

УДК 539.375

© 1996 г. А.В. БАЛУЕВА, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН, М. МАТЧИНСКИЙ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О ЗАКРЫТИИ ТРЕЩИНЫ ВБЛИЗИ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

При рассмотрении долговечности конструкций при механическом и термическом нагружении необходимо принимать во внимание возможность контакта поверхностей трещины. Действительно, если трещина находится в поле растягивающих напряжений на бесконечности и вблизи ее поверхностей имеются изолированные источники тепла, то сжимающие термические напряжения могут наложиться на растягивающие и поверхности трещины могут прийти в контакт по некоторой области. Это приводит к перестройке напряженно-деформированного состояния и, следовательно, оказывает влияние на условия роста трещин и, следовательно, на долговечность.

Задачи о трещинах с частично налегающими поверхностями в плоском и осесимметричном случае хорошо разработаны. В этих случаях нахождение области контакта сводится к определению нескольких чисел (координат концов областей контакта) и может быть выполнено итерационным методом. В трехмерном случае для уплощенных трещин произвольной формы, граница области контакта – неизвестная кривая и она имеет неизвестное априори местоположение и поэтому должна быть найдена в процессе решения задачи [1]. Решение такого класса задач с неизвестной границей требует методов нелинейного программирования.

Если вблизи поверхностей трещины имеются источники тепла, то возможная область налегания будет несимметричной относительно центра трещины даже для круговых трещин, так как она будет зависеть от локализации источников. В рассматриваемой совместной термоупругой задаче необходимо найти как изменение термоупругих напряжений из-за наличия источников тепла, так и смещения поверхностей трещины при этих напряжениях и возможные области их контакта. Таким образом, требуется решить пространственные задачи теплопроводности и задачу теории упругости для среды с трещиной, связанные между собой граничными условиями. Указанные трехмерные задачи сводятся к двумерным интегродифференциальным уравнениям, записанным по области трещины (граничным интегральными уравнениями), которые затем решаются численно методом граничных элементов в сочетании с итерационным процессом определения зоны налегания.

В литературе известно несколько решений термоупругих задач, принимающих в расчет закрытие трещин, в плоской постановке. Аналитические решения контактных задач для прямолинейных трещин в поле тепловых изолированных источников получены в [2, 3]. Предложена схема численного решения задачи о нахождении зоны контакта плоской криволинейной трещины при наличии в ее окрестности источников тепла и предсказано распространение трещины в этих условиях [4]. В [5] не учитывается контакт поверхностей трещины, но рассчитывается аналитически пластическая зона вокруг дискообразной трещины, обусловленная термодиффузией.

1. Постановка задачи. Предположим, что среда содержит трещину, которая занимает область $G(x_1, x_2)$ в плоскости $x_3 = 0$. Трещина имеет произвольное начальное раскрытие $2w_0(x_1, x_2)$, и ее поверхности поддерживаются при постоянной температуре $\theta = 0$. Два тепловых источника интенсивности W помещены на оси x_3 симметрично относительно плоскости $x_3 = 0$ на расстоянии ξ_3 от плоскости трещины (фиг. 1). Под действием термоупругих напряжений $\varphi(x_1, x_2)$, обусловленных тепловыми источниками, поверхности трещины могут прийти в контакт по некоторой области.

Область контакта (или области) неизвестны заранее и должны быть найдены в процессе решения задачи. Из-за симметрии задачи распределение напряжений и


$$\Delta\theta = -\frac{W}{\lambda}\delta(x_1)\delta(x_2)[\delta(x_3 - \xi_3) + \delta(x_3 + \xi_3)] \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \begin{matrix} (x_1, x_2) \in G \\ (x_1, x_2) \in G \end{matrix} \quad \text{при } w + w_0 = 0$$

$$\theta|_{x_3=\infty} = 0$$

Для построения интегрального уравнения относительно функции φ , как обычно, рассмотрим сначала решение задачи теплопроводности в случае существования тепловых источников в среде без трещины

$$\partial\theta/\partial x_3|_{x_3=0} = 0, \quad \theta|_{x_3=\infty} = 0$$

$$\Theta(x_1, x_2, x_3) = \frac{W}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$R_{1,2} = [x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \mp \xi_3)^2]^{1/2}$$

$$\theta(x_1, x_2, 0) = \frac{W}{2\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} \quad (1.4)$$
$$\Delta\theta = 0 \quad (1.5)$$

$$\theta|_{x_3=0} = -\frac{W}{2\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}}, \quad (x_1, x_2) \in G, \text{ при } w > 0 \quad (1.6)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} = 0, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (x_1, x_2) \in G \quad \text{при } w = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_G \frac{\varphi(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} = \frac{W}{2\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}}, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad w > 0 \quad (1.8)$$

Предположим, вычислен градиент температуры $\varphi = \partial\theta/\partial x_3$ в области трещины. Тогда для термоупругой задачи о трещине, на поверхностях которой известен поток тепла $q \sim \varphi$, в несвязанной постановке имеем уравнения равновесия упругого пространства $x_3 \geq 0$, на границе которого выполняются условия

$$w(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in G \quad (1.9)$$

$$w(x_1, x_2) \geq -w_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in G \quad (1.10)$$

$$\sigma_{33} \leq 0 \quad \text{для } w = -w_0 \quad (x_1, x_2) \in G \quad (1.11)$$

$$\sigma_{33} = \varphi' \quad \text{для } w > -w_0 \quad (x_1, x_2) \in G$$

$$\varphi' = \frac{E\alpha}{(1-2\nu)} \varphi$$

Вертикальные напряжения $\sigma_{33}(x_1, x_2)$ в плоскости трещины представляют собой сумму внешних воздействий, возникших из-за термических напряжений, и реакций от соприкасающихся поверхностей трещины. Поэтому, в той части области G , где поверхности трещины контактируют, т.е. их нормальные смещения $w(x_1, x_2)$ равны $-w_0(x_1, x_2)$ и тепловой поток $\varphi = 0$, напряжения σ_{33} меньше 0 (условие (1.11), здесь сжимающие напряжения считаются отрицательными). Таким образом речь идет о решении задачи теплопроводности (1.1) и задачи теории упругости (1.9)–(1.11) для среды с трещиной при граничных условиях, обеспечивающих связь между указанными задачами.

Задача (1.9)–(1.11) эквивалентна вариационной задаче о минимуме функционала

$$I = -\frac{k}{2\pi} \iint_G w(x_1, x_2) \left[\Delta_{x_1, x_2} \iint_G \frac{w(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} + \right. \\ \left. + 2 \iint_G \varphi(x_1, x_2) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] \quad (1.12)$$

$$\Delta_{x_1, x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad k = \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu^2)\alpha}$$

на функциях $w(x_1, x_2)$, удовлетворяющих ограничению (1.10). Область или области, в которых решение w достигает ограничений $w = -w_0$, как доказано в [6], есть области налегания.

Таким образом трехмерная задача нахождения смещений поверхностей трещины и области их смыкания в поле от тепловых источников сводится к решению двух связанных двумерных интегродифференциальных уравнений: (1.8) для задачи теплопроводности и уравнения для трещины

$$-\frac{k}{2\pi} \Delta_{x_1, x_2} \iint_G \frac{w(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} = \varphi(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in G \quad (1.13)$$

которые решаются вариационным методом минимизации соответствующих квадратичных функционалов (уравнение (1.13) является классическим уравнением Эйлера по отношению к функционалу (1.12)), причем в случае решения уравнения для трещины минимизация осуществляется с ограничениями на решения. Интегродифференциальное уравнение для задачи теплопроводности (1.8) решается сначала в области G , затем, после минимизации функционала (1.12) и нахождения области налегания G' , в области G/G' и так далее. В результате итерационного процесса находится уточненная область налегания.

Если два симметричных относительно плоскости трещины тепловых источника расположены не на оси x_3 , но в произвольных точках тела (a, b, ξ_3) и $(a, b, -\xi_3)$ (фиг. 1), интегральное уравнение (1.8) может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\pi} \iint_G \frac{\varphi(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} = \frac{W}{2\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + \xi_3^2}} \quad (1.14)$$

Если рассматриваются несколько точечных тепловых источников или тепловые источники, распределенные с плотностью $W(x_1, x_2, x_3)$, можно получить соответствующие уравнения из принципа суперпозиции

$$\iint_G \frac{\varphi(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} = \frac{1}{\lambda} \sum_i \frac{W_i}{\sqrt{(x_1 - a_i)^2 + (x_2 - b_i)^2 + \xi_{3i}^2}} \quad (1.15)$$

$$\iint_G \frac{\varphi(x'_1, x'_2) dx'_1 dx'_2}{\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}} = \frac{1}{\lambda} \iiint_T \frac{W(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + y_3^2}} \quad (1.16)$$

где W_i — интенсивности источников, которые расположены в точках $(a_i, b_i, \pm \xi_{3i})$ соответственно, и T — область распределения тепловых источников с плотностью $W(x_1, x_2, x_3)$.

2. Численный метод. Для построения решения интегродифференциальных уравнений теплопроводности (1.8) и теории упругости (1.13) используются вариационно-разностный метод Гольдштейна — Клейна — Эскина с применением техники обобщенного преобразования Фурье¹. Сначала решается задача теплопроводности и находится градиент тепла в области трещины $\varphi(x_1, x_2)$, а затем строится решение задачи теории упругости с массовыми силами, обусловленными действием градиентов температуры, и находится функция $w(x_1, x_2)$ и область $G' \subset G$, в которой $w \equiv -w_0$. Указанные задачи далее будем называть соответственно задачами I и задачей II. Далее процесс повторяется, но уже в найденной области $G'' = G/G'$.

С помощью обобщенного преобразования Фурье интегродифференциальные уравнения (1.8) и (1.13) принимают вид [8]:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\xi_1|} \varphi^*(\xi_1, \xi_2) \exp[-(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{W}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} \quad (2.1)$$

$$\frac{k}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\xi_1| w^*(\xi_1, \xi_2) \exp[-(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 = \varphi \quad (2.2)$$

где φ^*, w^* — соответственно обобщенные образы Фурье функций φ и w .

Вариационная постановка задачи I состоит в безусловной минимизации функционала

$$J_I = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\xi_1|} \varphi^*(\xi) \overline{\varphi^*(\xi)} d\xi - 2 \frac{W}{\lambda} \iint_G \frac{W\varphi(x)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} dx \quad (2.3)$$

и вариационная постановка задачи II — в минимизации функционала

$$J_{II} = \frac{k}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\xi_1| w^*(\xi) \overline{w^*(\xi)} d\xi - 2 \iint_G \varphi(x) w(x) dx \quad (2.4)$$

на функциях $w(x_1, x_2)$, определенных на G и удовлетворяющих ограничению $w \geq -w_0$.

¹ Гольдштейн Р.В., Клейн И.С., Эскин Г.И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегродифференциальных уравнений: Препринт № 33. М.: Ин-т проблем механики РАН. 1973. 35 с.

После дискретизации области G решение задач I и II отыскивается в виде линейной комбинации координатных функций

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{p_1 p_2} c_{p_1 p_2} \Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2, h) \quad (2.5)$$

$$w(x_1, x_2) = \sum_{p_1 p_2} U_{p_1 p_2} \Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2, h) \quad (2.6)$$

$$\Psi(x_1, x_2, h) = \begin{cases} (1 - |x_1 / h - p_1|)(1 - |x_2 / h - p_2|), & x \in g_{p_1 p_2}^{2h} \\ 0, & x \notin g_{p_1 p_2}^{2h} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$g_{p_1 p_2}^{2h} = \{x : |x_1 / h - p_1|, |x_2 / h - p_2| \leq 1\}$$

где неизвестные коэффициенты $c_{p_1 p_2}$ и $U_{p_1 p_2}$ совпадают с искомыми функциями φ и w в узлах сетки.

Пользуясь тем, что обобщенное преобразование выбранных пробных функций (2.7) известно, можно выписать дискретную вариационную постановку задачи I:

$$\min \left\{ J_1(h) = \sum_{p_1 p_2} \sum_{q_1 q_2} a'_{p_1 p_2 q_1 q_2} c_{p_1 p_2} c_{q_1 q_2} + 2 \sum_{p_1 p_2} c_{p_1 p_2} b'_{p_1 p_2} \right\} \quad (2.8)$$

$$a'_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a'_{|p_1 - p_2|, |q_1 - q_2|} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\xi|} \Psi_{p_1 p_2}(\xi, h) \overline{\Psi_{q_1 q_2}(\xi, h)} d\xi \quad (2.9)$$

$$b'_{p_1 p_2} = \iint_{g_{p_1 p_2}^{2h}} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} \Psi(x_1, x_2, h) dx_1 dx_2 \quad (2.10)$$

$$\Psi_{p_1 p_2}(\xi, h) = h^2 \exp[ih(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2)] \frac{\sin^2(\frac{1}{2} h \xi_1) \sin^2(\frac{1}{2} h \xi_2)}{(\frac{1}{2} h \xi_1)^2 (\frac{1}{2} h \xi_2)^2} \quad (2.11)$$

и дискретную вариационную постановку задачи минимизации квадратичного функционала, но уже с ограничениями, для задачи II

$$\min_{U_{p_1 p_2} \geq -w_0(h p_1, h p_2)} \left\{ J_2(h) = \sum_{p_1 p_2} \sum_{q_1 q_2} a_{p_1 p_2 q_1 q_2} U_{p_1 p_2} U_{q_1 q_2} + 2 \sum_{p_1 p_2} U_{p_1 p_2} b_{p_1 p_2} \right\} \quad (2.12)$$

$$a_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a_{|p_1 - p_2|, |q_1 - q_2|} = \frac{k}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\xi| \Psi_{p_1 p_2}(\xi, h) \overline{\Psi_{q_1 q_2}(\xi, h)} d\xi \quad (2.13)$$

$$b_{p_1 p_2} = \iint_{g_{p_1 p_2}^{2h}} \varphi(x_1, x_2) \Psi_{p_1 p_2}(x_1, x_2, h) dx_1 dx_2 \quad (2.14)$$

Дискретные постановки задач I и II отличаются видом матриц жесткости $a_{p_1 p_2 q_1 q_2}$, $a'_{p_1 p_2 q_1 q_2}$ и правой части $b_{p_1 p_2}$, $b'_{p_1 p_2}$.

Ввиду типа ядер интегродифференциальных уравнений (2.1) и (2.2) и выбранных координатных функций соответствующие матрицы жесткости теплицевы, т.е. $a_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a'_{|p_1 - p_2|, |q_1 - q_2|}$, $a'_{p_1 p_2 q_1 q_2} = a'_{|p_1 - p_2|, |q_1 - q_2|}$ и метод Гольдштейна – Клейна – Эскина с помощью техники обобщенного преобразования Фурье позволяет вывести для них асимптотические формулы² [7], что делает время расчета несравненно меньше по

² См. указ. публ. с. 88.

сравнению с методами, где элементы матрицы жесткости должны вычисляться в узлах сеточной области непосредственно.

Коэффициенты правой части $b_{p_1 p_2}$ задачи II (выражение (2.14)) используют для вычисления функцию $\varphi(x_1, x_2)$, вычисленную в I задаче, и которая поэтому имеет дискретный вид. Чтобы распространить ее на всю область используется двумерная трехточечная интерполяция

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) = & \varphi_{00} + \frac{1}{h}(x - x_0)(\varphi_{00} - \varphi_{10}) + \frac{1}{h}(y - y_0)(\varphi_{00} - \varphi_{01}) + \\ & + \frac{1}{2h^2}(y - y_0)(y - y_1)(\varphi_{00} - 2\varphi_{01} + \varphi_{02}) + \frac{1}{h^2}(x - x_0)(y - y_0)(\varphi_{00} - \varphi_{10} - \varphi_{01} + \varphi_{11}) + \\ & + \frac{1}{2h^2}(x - x_0)(x - x_1)(\varphi_{00} - 2\varphi_{10} + \varphi_{20}) \\ \varphi_{il} = & \varphi(x_{i+l}, y_{j+l}) \quad (l = 0, 1, 2)\end{aligned}$$

При минимизации квадратичных функционалов (2.8), (2.12) применяется метод проекции градиента. В отличие от задачи I, в задаче II осуществляется минимизация функционала с ограничениями $w \geq -w_0$ и находится область достижения этих ограничений в процессе самого решения. Задачи такого рода относятся к задачам нелинейного программирования. Для ее решения привлекается метод [8] проекции градиента с автоматическим выбором шага по соотношению между действительным приращением функционала и его линейной частью.

3. Результаты вычислений. Проведены модельные расчеты смещений поверхностей трещин, находящихся вблизи точечных тепловых источников, и найдены области налегания. На фиг. 2 приведен график уровней смещений $u' = w'_0 + w'$ поверхностей круговой в плане трещины начального вертикального раскрытия

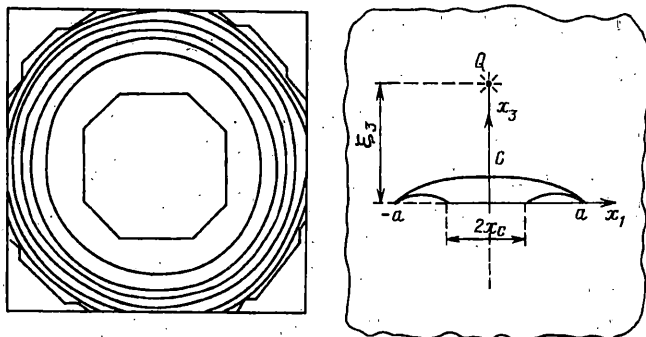
$$w'_0(x_1, x_2) = c \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

где $c' = c/a = 0.2$, при наличии теплового источника, находящегося на оси x_3 на расстоянии $\xi'_3 = \xi_3 / a = 1, 2$ (смещения поверхностей трещины приведены в нормированном виде $u' = \pi\lambda(1 - 2\nu)/(2(1 - \nu^2)\alpha W)$). Закрытие трещины начинается при $\xi'_3 = 1, 80$. Контактная зона увеличивается с дальнейшим уменьшением ξ'_3 и трещина полностью закрыта при $\xi'_3 = 0, 51$. Проведены расчеты для круговой трещины с раскрытием в форме (3.1) при $c' = 0, 5$. Касание поверхностей трещины наблюдается при $\xi'_3 = 1, 25$ и трещина полностью закрыта при $\xi'_3 = 0, 38$.

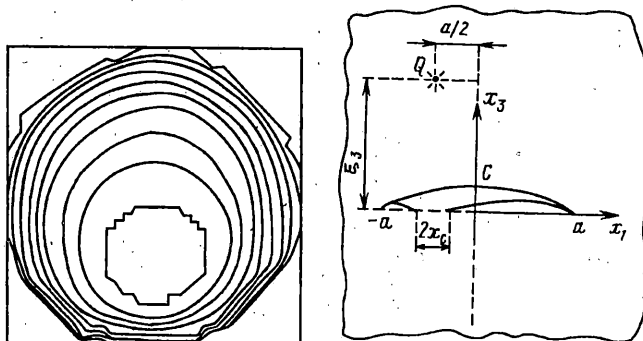
Далее получены решения различных задач для трещин вблизи источников, не имеющих аналитических решений. На фиг. 3 представлен график уровней смещений и области налегания (линия, ограничивающая нулевой уровень суммарного смещения $u = w_0 + w$) для круговой трещины вертикального раскрытия (3.1), но когда источник расположен не на оси симметрии x_3 , а в точках $(a/2, 0, \xi_3)$ (в данном расчете $c' = 0, 2$; $\xi'_3 = 1, 2$).

На фиг. 4 приведены результаты расчетов для задачи о трещине квадратной формы в плане (со сторонами равными $2a$) и постоянным вертикальным раскрытием c ($c' = 0, 1$) и с тепловым источником на оси симметрии x_3 на расстоянии $\xi'_3 = 1, 2$. Область налегания отслеживает начальный контур трещины. На фиг. 5 представлены изолинии смещений поверхностей этой же трещины, но при источнике тепла, расположенном не на оси симметрии, а в точке $(0, a/2, \xi_3)$, $\xi'_3 = 1$. Область налегания при этом, как видно из графика, несимметрична.

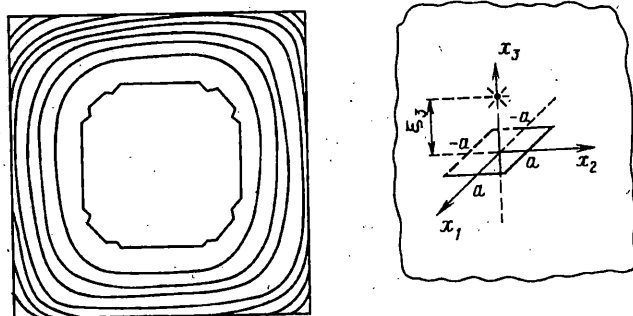
Представляет интерес выяснение вопросов, как связаны локализация мест налега-



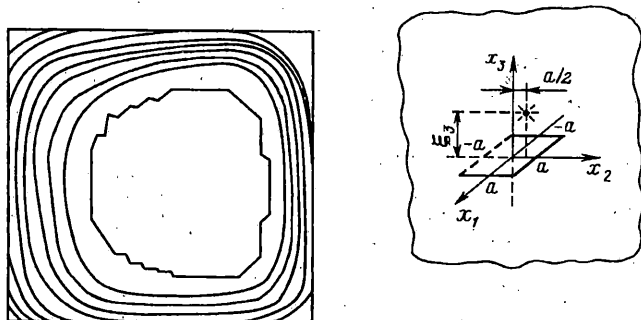
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ния с формой начального вертикального раскрытия трещины и местоположением источников, как закрываются эллиптические в плане трещины в зависимости от локализации источников вдоль большей или меньшей оси, как взаимосвязаны расстояние до источников при начале касания поверхностей и размеры трещины (как горизонтальные, так и вертикальные). Все эти вопросы требуют дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балужева А.В., Гольдштейн Р.В., Зазовский А.Ф. Метод расчета смещений поверхностей тонких пространственных полостей // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1984. № 6. С. 3–9.
2. Matczyński M., Sokółowski M. Crack opening and closure under the action of mechanical and thermal loads // Theor. Appl. Fracture Mech., 1989. V. 11. No 3. P. 187–198.
3. Gross D., Wagner Ch. The interaction of a straight crack with a center of dilatation // Arch. Appl. Mech. 1992. V. 62. P. 134–145.
4. Gross D., Neimer St. Crack closure and crack path prediction for curved cracks under thermal load // Eng. Fract. Mech. 1993. V. 46. No 4. P. 633–640.
5. Olesiak Z.S. Influence of thermo-diffusion on the extent of plastic zone around a disc-shaped crack // J. Tech. Phys. 1988. V. 29. No 1. P. 105–111.
6. Гольдштейн Р.В., Спектор А.А. Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 82–94.
7. Балужева А.В., Зазовский А.Ф. Упругогидродинамическая задача о притоке жидкости к трещине в пористой среде // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 5. С. 157–166.
8. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 487 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.IV.1995