^{n/(m+1)}L^{\beta}(\tau)R(X) \tag{2.9}$$

где α и β – некоторые постоянные, подлежащие определению.

Подставляя (2.9) в (2.3), убеждаемся, что для существования решения такого вида, должно выполняться соотношение

$$L\dot L^{[1-\beta(m+1)]/n} = \alpha = \text{const} \tag{2.10}$$

При этом функция $R(X)$, описывающая распределение безразмерного давления в трещине ($0 \leqslant X \leqslant 1$), должна удовлетворять уравнению

$$(\beta R - XR') - \operatorname{sgn}R'\,[R^{m/n+1}|R'|^{1/n}]' = 0,\ \ R' = dR/dX \tag{2.11}$$

и трем условиям, следующим из (2.5)–(2.7). Условие (2.7) имеет вид

$$-\operatorname{sgn}R'R^{m/n+1}|R'|^{1/n}\big|_{X=0} = Q^0 = \alpha^{-\varkappa_1}Q_0(\tau)L^{\varkappa_2} = \text{const}$$

$$\varkappa_1 = (m+n+1)/(m+1),\ \ \varkappa_2 = [1-\beta(m+n+1)]/n$$

При этом одно из перечисленных условий служит для определения параметров α или β, а два других играют роль граничных условий для уравнения второго порядка (2.11).

Используя соотношения (2.4)–(2.6), получим

$$-\operatorname{sgn} R' R^{m/n} |R'|^{1/n} = 1 \quad (X = 1) \tag{2.12}$$

$$R(1) = 0 \tag{2.13}$$

При этом задача (2.3)–(2.7) становится автомодельной.

Рассмотрим задачу (2.11)–(2.13). Уравнение (2.11) является обобщенно однородным и допускает понижение порядка. Переходя к новым переменным

$$\eta = \ln X, \quad \xi(\eta) = -R^{m+1} e^{-(n+1)\eta}, \quad \chi(\xi) = \xi' + (n+1)\xi \tag{2.14}$$

получаем уравнение первого порядка для функции $\chi(\xi)$ на полупрямой $-\infty<\xi\leqslant 0$:

$$\xi\{[\chi - (n+1)\xi]\chi' + n\chi\} = -\frac{n}{m+1}\chi^2 + n(m+1)^{1/n-1} \operatorname{sgn}\chi|\chi|^{2-1/n}$$

$$-\beta n(m+1)^{1/n}\xi|\chi|^{1-1/n} \tag{2.15}$$

При этом граничное услове (2.12) переходит в соотношение

$$\chi(\xi=0)=m+1 \tag{2.16}$$

3. Распространение трещины после закрытия скважины. Рассмотрим распространение вертикальной трещины после закрытия скважины. Покажем, что при закрытой сквжине, когда расход жидкости равен нулю ($Q_0 = Q(0, \tau) = Q_0(\tau) = 0$), $\beta = -1$. Проинтегрируем уравнение (2.11) по X от текущего значения X до 1 с учетом условий (2.12), (2.13). В результате получим уравнение

$$-\operatorname{sgn} R' R^{m/n+1} |R'|^{1/n} = XR + (1+\beta)\int_X^1 R(X')dX' \tag{3.1}$$

левая часть которого в силу соотношений (2.3), (2.11) пропорциональна расходу жидкости в поперечном сечении трещины $X = \text{const}$. Поэтому в точке нагнетания $X = 0$, где расположена скважина, при $\beta = -1$ из (3.1) следует обращение в нуль расхода закачиваемой жидкости. Это означает, что при $\beta = -1$ объем жидкости в трещине фиксирован и распространение трещины происходит только за счет перераспределения жидкости в ней.

Параметр α может быть определен через объем жидкости разрыва, закачанной в трещину перед ее закрытием

$$v = 2H\int_{-1}^{1} 2\langle w\rangle dx \tag{3.2}$$

С учетом (1.1), (2.1), (2.9) и условия $\beta = -1$ из (3.2) получим

$$\alpha^{n/(m+1)} = \frac{vE}{4\pi(1-\nu^2)H^2\sigma l_0}\left[\int_0^1 R(X)dx\right]^{-1} \tag{3.3}$$

Решением задач (2.15), (2.16) при $\beta = -1$ является

$$\chi(\xi) = m + 1 \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (2.14), после интегрирования получим безразмерное давление

$$R(X)^{m+1} = C - \frac{m+1}{n+1}X^{n+1}$$

которое с учетом константы интегрирования C, найденной из второго граничного условия (2.13), принимает вид

$$R(X)=\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{1/(m+1)}\left(1-X^{n+1}\right)^{1/(m+1)} \tag{3.5}$$

Поток жидкости разрыва в трещине можно получить из (2.8), (3.5):

$$Q_0(X)=\alpha^{-\varkappa_1}Q(X,\tau)L^{\varkappa_2}=-\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{\varkappa_3}X^n\left(1-X^{n+1}\right)^{\varkappa_4} \tag{3.6}$$

$$\varkappa_3=\frac{m(1-n)}{n(m+1)},\quad \varkappa_4=\frac{m+n}{n(m+1)}$$

Значение константы α находится после подстановки (3.5) в (3.2):

$$\alpha^{n/(m+1)}=\frac{\upsilon E(n+1)}{4\pi(1-\nu^2)H^2\sigma l_0 B(1/(n+1),(m+2)/(m+1))} \tag{3.7}$$

Интегрируя уравнение (2.10) и принимая во внимание первое условие (2.6), находим закон расространения трещины

$$L(\tau)=\left(1+\frac{n+1}{n}\alpha\tau\right)^{n/(n+1)} \tag{3.8}$$

4. Распространение трещины при изливе жидкости (решение типа диполя). При $\beta < -1$ расход "закачиваемой" в трещину жидкости становится отрицательным, т.е. происходит, излив жидкости из трещины. Уменьшение параметра β сопровождается уменьшением давления жидкости в скважине. При некотором параметре β_* давление жидкости разрыва становится равным боковому горному давлению ($R(X \to 0) = p/\sigma - 1 = 0$), т.е. трещина закрывается в центре ($X \to 0$) и дальнейшее уменьшение параметра β невозможно ($\beta_* < \beta$).

Рассмотрим разрыв пласта ньютоновской жидкостью ($n = 1$) при предельном значении $\beta = \beta_*$. При этих параметрах уравнение (3.1) принимает вид

$$-R^3R'=XR+(1+\beta_*)\int_X^1 R(X')dX' \tag{4.1}$$

Интегрируя уравнение (4.1) и учитывая, что при $\beta = \beta_* R(X \to 0) = 0$, $R(X \to 1) = 0$, получим

$$(2+\beta_*)\int_0^1 R(X')dX' \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует, что предельное значение параметра β равно: $\beta_* = -2$. При данных параметрах ($n = 1$, $\beta = \beta_* = -2$) задача (2.15), (2.16) принимает вид

$$\xi\{[\chi-2\xi]\chi'+\chi\}=-1/3\chi^2+\chi+6\xi$$

$$\chi(\xi=0)=3 \tag{4.3}$$

решение которой дается выражением

$$\chi(\xi)=3+{}^4/_3\xi \tag{4.4}$$

Возвращаясь к исходному безразмерному давлению R, из (2.14) найдем

$$R(X)=\sqrt[3]{12/5}X^{1/4}\left(1-X^{5/4}\right)^{1/3} \tag{4.5}$$

Решение вида (4.5) называют решением типа диполя [11]. При этом безразмерный поток $Q_0(X)$ можно получить, подставив (4.4), (2.9) в (2.8):

$$Q_0(X) = \alpha^{-4/3} Q(X,\tau) L^9 = -(90)^{2/3}\left(1 - X^{5/4}\right)^{1/3}\left(1 - \frac{8}{3}X^{5/4}\right) \tag{4.6}$$

Из (4.4), (4.5) видно, что давление достигает максимального значения при $X = 3/8 = 0{,}375$.

Параметр α входит только в условие (4.6) и дает режим нагнетания, поэтому

$$\alpha = \frac{(Q^0)^{3/4}}{3\sqrt{10}}, \quad Q^0 = Q(X = 0, \tau = 0) \tag{4.7}$$

Длина трещины определяется из (2.10) и в этом случае равна

$$L(\tau) = (1 + 8\alpha\tau)^{1/8} \tag{4.8}$$

5. Определение размеров трещины и параметров пласта. На начальной стадии гидроразрыва пласта или в слабопроницаемых пластах утечками жидкости разрыва из трещины в пласт можно пренебречь. В этом случае найденные автомодельные решения дают возможность решать обратную задачу определения длины трещины и параметров пласта по управляемым параметрам, контролируемым в устье скважины: давление нагнетания $p^0(t)$, расход $q^0(t)$ и объем закаченной жидкости $v = \int q(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant t)$.

Получим формулы, которые по этим параметрам позволяют восстановить длину трещины $l(t)$, мощность пласта $2H$. Используем для этих целей, например, автомодельное решение, соответствующее режиму распространения трещины с закрытой скважиной, т.е. $\beta = -1$. Тогда из (2.1), (2.8) и (3.5) имеем

$$L(\tau) = \alpha^{n/(m+1)}\left(\frac{m+1}{n+1}\right)^{1/(m+1)} \sigma[p^0(t) - \sigma]^{-1} \tag{5.1}$$

$p^0(t) = p(x = 0, t)$

Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) и некоторый другой момент времени ($t = t_*$) давление жидкости разрыва в скважине соответственно равны

$$p_1 = p^0 \ \ (t = 0), \ \ p_2 = p^0 \ \ (t = t_*) \tag{5.2}$$

Тогда из (5.1) с учетом условия $L(\tau = 0) = 1$ получим

$$\alpha^{n/(m+1)} = \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^{1/(m+1)}\left[\frac{p_1}{\sigma} - 1\right] \tag{5.3}$$

$$L\left(\frac{t_*}{t_0}\right) = \frac{p_1 - \sigma}{p_2 \sigma} \tag{5.4}$$

Из соотношений (5.3) и (3.7) может быть найдена связь между мощностью пласта H и длиной трещины l_0 на момент закрытия скважины

$$\frac{H^2 l_0}{v} = \Lambda_1, \quad \Lambda_1 = \frac{E[(m+1)(n+1)^m]^1 / (m+1)}{4\pi(1 - \nu^2) B(1/(n+1), (m+2)/(m+1))(p_1 - \sigma)} \tag{5.5}$$

С другой стороны из формул (5.4), (3.8) можно получить еще одно соотношение

между этими параметрами

$$l_0^{n+1} / (H^m B_n \sigma t_*^n) = \Lambda_2$$

$$\Lambda_2 = \frac{\gamma^{1-n}(n+1)^{n+1}(p_1/\sigma - 1)}{(m+1)} \left(\frac{2(1-\nu^2)\sigma}{E} \right)^m \left[2n\pi^{1/2} \left(\left(\frac{p_1 - \sigma}{p_2 - \sigma} \right)^{(n+1)/n} - 1 \right) \right]^{-n} \tag{5.6}$$

Тогда из соотношений (5.5), (5.6) восстанавливается мощность пласта

$$H = \left(\frac{(\Lambda_1 V)^{n+1}}{\Lambda_2 B_n \sigma t_*^{2n}} \right)^{\varkappa_5}, \quad \varkappa_5 = \frac{1}{2(n+1)+m}$$

и начальная длина трещина

$$l_0 = \left(\Lambda_1^m \Lambda_2^2 B_n^2 \sigma^2 t_*^{2n} \right)^{1/(2n+3)} \tag{5.7}$$

Длина трещины в произвольный момент времени находится из (5.7), (5.3) и (5.1) $l(t) = l_0(p_1 - \sigma)/(p^0(t) - \sigma)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Желтов Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1995. № 5. С. 3–41.
2. *Баренблатт Г.И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 55–129.
3. *Perkins T.K. and Kern L.R.* Width of hydraulic fractures. J. Petrol. Technol. V. 13. P. 937–949 (1961).
4. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture, Soc. Petrol. Eng. J. 12, 306–314 (1972).
5. *Daneshy A.A.* On the design of vertical hydraulic fractures. Journal of Petroleum Technology. 25, 83–97 (1973).
6. *Гордеев Ю.Н., Зазовский А.Ф.* Точные решения задачи о распространении вертикальной трещины гидроразрыва постоянной высоты и большой протяженности в непроницаемом пласте // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 1. С. 94–104.
7. Reservoir stimulation, Eds: M.J. Economides and K.G. Nolte. Schlumberger Educational Services. Houston. Texas. 1987.
8. Разрушение / Под ред. Г. Либовица. Т. 2. М.: Мир, 1975. 764 с.
9. *Торок Дж. С., Адвани С.Х.* Течение неньютоновской жидкости в пласте (приложение к гидроразрыву) // Энергетические машины и установки. 1988. № 1. С. 135–139.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
11. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации. М.: Недра, 1972. 288 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.VI.1994