

УДК 539.375

©1996 г. С. МУРАКАМИ, Ю.Н. РАДАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХМЕРНОГО АНИЗОТРОПНОГО СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Механика поврежденного континуума интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ [1] и [2]. Последующее развитие теории происходило, в частности, по пути обобщения основных положений механики поврежденного континуума для случая трехмерного состояния анизотропной поврежденности [3–8].

В настоящей работе, которая по существу является развитием подхода к моделированию трехмерной анизотропной поврежденности, изложенного в [8], на основе представления об эквивалентной конфигурации континуума как собрании элементов, поврежденность которых некоторым воображаемым образом элиминирована, приводится определение новой тензорной меры анизотропной поврежденности (тензора поврежденности). Показано также, что эквивалентная конфигурация может быть корректно введена только как трехмерное Риманово многообразие, при этом тензор поврежденности выступает как изометрический инвариант указанного многообразия.

Новая тензорная мера анизотропной поврежденности, в силу определения, являясь мерой сокращения, вследствие распределенных микродефектов, реально несущей нагрузку площади поверхностного элемента в зависимости от его ориентации, с самого начала вводится как симметричный тензор второго ранга. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Для того, чтобы отделить влияние упругой деформации на процесс накопления повреждений, вводится тензор поврежденности по отношению к конфигурации элементов, упругая деформация которых элиминирована путем локальных разгрузок из текущей конфигурации.

На основе представления о возрастании напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений вводится тензор эффективных напряжений. Обсуждаются условия его симметрии и предлагается процедура его симметризации, основанная с одной стороны на новом подходе к моделированию анизотропной поврежденности, а с другой – на классической количественной мере указанного возрастания напряжений.

1. Модель Качанова–Работнова. Параметр поврежденности. Эффективные напряжения. Существо современного подхода к математическому моделированию процессов накопления повреждений может быть достаточно ясно продемонстрировано на примере простейшего одномерного состояния поврежденности одноосно растянутого образца.

Рассмотрим цилиндрический образец, растягиваемый силой P . Обозначим через A_0 и A площади поперечных сечений образца в начальном неповрежденном и текущем поврежденном состояниях соответственно.

В соответствии с классической теорией Качанова–Работнова [1, 2], текущее состояние внутренней поврежденности образца может быть представлено с помощью единственного скалярного параметра (параметра поврежденности) D , который представляет собой монотонно возрастающую функцию времени $0 \leq D \leq 1$, причем $D = 0$ для начального неповрежденного состояния и $D = 1$ для конечного состояния разрушения.

Обычно параметр поврежденности D интерпретируется как относительное сокращение вследствие распределенных внутри образца микродефектов эффективной, несущей нагрузку площади поперечного сечения. Поэтому, деградация материала объясняется как постепенное уменьшение эффективной площади, которая реально несет растягивающую нагрузку и определяет сопротивляемость образца растяжению. В силу такой интерпретации, текущая несущая нагрузку площадь оказывается равной не A , а некоторому меньшему значению A^* , и для параметра D имеет место следующее простое соотношение

$$1 - D = A^*/A \quad (1.1)$$

Ясно, что определенный таким образом параметр поврежденности представляет собой чисто геометрическую характеристику текущего состояния поврежденности, однако его эволюция определяется конечно же и свойствами материала, и историей внешнего нагружения.

Вызванное внутренним распределением повреждений сокращение площади, несущей растягивающую нагрузку, сразу же приводит к важнейшему представлению об эффекте возрастания внутренних напряжений в теле с распределенными повреждениями. Действительно, наряду с напряжением

$$\sigma = P/A \quad (1.2)$$

очевидно следует рассмотреть эффективное напряжение

$$\sigma^* = P/A^* \quad (1.3)$$

которое в силу формулы (1.1) можно также представить в виде

$$\sigma^* = \sigma/(1 - D) \quad (1.4)$$

Последняя формула выражает эффект повышения уровня напряжений в поврежденном материале, поскольку $0 \leq D \leq 1$.

Таким образом, можно представить вместо исходного образца другой, воображаемый неповрежденный образец, площадь поперечного сечения которого равна A^* , и который растягивается той же самой силой P (фиг. 1). Механическое состояние подобного образца полностью эквивалентно текущему состоянию поврежденного образца, а изменение геометрии полностью описывается параметром поврежденности D .

Изложенные выше понятия, несмотря на свою простоту, являются достаточными предпосылками для дальнейшего развития механики поврежденного континуума. Ясно, однако, что понятия о геометрической мере поврежденности, выражающей сокращение несущей способности поверхностных элементов внутри деградирующего континуума, и об эффективных напряжениях нуждаются в корректном обобщении на случай произвольного трехмерного состояния анизотропной поврежденности. Такое обобщение было выполнено в [6–8].

Целью настоящей работы является с одной стороны строгое формальное обоснование и уточнение основных положений трехмерной теории анизотропной поврежденности, а с другой – ее дальнейшее развитие на основе нового подхода к моделированию анизотропии, вызванной трехмерным распределением повреждений.

Отличительной чертой предлагаемого подхода к тензорному представлению поврежденности является с одной стороны возможность строго определить и ясно интерпретировать тензорную меру поврежденности (в этом плане работа является отчасти формализацией подхода [8]), а с другой – явно вычислить тензор поврежденности по экспериментальным диаграммам ориентационного распределения поврежденности. На основе развиваемой в работе теории появляется возможность ввести новую симметричную тензорную меру возрастания внутренних напряжений в анизотропно поврежденном теле, интерпретация собственных элементов которой согласуется с геометрической и механической интерпретацией собственных элементов как тензора поврежденности, так и тензора напряжений Коши.

Аккуратное аналитическое описание поврежденного состояния представляет собой довольно сложную проблему. Не вдаваясь здесь в детальное обсуждение всего многообразия подходов к моделированию анизотропной поврежденности, укажем только на недавно опубликованную работу [9], где имеется достаточно полный список работ, посвященных тензорным мерам поврежденности.

2. Эквивалентная конфигурация континуума с внутренним распределением повреждений. Как было указано выше, распределение микродефектов внутри континуума приводит с феноменологической точки зрения к сокращению реальной несущей способности поверхностных элементов континуума. В рамках математической модели это сокращение, зависящее очевидно от ориентации элемента, может быть описано, как это будет показано ниже, с помощью симметричного тензора второго ранга, имеющего простой геометрический смысл. Поэтому, следуя [8], начнем с геометрического рассмотрения текущего состояния поврежденности континуума.

Рассмотрим континуум с внутренним распределением повреждений в текущем деформированном состоянии B_t . Обозначим через x положение в пространстве материальной точки континуума, которая до деформации занимала положение X в отсчетной (которую также будем считать неповрежденной) конфигурации B_0 .

Отображение $X \rightarrow x$ определяет деформацию континуума. Обозначим через F градиент деформации

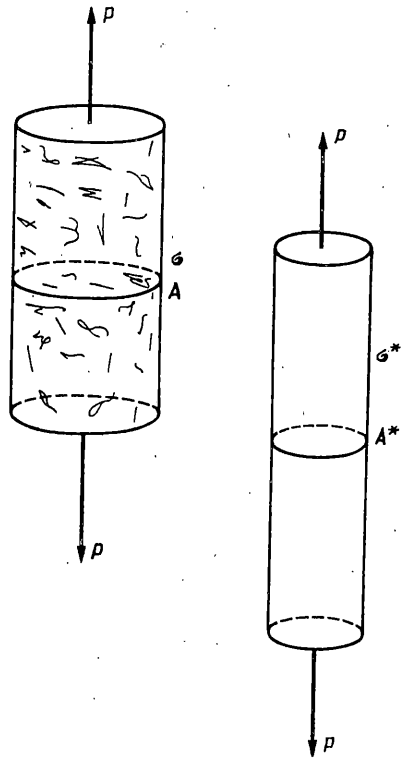
$$F = \partial x / \partial X = (\nabla_R \otimes x)^T \quad (2.1)$$

Если через I_k и i_k обозначить локальные базисные векторы конвективной системы координат в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно, то справедлива также формула

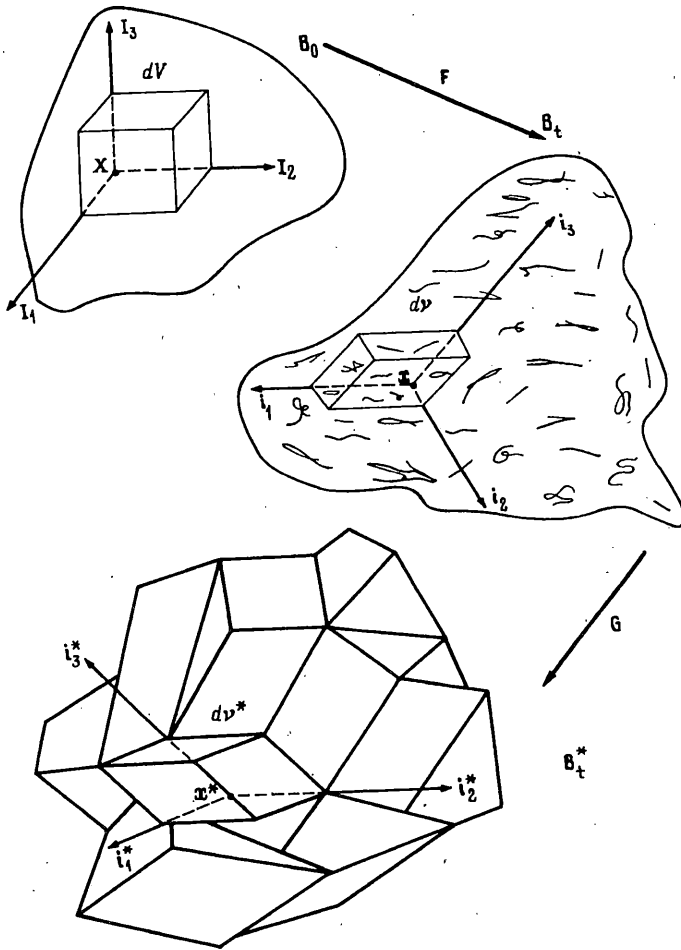
$$i_k = F I_k \quad (2.2)$$

Выберем произвольно объемный элемент dV , локализованный в окрестности точки X отсчетной конфигурации, а через $d\nu$ обозначим его деформированный образ, локализованный в окрестности точки x текущей конфигурации. Вследствие трехмерного распределения микродефектов, несущая нагрузку площадь плоского элемента, выбранного произвольно внутри объемного элемента $d\nu$, будет меньше геометрической площади этого элемента. Поэтому, поврежденный плоский элемент можно заменить на неповрежденный элемент с сокращенными геометрическими размерами и считать оба элемента эквивалентными. Если элементарный объем $d\nu$ разложить на множество плоских поврежденных элементов, а затем заменить каждый поврежденный элемент ему эквивалентным, то, собрав уже неповрежденные элементы, получим эквивалентный неповрежденный объемный элемент.

Искажение геометрии поврежденного элемента при описанной выше его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент определяет тензор второго ранга, который будем называть фиктивной дисторсией поврежденного элемента и обозначать через G .



Фиг. 1



Фиг. 2

Если теперь каждый элемент континуума в его текущем поврежденном состоянии заменить эквивалентным неповрежденным элементом, а затем осуществить сборку эквивалентных элементов в одно тело, то получим конфигурацию, которую, следуя [8], будем называть эквивалентной конфигурацией поврежденного континуума B_t^* . Указанные выше три конфигурации B_0 , B_t , B_t^* изображены на фиг. 2, причем конфигурация B_t^* , возможно, состоит из несовместимых в единое сплошное тело элементов.

Обозначим через x^* положение в эквивалентной конфигурации материальной точки, которая в текущей поврежденной конфигурации занимала положение x , а через dv^* — деформированный в результате перехода в эквивалентное неповрежденное состояние элемент объема dv .

Отметим два важных для дальнейших рассуждений обстоятельства. Прежде всего ясно, что введенная выше эквивалентная конфигурация не определена однозначно, ибо сборка эквивалентных объемных элементов в единое тело может быть произведена многими различными способами. Можно даже указать степень такого произвола: положение эквивалентного элемента определяется с точностью до вращения его как жесткого целого. И второе важное замечание. Поскольку, вообще говоря, фиктивные дисторсии поврежденных объемных элементов несовместны, то не существует непре-

рывного поля перемещений из текущей конфигурации в эквивалентную и отображение $x \rightarrow x^*$ не является гладким.

Чтобы восстановить гладкость этого отображения необходимо рассматривать эквивалентную конфигурацию как трехмерное Риманово многообразие [10], метрика которого $g_{\alpha\beta}^*$ определяется фиктивной дисторсией G :

$$g_{\alpha\beta}^* = i_{\alpha}^* \cdot i_{\beta}^* \quad (2.3)$$

где векторы i_{α}^* ($\alpha = 1, 2, 3$) являются образами базисных векторов i_{α} ($\alpha = 1, 2, 3$) при трансформации в эквивалентное состояние:

$$i_{\alpha}^* = G i_{\alpha} \quad (2.4)$$

Еще раз подчеркнем, что метрика $g_{\alpha\beta}^*$, в отличие от метрики текущего поврежденного состояния $g_{\alpha\beta}$, не является евклидовой и, поэтому, тензор Римана–Кристоффеля не исчезает:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}^* \neq 0 \quad (2.5)$$

3. Определение и координатное представление тензора поврежденности. Определенные выше понятия об эквивалентной конфигурации и фиктивной дисторсии поврежденных элементов являются ключевыми для корректного построения тензорной меры анизотропной поврежденности и ее последующей механической интерпретации. Как сейчас будет показано, тензор поврежденности может быть определен только через тензор фиктивной дисторсии G .

Рассмотрим тензор фиктивной дисторсии G . Равенства (2.4) можно рассматривать как формальное определение тензора G и получить, как следствие, следующее выражение:

$$G = i_{\alpha}^* \otimes i^{\alpha} \quad (3.1)$$

Чтобы вычислить изменение площади поврежденного плоского элемента при его трансформации в эквивалентный неповрежденный элемент, рассмотрим внутри объема dv произвольно ориентированный плоский элемент PQR (фиг. 3), который будем представлять с помощью вектора $dA = n dA$, где n – единичный вектор нормали, dA – площадь элемента PQR .

Эквивалентный неповрежденный элемент $P^*Q^*R^*$ в свою очередь представляется вектором $dA^* = n^* dA^*$.

В соответствии с определением тензора G справедливы следующие соотношения:

$$\overline{P^*Q^*} = G \overline{PQ}, \quad \overline{P^*R^*} = G \overline{PR} \quad (3.2)$$

Далее, следуя [8], используя последнюю формулу, с помощью теоремы Нансона, можно получить следующее уравнение, связывающее векторные элементы площади dA и dA^* :

$$dA^* = \frac{1}{2} \overline{P^*Q^*} \times \overline{P^*R^*} = \frac{1}{2} (G \overline{PQ}) \times (G \overline{PR}) = (\det G) G^{-T} dA \quad (3.3)$$

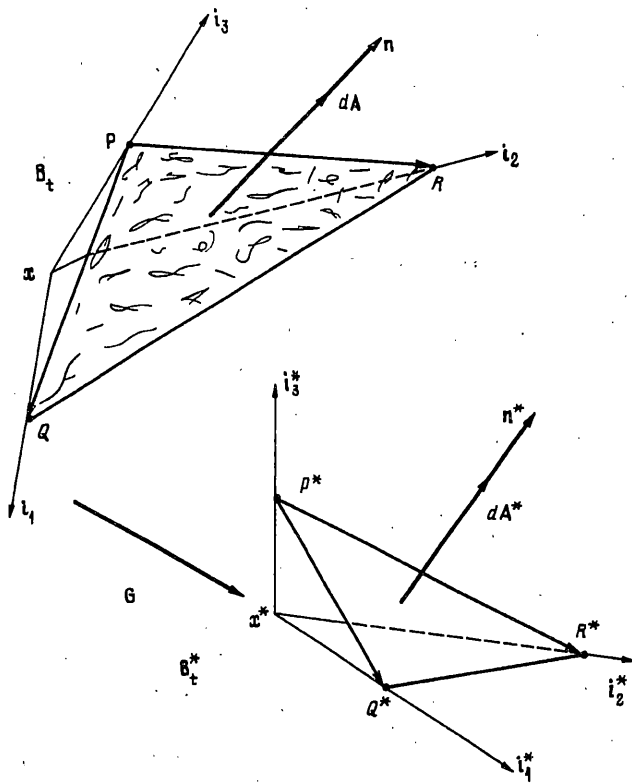
Определяя тензор D посредством соотношения [8]:

$$I - D = (\det G) G^{-T} \quad (3.4)$$

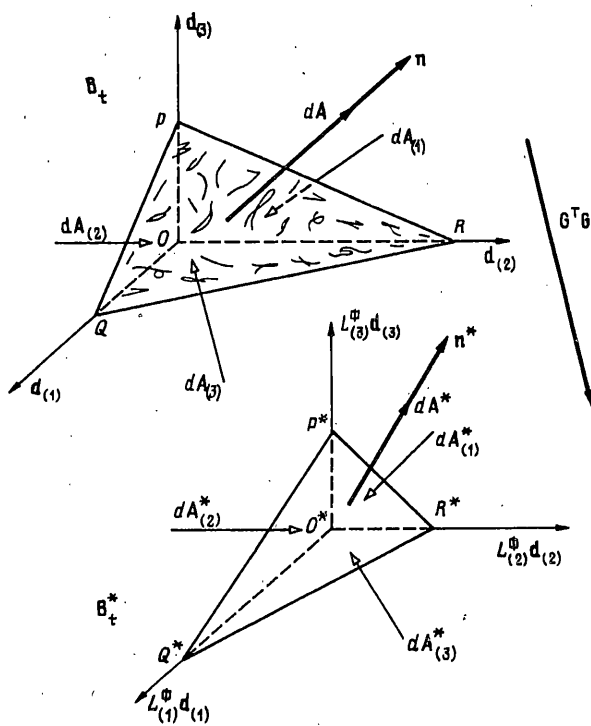
где I – единичный тензор, уравнение (3.3) может быть представлено в форме

$$dA^* = (I - D) dA \quad (3.5)$$

Последнее уравнение показывает, что тензор D полностью определяет ориентацию и площадь эквивалентного неповрежденного элемента и в принципе может быть



Фиг. 3



Фиг. 4

принят в качестве тензорной меры поврежденности, как это было сделано в работе [8]. Однако, как следует из определения (3.4), тензор \mathbf{D} , вообще говоря, несимметричен, что вызывает значительные трудности при его интерпретации. Поэтому, продолжим рассуждения, чтобы найти более подходящую меру.

Как было отмечено в п. 2, эквивалентное неповрежденное тело может быть собрано в одно целое из эквивалентных элементарных объемов многими способами. Ясно также, что вращения эквивалентных элементов в процессе сборки следует исключить, что равносильно требованию симметричности тензора фиктивной дисторсии \mathbf{G} . Можно, однако, считать тензор \mathbf{G} несимметричным и учесть указанную инвариантность относительно вращений эквивалентных элементов следующим образом.

Умножим скалярно левую и правую части уравнения (3.3) сами на себя. В результате получим соотношение

$$d\mathbf{A}^* \cdot d\mathbf{A}^* = (\det \mathbf{G})^2 (d\mathbf{A})^2 |\mathbf{G}^{-T} \mathbf{n}|^2 \quad (3.6)$$

подставляя в которое следующее очевидное равенство

$$|\mathbf{G}^{-T} \mathbf{n}|^2 = \text{tr}[\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] \quad (3.7)$$

получим

$$d\mathbf{A}^* / d\mathbf{A} = (\det \mathbf{G}) \sqrt{\text{tr}[\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G}^{-T} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]} \quad (3.8)$$

Последнее уравнение выражает сокращение эффективной, несущей нагрузку площади в зависимости от ориентации плоского поврежденного элемента и позволяет корректно ввести симметричный тензор поврежденности.

Введем в уравнение (3.8), пользуясь формулой (3.4), тензор \mathbf{D} , в результате получим следующее уравнение:

$$d\mathbf{A}^* / d\mathbf{A} = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{I} - \mathbf{D})^T (\mathbf{I} - \mathbf{D}) (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]} \quad (3.9)$$

Определим тензор второго ранга Φ посредством следующего соотношения:

$$\mathbf{I} - \Phi = \sqrt{(\mathbf{I} - \mathbf{D})^T (\mathbf{I} - \mathbf{D})} \quad (3.10)$$

Подобное определение является корректным, поскольку под корнем находится симметричный положительно определенный тензор.

В силу определения тензор Φ является симметричным и положительно определенным, поэтому его собственные значения $\Phi_{(\alpha)}$ удовлетворяют следующему неравенству

$$1 - \Phi_{(\alpha)} > 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (3.11)$$

Покажем, что вращательная составляющая тензора $\mathbf{I} - \mathbf{D}$ оказывается исключенной.

Рассмотрим полярное разложение Коши тензора $\mathbf{I} - \mathbf{D}$:

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \Lambda \mathbf{Y} \quad (3.12)$$

где Λ – ортогональный тензор, \mathbf{Y} – симметричный положительно определенный тензор. Подставляя это разложение в формулу (3.10), получим

$$\mathbf{I} - \Phi = \sqrt{\mathbf{Y} \Lambda^T \Lambda \mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \quad (3.13)$$

Следовательно разложение (3.12) может быть также представлено в виде

$$\mathbf{I} - \mathbf{D} = \Lambda (\mathbf{I} - \Phi) \quad (3.14)$$

Исключая вращательную часть, т.е. полагая $\Lambda = \mathbf{I}$, получим равенство двух тензорных мер поврежденности

$$\mathbf{D} = \Phi \quad (3.15)$$

Тензор \mathbf{D} в работе [8] был назван тензором поврежденности. Сохраним это название, но за тензором Φ .

Тензор поврежденности определяет сокращение несущей нагрузки площади плоско-го элемента с нормалью n по формуле (см. уравнения (3.9), (3.10)):

$$dA^*/dA = [\text{tr}[\mathbf{I} - \Phi)^2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]]^{1/2} \quad (3.16)$$

Сравнивая выражения (3.8) и (3.16) для отношения площадей поврежденного и эквивалентного элементов, можно получить следующее представление тензора поврежденности через фиктивную дисторсию:

$$\mathbf{I} - \Phi = [\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}/\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T})]^{1/2} \quad (3.17)$$

Как следует из последнего уравнения, тензор $(\mathbf{I} - \Phi)^2$ вполне аналогичен тензорной мере деформации Фингера [11].

Рассмотрим координатное представление тензора поврежденности. Для этого симметричный тензор, находящийся под корнем в уравнении (3.17), представим, пользуясь тождеством Гамильтона–Кэли [12], в следующем виде:

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}/\det(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{-T}) = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^2 - \mathbf{I}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{G}^T\mathbf{G} + \Pi_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{I} \quad (3.18)$$

где $\mathbf{I}_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$ и $\Pi_{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$ главные инварианты тензора $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$.

В силу формулы (3.1), имеем

$$\mathbf{G}^T\mathbf{G} = g_{\alpha\beta}^* \mathbf{i}^\alpha \otimes \mathbf{i}^\beta \quad (3.19)$$

Постановка последнего выражения в (3.18) и подсчет инвариантов тензора $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ приводят к следующей формуле для компонент тензора $(\mathbf{I} - \Phi)^2$ относительно конвективной системы координат текущего поврежденного состояния:

$$(\mathbf{I} - \Phi)_{\gamma\lambda}^2 = g_{\gamma\beta}^* g_{\mu\lambda}^* g^{\beta\mu} - g_{\gamma\lambda}^* g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta} + 1/2[(g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}] g_{\gamma\lambda} \quad (3.20)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.16), получим также

$$(dA^*/dA)^2 = g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} n^\nu n^\alpha - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\alpha\beta} n^\mu n^\nu + 1/2[(g_{\alpha\beta}^* g^{\alpha\beta})^2 - g_{\alpha\beta}^* g_{\mu\nu}^* g^{\beta\mu} g^{\alpha\nu}] \quad (3.21)$$

Формулы (3.20), (3.21) показывают, что тензор поврежденности является изометрическим инвариантом как текущей поврежденной, так и эквивалентной неповрежденной конфигурации, т.е. не изменяется при любых трансформациях указанных конфигураций, при которых метрики $g_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}^*$ остаются неизменными.

Таким образом, эквивалентная неповрежденная конфигурация определена также с точностью до ее изометрической трансформации.

Заканчивая на этом исследование формальных свойств тензора поврежденности, переходим к содержательной интерпретации собственных элементов тензора поврежденности.

4. Главные поврежденности и главные оси поврежденности. Геометрическая и механическая интерпретация собственных элементов тензора поврежденности. Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности Φ имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения (главные поврежденности).

Векторы ортонормированного базиса из собственных векторов тензора Φ будем обозначать через $\mathbf{d}_{(\alpha)}$, а собственные значения, как указывалось выше через $\Phi_{(\alpha)}$.

Для содержательной интерпретаций, тензор поврежденности удобно представить в форме спектрального разложения

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^3 \Phi_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{d}_{(\alpha)} \quad (4.1)$$

Рассмотрим произвольно ориентированный поврежденный плоский элемент PQR , опирающийся на главные оси поврежденности в точке O текущей конфигурации B_t , так что образуется тетраэдр $OPQR$ (фиг. 4). Эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$ получается в результате преобразования тетраэдра $OPQR$ линейным оператором $\sqrt{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$.

В силу уравнений (3.5), (3.15) векторные элементы $d\mathbf{A}$ и $d\mathbf{A}^*$ связаны следующим соотношением:

$$d\mathbf{A}^* = (\mathbf{I} - \Phi)d\mathbf{A} \quad (4.2)$$

подставляя в которое спектральное разложение (4.1) получим

$$d\mathbf{A}^* = \sum_{\alpha=1}^3 (1 - \Phi_{(\alpha)}) dA_{(\alpha)} \mathbf{d}_{(\alpha)} \quad (4.3)$$

где $dA_{(\alpha)} = d\mathbf{A} \cdot \mathbf{d}_{(\alpha)}$ – площади граней тетраэдра $OPQR$, расположенные в главных плоскостях поврежденности.

Умножая обе части уравнения (4.3) скалярно на вектор $\mathbf{d}_{(\beta)}$, получим

$$dA_{(\beta)}^* = (1 - \Phi_{(\beta)}) dA_{\beta} \quad (\beta = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

где $dA_{(\alpha)}^* = d\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{d}_{(\alpha)}$ – площади граней эквивалентного неповрежденного тетраэдра $O^*P^*Q^*R^*$, расположенные в главных плоскостях поврежденности (по β не суммировать).

Последнее уравнение позволяет дать механическую интерпретацию собственных значений тензора поврежденности: главные поврежденности выражают сокращение несущей нагрузки площади элементов, нормальных главным осям поврежденности, так как это определяется простыми формулами (4.4).

Формула (4.4) в простейшей форме выражает количественно эффект сокращения эффективной площади элементов континуума с внутренним распределением повреждений.

Возможна также и другая интерпретация главных поврежденностей $\Phi_{(\alpha)}$ через сокращение линейных размеров тетраэдра $OPQR$ при его трансформации в эквивалентный неповрежденный тетраэдр $O^*P^*Q^*R^*$.

Действительно, поскольку тензоры $\mathbf{I} - \Phi$ и $\sqrt{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}$ соосны, то справедливы соотношения

$$\sqrt{\mathbf{G}^T\mathbf{G}}\mathbf{d}_{(\alpha)} = L_{(\alpha)}^{\Phi} \mathbf{d}_{(\alpha)} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (4.5)$$

где $L_{(\alpha)}^{\Phi}$ есть фиктивные удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное неповрежденное состояние (по α не суммировать).

Воспользовавшись уравнениями (3.17), (4.5), находим соотношения, связывающие главные поврежденности с главными фиктивными удлинениями:

$$1 - \Phi_{(\alpha)} = L_{(1)}^{\Phi} L_{(2)}^{\Phi} L_{(3)}^{\Phi} / L_{(\alpha)}^{\Phi} \quad (4.6)$$

Разрешив последние уравнения относительно $L_{(\alpha)}^{\Phi}$ находим также

$$L_{(1)}^{\Phi} = \left[\frac{(1 - \Phi_{(2)})(1 - \Phi_{(3)})}{(1 - \Phi_{(1)})} \right]^{1/2}, \quad L_{(2)}^{\Phi} = \left[\frac{(1 - \Phi_{(1)})(1 - \Phi_{(3)})}{(1 - \Phi_{(2)})} \right]^{1/2},$$

$$L_{(3)}^{\Phi} = \left[\frac{(1 - \Phi_{(1)})(1 - \Phi_{(2)})}{(1 - \Phi_{(3)})} \right]^{1/2} \quad (4.7)$$

Таким образом, главные поврежденности $\Phi_{(\alpha)}$ определяют удлинения (сокращения) главных осей поврежденности при переходе в эквивалентное состояние B_t^* в соответствии с формулами (4.7) и позволяют вычислить приведенные длины поврежденности. При этом, очевидно, что при переходе в эквивалентное состояние объем элемента изменяется, т.е. поврежденность имеет ненулевую объемную меру. Поскольку элиминирование поврежденности не есть реальная деформация элемента, а тензор деформаций и тензор поврежденности есть независимые переменные состояния (процесс накопления повреждений, например, может идти при почти нулевых деформациях; конфигурации \mathbf{X} и \mathbf{x} различаются тогда величиной нормы $\|\mathbf{I} - \Phi\|$), то изменение его плотности не может непосредственно определяться через объемный инвариант тензора поврежденности. Описание изменения плотности в процессе накопления поврежденности, таким образом, есть прерогатива реологического и кинетического моделирования поврежденности.

5. Экстремальные свойства главных поврежденностей. Вычисление тензора поврежденности по экспериментальным диаграммам. Главные поврежденности $\Phi_{(\alpha)}$ обладают важным экстремальным свойством, которое может также служить их определением. Кроме того тензор поврежденности и главные поврежденности могут быть вычислены как результат усреднения ориентационного распределения поврежденности, что дает возможность прямого вычисления тензорной меры поврежденности исходя из полученных экспериментально диаграмм поврежденности.

Формула (3.16), переписанная в главных осях поврежденности, имеет вид

$$(dA^* / dA)^2 = (1 - \Phi_{(1)})^2 n_{(1)}^2 + (1 - \Phi_{(2)})^2 n_{(2)}^2 + (1 - \Phi_{(3)})^2 n_{(3)}^2 \quad (5.1)$$

Занумеровав главные поврежденности в порядке их убывания $\Phi_{(1)} \geq \Phi_{(2)} \geq \Phi_{(3)}$ и подставляя равенство $n_{(1)}^2 = 1 - n_{(2)}^2 - n_{(3)}^2$ в формулу (5.1), после преобразований получим

$$(dA^* / dA)^2 = (1 - \Phi_{(1)})^2 + [(1 - \Phi_{(2)})^2 - (1 - \Phi_{(1)})^2] n_{(2)}^2 + [(1 - \Phi_{(3)})^2 - (1 - \Phi_{(1)})^2] n_{(3)}^2 \geq (1 - \Phi_{(1)})^2 \quad (5.2)$$

Аналогично может быть получена оценка сверху для отношений площадей поврежденного и неповрежденного плоских элементов:

$$(dA^* / dA)^2 = (1 - \Phi_{(3)})^2 - [(1 - \Phi_{(3)})^2 - (1 - \Phi_{(2)})^2] n_{(2)}^2 - [(1 - \Phi_{(3)})^2 - (1 - \Phi_{(1)})^2] n_{(1)}^2 \leq (1 - \Phi_{(3)})^2 \quad (5.3)$$

Объединяя оценки (5.2) и (5.3) получим следующую двустороннюю оценку:

$$1 - \Phi_{(1)} \leq dA^* / dA \leq 1 - \Phi_{(3)} \quad (5.4)$$

которая показывает, что наибольшее и наименьшее сокращение несущей нагрузки площади происходит в первом и третьем главных направлениях поврежденности. Экстремальные значения относительного сокращения эффективной площади равны $\Phi_{(1)}$ и $\Phi_{(3)}$, как это следует из оценки

$$\Phi_{(3)} \leq (dA - dA^*) / dA \leq \Phi_{(1)} \quad (5.5)$$

Таким образом, главные поврежденности устанавливают границы относительного уменьшения эффективной площади плоских элементов в континууме с внутренним распределением повреждений.

Обратимся теперь к исходному определению тензора поврежденности (3.16).

Можно показать, что уравнение (3.16) может быть разрешено относительно тензора поврежденности в виде

$$\mathbf{I} - \Phi = \left[\frac{3}{8\pi} \iint_S \zeta^2(\mathbf{n}) [5\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \mathbf{I}] dS \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

$$\zeta(\mathbf{n}) = dA^*(\mathbf{n})/dA(\mathbf{n}) \quad (5.7)$$

Таким образом, тензор поврежденности второго ранга может быть вычислен, исходя из известного (в том числе, определенного экспериментально) локального распределения поврежденности в зависимости от направления $\zeta = \zeta(\mathbf{n})$.

Формула (5.6) в главных осях поврежденности приобретает следующий вид

$$\Phi_{(\alpha)} = 1 - \left[\frac{3}{8\pi} \iint_S \zeta^2(\mathbf{n}) [5n_{(\alpha)}^2 - 1] dS \right]^{1/2} \quad (5.8)$$

и может быть использована для прямого подсчета главных поврежденностей.

Наиболее типичны получаемые экспериментально кусочно-постоянные на сфере единичных направлений диаграммы поврежденности. Если обозначить через ζ_l значение поврежденности для участка сферы малой площади δA_l , в пределах которого поврежденность можно считать постоянной, то тензор поврежденности вычисляется по формуле

$$\mathbf{I} - \Phi = \left[\frac{3}{8\pi} \sum_l \zeta_l^2 [5\mathbf{n}_l \otimes \mathbf{n}_l - \mathbf{I}] \delta A_l \right]^{1/2} \quad (5.9)$$

которая связывает теоретическую модель с экспериментальным измерением поврежденности.

6. Возрастание напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений. Тензор эффективных напряжений. Как уже обсуждалось в п. 1, вследствие сокращения эффективной площади элементов поврежденного континуума, уровень напряжений в поврежденном континууме должен возрасти. Для моделирования этого эффекта обычно вводится соответствующий тензор, который затем используется также при формулировке определяющих уравнений поврежденного континуума, заменяя тензор истинных напряжений Коши.

Прежде всего определим вектор эффективных напряжений \mathbf{t}^* , полагая, что поверхностные усилия, действующие на поврежденный плоский элемент и эквивалентный неповрежденный элемент с сокращенными геометрическими размерами, равны

$$\mathbf{t} dA = \mathbf{t}^* dA^* \quad (6.1)$$

Пользуясь формулой (3.16), последнее уравнение можно также представить в форме

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{t} [\text{tr}[(\mathbf{I} - \Phi)^2 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]]^{-1/2} \quad (6.2)$$

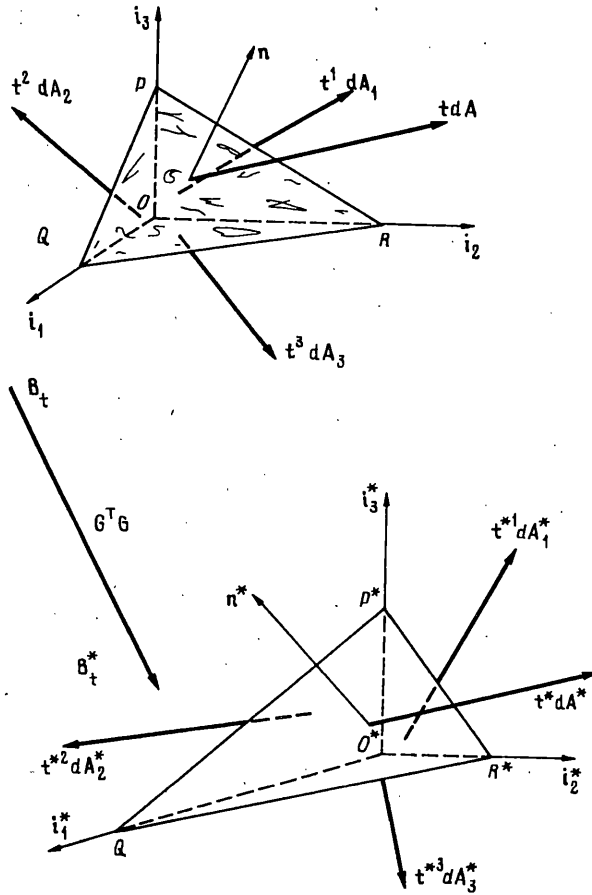
Ясно, что вектор эффективного поверхностного усилия \mathbf{t}^* имеет то же направление, что и вектор истинного поверхностного усилия \mathbf{t} , превосходя его по абсолютной величине.

Вводя в уравнение (6.1) тензор напряжений Коши \mathbf{T} и используя формулу (4.2), получим

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{T} dA/dA^* = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \Phi)^{-1} dA/dA^* = \mathbf{T}^* \mathbf{n}^* \quad (6.3)$$

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}(\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \quad (6.4)$$

где \mathbf{T}^* – тензор эффективных напряжений. Как следует из определения, тензор \mathbf{T}^* ,



Фиг. 5

вообще говоря, не является симметричным, поэтому система эффективных поверхностных усилий, действующих на эквивалентный неповрежденный объемный элемент dv^* , не будет самоуравновешенной.

Так как поверхностные усилия, действующие на элемент dv , самоуравновешены, то

$$tdA + t^1 dA_1 + t^2 dA_2 + t^3 dA_3 = 0 \quad (6.5)$$

где t, t^1, t^2, t^3 поверхностные усилия, действующие на грани тетраэдра $OPQR$, образованного плоским элементом PQR , опирающимся на векторы i_α конвективного базиса (фиг. 5).

В силу уравнения (6.1) из уравнения равновесия (6.5) следует также

$$t^* dA^* + t^{*1} dA_1^* + t^{*2} dA_2^* + t^{*3} dA_3^* = 0 \quad (6.6)$$

т.е. главный вектор эффективных поверхностных усилий, действующих на грани эквивалентного неповрежденного тетраэдра равен нулю. Поэтому эквивалентный объемный элемент будет находиться только под действием неуравновешенной пары сил.

Последнее обстоятельство чрезвычайно затрудняет использование тензора T^* для представления напряжений в поврежденном континууме, поэтому мы сначала обсудим условия симметрии тензора T .

Так как тензор напряжений Коши симметричен, то из уравнения (6.4) следует

$$\mathbf{T}^* \mathbf{T} = (\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \mathbf{T}^* (\mathbf{I} - \Phi) \quad (6.7)$$

Полученное уравнение позволяет сформулировать условие симметрии

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{*T} \quad (6.8)$$

в виде

$$\mathbf{T}^* \Phi = \Phi \mathbf{T}^* \quad (6.9)$$

или также в виде

$$\mathbf{T} \Phi = \Phi \mathbf{T} \quad (6.10)$$

Таким образом, тензор \mathbf{T}^* симметричен тогда и только тогда, когда тензор поврежденности перестановочен с тензором напряжений Коши. Перестановка двух симметричных тензоров второго ранга возможна в свою очередь тогда и только тогда, когда эти тензоры соосны (точнее имеют по крайней мере одну общую тройку главных направлений).

Если тензоры \mathbf{T} и Φ соосны, то тензор \mathbf{T}^* также им соосен, так что в главных осях поврежденности имеем следующее равенство (по α не суммировать):

$$T_{(\alpha)}^* = T_{(\alpha)} / (1 - \Phi_{(\alpha)}) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (6.11)$$

Полученная формула в простейшей, согласующейся с геометрическим смыслом тензора поврежденности форме описывает эффект возрастания напряжений в континууме с внутренним распределением повреждений.

Становится также ясно, что тензор \mathbf{T}^* необходимо симметризовать таким образом, чтобы выполнялось соотношение, аналогичное (6.11). Мы опишем процедуру симметризации ниже.

7. Тензор поврежденности для конфигурации упруго разгруженных поврежденных элементов. Тензор поврежденности был определен (см. п. 3) как мера сокращения эффективной площади плоских поврежденных элементов континуума (можно сказать, что он определен по отношению к текущей конфигурации B_t). Все предыдущие рассуждения касались только одного необратимого изменения состояния – накопления повреждений, вне всякой связи с другими необратимыми изменениями состояния. Не касаясь термодинамического аспекта процесса накопления повреждений, отделим влияние упругой (в широком смысле – обратимой части) деформации на состояние поврежденности элементов. Как будет показано ниже, это позволит ввести еще одну тензорную меру анизотропной поврежденности, а также по-новому интерпретировать условия симметрии тензора эффективных напряжений.

Помимо трех введенных ранее конфигураций B_0, B_t, B_t^* , рассмотрим конфигурацию \tilde{B}_t , состоящую из поврежденных элементов, упругая деформация которых элиминирована путем упругой разгрузки каждого элемента из его текущего состояния. Подобная процедура отделения упругой деформации широко используется в теории пластичности (см. например [13]).

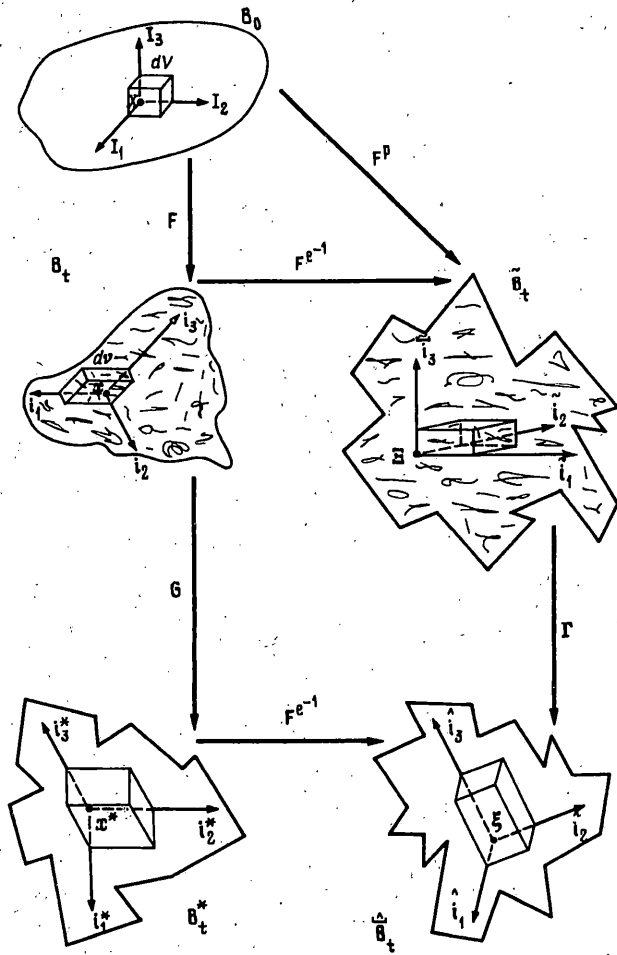
Положения элементов в конфигурации \tilde{B}_t будем обозначать через $\tilde{\mathbf{X}}$.

Дисторсия поврежденного элемента в результате его упругой разгрузки описывается тензором \mathbf{F}^{e-1} , следовательно тензор $\mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{F}$ описывает чисто необратимую часть деформации (фиг. 6).

Таким образом градиент деформации представляется в виде композиции упругого и пластического градиентов [12]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (7.1)$$

Конвективный базис \mathbf{i}_α , трансформируясь вместе с элементом при его упругой



Фиг. 6

разгрузке, преобразуется в базис \hat{i}_α . Образ векторного элемента dA при указанной трансформации обозначим через $d\hat{A}$.

Так как дисторсия, определяемая тензором G , является полностью необратимой, то дисторсия эквивалентных неповрежденных элементов при их упругой разгрузке описывается тем же самым тензором F^{e-1} .

Будем обозначать через \hat{B}_t конфигурацию эквивалентных неповрежденных элементов, подвергшихся упругой разгрузке, через ξ — положение элементов в этой конфигурации, а через $d\hat{A}$ — образ векторного элемента площади эквивалентного неповрежденного элемента после его упругой разгрузки.

Дисторсия поврежденного элемента в конфигурации \hat{B}_t , в результате его трансформации в конфигурацию B_t описывается тензором

$$\Gamma = F^{e-1} G F^e \quad (7.2)$$

Определим тензор Δ равенством, аналогичным (3.17):

$$I - \Delta = [\Gamma^{-1} \Gamma^{-T} / \det(\Gamma^{-1} \Gamma^{-T})]^{1/2} \quad (7.3)$$

Тензор Δ вполне аналогичен тензору Φ и его интерпретация не вызывает затруднений. Тензор Δ определяет сокращение эффективной площади поврежденных, подвергшихся упругой разгрузке элементов в соответствии с формулой

$$d\hat{A} / d\tilde{A} = [\text{tr}[(\mathbf{I} - \Delta)^2 (\tilde{\mathbf{n}} \otimes \tilde{\mathbf{n}})]]^{1/2} \quad (7.4)$$

Тензор Δ будем называть тензором поврежденности по отношению к конфигурации \tilde{B}_i .

Сокращение эффективной площади плоских поврежденных элементов в конфигурации \tilde{B}_i , нормальных собственным векторам $\delta_{(\alpha)}$ тензора Δ , определяется формулами ($\Delta_{(\alpha)}$ – главные поврежденности в конфигурации \tilde{B}_i):

$$d\hat{A}_{(\beta)} = (1 - \Delta_{(\beta)}) d\tilde{A}_{(\beta)} \quad (\beta = 1, 2, 3) \quad (7.5)$$

аналогичными (4.4) (по β не суммировать).

Удлинения (сокращения) главных осей поврежденности в конфигурации \tilde{B}_i вычисляются по формулам (см. 4.7)):

$$L_{(1)}^{\Delta} = \left[\frac{(1 - \Delta_{(2)})(1 - \Delta_{(3)})}{(1 - \Delta_{(1)})} \right]^{1/2}, \quad L_{(2)}^{\Delta} = \left[\frac{(1 - \Delta_{(1)})(1 - \Delta_{(3)})}{(1 - \Delta_{(2)})} \right]^{1/2},$$

$$L_{(3)}^{\Delta} = \left[\frac{(1 - \Delta_{(1)})(1 - \Delta_{(2)})}{(1 - \Delta_{(3)})} \right]^{1/2} \quad (7.6)$$

Полученные результаты позволяют дать другую формулировку условий симметрии тензора эффективных напряжений.

8. Условия симметрии и симметризация тензора эффективных напряжений. Как уже отмечалось, тензор эффективных напряжений не является вообще говоря симметричным. Следовательно, эквивалентная конфигурация не является самоуравновешенной.

Тензор эффективных напряжений, однако, заведомо симметричен, если тензор напряжений Коши и тензор поврежденности соосны. Интерпретируем это условие, используя результаты п. 7.

Рассмотрим уравнение (7.2). Тензор \mathbf{G} в принципе можно считать симметричным (см. п. 3), так же как и тензор \mathbf{F}^e и по тем же самым причинам. Поэтому, тензор $\mathbf{\Gamma}$ симметричен тогда и только тогда, когда тензоры \mathbf{G} (или Φ) и \mathbf{F}^e соосны. При этом тензоры $\mathbf{\Gamma}$ и \mathbf{G} совпадают, так же как и тензоры Φ и Δ и выполняется равенство

$$\mathbf{F}^e \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{F}^e \quad (8.1)$$

или, что эквивалентно, равенство

$$\mathbf{V}^e \Phi = \Phi \mathbf{V}^e \quad (8.2)$$

где \mathbf{V}^e – левый тензор Коши–Грина упругой деформации.

Предположив теперь, что континуум является упруго изотропным, заключаем, что управление (8.2) удовлетворяется, только если главные оси тензоров Φ и \mathbf{T} совпадают.

Итак, тензор эффективных напряжений симметричен тогда и только тогда, когда главные оси упругой деформации ориентированы так же, как и главные оси поврежденности, т.е. плоские поврежденные элементы с экстремальными значениями сокращения эффективной площади нормальны главным осям упругой деформации в конфигурации B_i . При этом тензоры поврежденности Φ и Δ совпадают, что означает, что упругая деформация никак не влияет на состояние поврежденности.

В виду того, что нарушение симметрии тензора эффективных напряжений вызвано различием в ориентации главных осей тензора напряжений и тензора поврежденности, тензор

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}\Phi - \Phi\mathbf{T} \quad (8.3)$$

может служить мерой экстра напряжений, которые представляют пары сил, действующие на эквивалентные элементы в конфигурации B_i^* , и может быть назван тензором экстра напряжений поврежденного континуума.

Для характеристики различия в ориентации главных осей напряжений и главных осей поврежденности введем ортогональный тензор \mathbf{Q} , который определяет преобразование поворота главных осей поврежденности в главные оси напряжений

$$\mathbf{s}_{(\alpha)} = \mathbf{Q}\mathbf{d}_{(\alpha)} \quad (8.4)$$

где $\mathbf{s}_{(\alpha)}$ – векторы ортонормированного собственного базиса тензора напряжений. Напомним, что главные оси нумеруются так, что соответствующие собственные значения располагаются в порядке убывания. Тензор \mathbf{Q} будем называть тензором поворота главных осей поврежденности.

В процессе накопления повреждений материал приобретает дополнительные анизотропные свойства. Подобная анизотропия также интегрально проявляется в дополнительном изменении ориентации главных осей напряжений относительно главных осей деформации в конфигурации B_i . Следовательно, тензор \mathbf{Q} может также служить мерой дополнительной анизотропии, вызванной внутренним распределением повреждений.

Указанное выше разделение анизотропных свойств материала на начальные и индуцированные внутренним распределением повреждений, вписывается в концепцию эффективных напряжений требованием соосности тензора эффективных напряжений и тензора поврежденности. Если еще учесть, что эффект возрастания напряжений в поврежденном континууме в соответствии с геометрическим и механическим смыслом тензора поврежденности выражается классической формулой (6.11), то симметричный тензор эффективных напряжений определяется двумя только что сформулированными требованиями однозначно в следующем виде:

$$\mathbf{T}_\Phi = \mathbf{Q}^T\mathbf{T}\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \quad (8.5)$$

Тензор \mathbf{T}_Φ , определенный последним равенством, очевидно, является симметричным, поскольку тензоры $\mathbf{Q}^T\mathbf{T}\mathbf{Q}$ и $(\mathbf{I} - \Phi)^{-1}$ имеют одинаковые главные оси. В главных осях поврежденности формула (8.5) имеет вид (по α не суммировать):

$$T_{\Phi(\alpha)} = T_{(\alpha)} / (1 - \Phi_{(\alpha)}) \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (8.6)$$

Тензор \mathbf{T}_Φ будем называть симметризованным тензором эффективных напряжений.

В соответствии с обычной процедурой континуальной механики поврежденного континуума, тензор эффективных напряжений используется при формулировке определяющих уравнений поврежденного материала. Последние получаются в результате замены тензора напряжений Коши в уравнении (8.5) определяющим функционалом неповрежденного континуума. Чтобы представить эти уравнения в наиболее удобной для последующего анализа форме, введем в уравнение (8.5) вместо тензора поворота соответствующий полярный вектор по формуле [11]:

$$\mathbf{Q} = (\kappa^2 - |\mathbf{p}|^2)\mathbf{I} + 2\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} + 2\kappa\mathbf{P} \quad (\mathbf{p} = \sin(\theta/2)\mathbf{m}, \kappa = \cos(\theta/2)) \quad (8.7)$$

где \mathbf{m} – единичный вектор, направленный вдоль оси поворота, θ – угол поворота, а антисимметричный тензор \mathbf{P} определен как оператор векторного умножения (\mathbf{u} – произвольный вектор трехмерного пространства):

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} \times \mathbf{u} \quad (8.8)$$

Полярный вектор \mathbf{p} будем называть директором анизотропной поврежденности.

Вводя в уравнение (8.7) векторный инвариант \mathbf{P}_x тензора \mathbf{P} получим также:

$$\mathbf{Q} = (1 - |\mathbf{P}_x|^2)\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{P}_x \otimes \mathbf{P}_x + \sqrt{4 - |\mathbf{P}_x|^2}\mathbf{P} \quad (8.9)$$

Подставляя полученное равенство в формулу (8.5), после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\Phi = & \{(1 - \frac{1}{2}|\mathbf{P}_x|^2)[(1 - \frac{1}{2}|\mathbf{P}_x|^2)\mathbf{T} + \text{sym}((\mathbf{P}_x \otimes \mathbf{P}_x)\mathbf{T}) + \\ & + 2\sqrt{4 - |\mathbf{P}_x|^2} \text{sym}(\mathbf{T}\mathbf{P})] + \sqrt{4 - |\mathbf{P}_x|^2} \text{sym}((\mathbf{P}_x \otimes \mathbf{P}_x)\mathbf{T}\mathbf{P}) + \\ & + \frac{1}{4}(\mathbf{P}_x \otimes \mathbf{P}_x)\mathbf{T}(\mathbf{P}_x \otimes \mathbf{P}_x) - (4 - |\mathbf{P}_x|^2)\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}\}(\mathbf{I} - \Phi)^{-1} \end{aligned} \quad (8.10)$$

В качестве примера рассмотрим определяющее уравнение поврежденного континуума со слабой анизотропией, индуцированной внутренним распределением повреждений. Примеры использования симметричного тензора эффективных напряжений для формулировки определяющих уравнений ползучести и верификация их адекватности имеются в целом ряде работ (см., например, [8]).

В этом случае угол θ можно считать малым и для директора анизотропной поврежденности имеем простое выражение вида $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\theta\mathbf{m}$. В силу (8.4), (8.7), находим также

$$\mathbf{d}_{(\alpha)} = \mathbf{s}_{(\alpha)} - \theta\mathbf{m} \times \mathbf{s}_{(\alpha)} \quad (8.11)$$

Подставляя полученное соотношение в спектральное разложение тензора эффективных напряжений

$$\mathbf{T}_\Phi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{T_{(\alpha)}}{1 - \Phi_{(\alpha)}} \mathbf{d}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{d}_{(\alpha)} \quad (8.12)$$

получим следующее уравнение:

$$\mathbf{T}_\Phi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{T_{(\alpha)}}{1 - \Phi_{(\alpha)}} \mathbf{s}_{(\alpha)} \otimes \mathbf{s}_{(\alpha)} + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{T_{(\alpha)}}{1 - \Phi_{(\alpha)}} \text{sym}[(\mathbf{m} \otimes \mathbf{s}_{(\alpha)})\mathbf{\Omega}_{D_{(\alpha)}}] \quad (8.13)$$

где тензор $\mathbf{\Omega}_{D_{(\alpha)}}$ определен следующим условием: $\mathbf{\Omega}_{D_{(\alpha)}} = -2\theta\mathbf{s}_{(\alpha)}$.

Вторая сумма в формуле (8.13) появляется вследствие дополнительной слабой анизотропии континуума, вызванной распределением повреждений.

Подставляя в последнее уравнение определяющее уравнение неповрежденного континуума, которое берется в наиболее общей форме

$$T_{(\alpha)} = Y_{(\alpha)}(L_{(\beta)}, \mathbf{Y}, \eta_\omega), \quad \mathbf{s}_{(\alpha)} = \mathbf{Y}\mathbf{l}_{(\alpha)} \quad (8.14)$$

где $L_{(\beta)}$ – главные удлинения, $\mathbf{l}_{(\alpha)}$ – единичные векторы, направленные по главным осям деформации в текущей конфигурации, η_ω – термодинамические параметры состояния, $Y_{(\alpha)}$, \mathbf{Y} – определяющие функционалы, получим определяющее уравнение поврежденного континуума в виде:

$$\mathbf{T}_\Phi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{Y_{(\alpha)}}{1 - \Phi_{(\alpha)}} ((\mathbf{Y}\mathbf{l}_{(\alpha)}) \otimes \mathbf{l}_{(\alpha)}) \mathbf{Y}^T + 2 \sum_{\alpha=1}^3 \frac{Y_{(\alpha)}}{1 - \Phi_{(\alpha)}} \text{sym}[(\mathbf{m} \otimes \mathbf{Y}\mathbf{l}_{(\alpha)})\mathbf{\Omega}_{D_{(\alpha)}}] \quad (8.15)$$

Последнее уравнение в простейшей форме учитывает слабую анизотропию континуума вследствие внутреннего распределения повреждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОTH. 1958. № 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Hult J. Creep in continua and structures // Topics in Applied Continuum Mechanics / Ed. by J.L. Zeman and F. Ziegler: Vienna: Springer, 1974. P. 137–155.
4. Качанов Л.М. Introduction to Continuum Damage Mechanics. Dordrecht: Nijhoff, 1986. 135 p.
5. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Berlin, etc: Springer, 1992. 210 p.
6. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage // Creep in Structures / Ed. by A.R.S. Ponter and D.R. Hayhurst. Berlin: Springer, 1981. P. 422–443.
7. Murakami S. Anisotropic aspects of material damage and application on continuum damage mechanics // Continuum Damage Mechanics – Theory and Application / Ed by D. Krajcinovic and J.Lemaitre. Wien: Springer, 1987. P. 91–133.
8. Murakami S. Mechanical modeling of material damage // Trans. ASME J. Appl. Mech, 1988. V. 55. No. 2. P. 280–286.
9. Lubarda V.A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution // Int. J. Solids Structures, 1993. V. 30. No. 20. P. 2859–2877.
10. Brillouin L. Tensors in Mechanics and Elasticity. New York – London: Acad. Press, 1964. 478 p.
11. Truesdell C., Toupin R.A. The Classical Field Theories // Handbuch der Physik / Ed. by S. Flugge. Berlin: Springer, 1960. V. 3/1. P. 226–793.
12. Ericksen J.L. Tensor fields // Handbuch der Physik / Ed. by S. Flugge. Berlin: Springer, 1960. V. 3/1. P. 794–858.
13. Maugin G.A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge–New York: Cambridge Univ. Press, 1992. 400 p.

Нагайя, Япония, Самара

Поступила в редакцию
11.VIII.1994