МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 4 • 1996

УДК 534.1

© 1996 г. **Ф.М. ДЕТИНКО**

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЯКОБИ К АНАЛИЗУ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Для анализа вынужденных периодических колебаний нелинейной консервативной системы вынуждающая сила представлена эллиптической функцией Якоби. При этом уравнение колебаний с квадратичной или кубичной нелинейностью допускает точное периодическое решение. Предельный переход к малому модулю эллиптической функции легко приводит к случаю гармонического возбуждения. При получении таким способом амплитудно-частотных характеристик не требуется допущение о близости системы к резонансу.

1. Кубичная нелинейность. Рассматриваются периодические колебания в системе, описываемой уравнением

$$d^2y/dt^2+\omega_0^2y+\gamma y^3=A\,\mathrm{cn}(\alpha t,\ k) \tag{1.1}$$

где зависимость вынуждающей силы от времени представлена эллиптическим косинусом с модулем k.

Уравнение (1.1) допускает точное решение с периодом, равным периоду возбуждения. Так как $\mathrm{cn}\,(\alpha t,\,0)=\cos\,(\alpha t)$ то, сделав в этом точном решении предельный переход $k\to 0$, найдем амплитуду основной гармоники периодического решения для случая гармонического возбуждения. Как показано ниже, при таком выводе амплитудно-частотной характеристики не требуется допущение о близости системы к резонансу, чем доказывается более широкая применимость этой характеристики. Кроме того, точное решение может быть использовано для оценки погрешности приближенных аналитических и численных методов.

Итак, отыскивая частное решение уравнения (1.1) в форме

$$y=B\,\mathrm{cn}\,(\alpha t,\,k) \tag{1.2}$$

подставим это выражение в (1.1). Получим

$$B\alpha^2\,\mathrm{cn}(\alpha t)[2k^2-1-2k^2\,\mathrm{cn}^2(\alpha t)]+B\omega_0^2\,\mathrm{cn}(\alpha t)+B^3\gamma\,\mathrm{cn}^3(\alpha t)-A\,\mathrm{cn}(\alpha t)=0$$

Приравнивание нулю коэффициентов при $\mathrm{cn}\,(\alpha t)$ и $\mathrm{cn}^3(\alpha t)$ дает

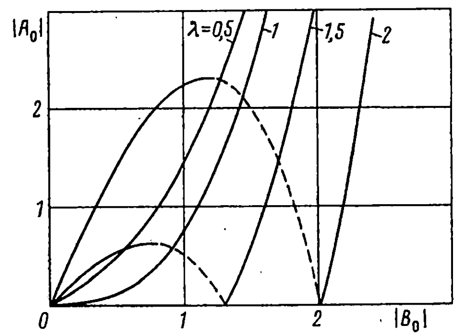
$$B[(2k^2-1)\alpha^2+\omega_0^2]-A=0,\ \ \gamma B^2-2(k\alpha)^2=0 \tag{1.3}$$

Период T и частота ω вынуждающей силы и решения (1.2) выражаются через полный эллиптический интеграл первого рода $K\,(k)$ формулой

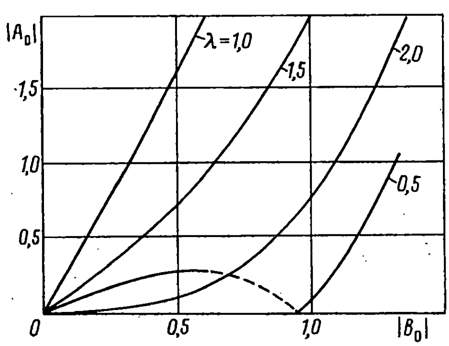
$$T=4K\,(k)/\alpha=2\pi/\omega \tag{1.4}$$

При заданном периоде и амплитуде силы из (1.3), (1.4) могут быть найдены параметры α, k и амплитуда колебаний B. Введя обозначения $\beta=\alpha/\omega$, $\lambda=\omega/\omega_0$, $B_0=B/\omega_0$, $A_0=$ $=A/\omega_0^3$, запишем (1.3)–(1.4) в виде

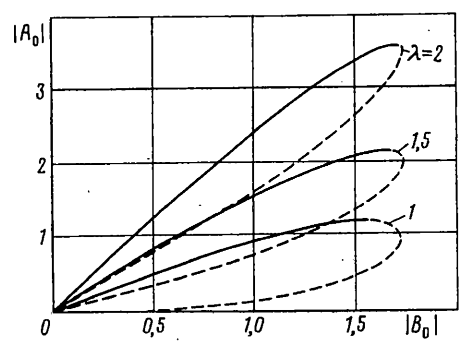
$$\beta=2K(k)/\pi,\ \ \gamma B_0^2=2(k\beta\lambda)^2,\ \ A_0=B_0[1+(2k^2-1)(\beta\lambda)^2] \tag{1.5}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Как видно из второго равенства, при вещественном k необходимо, чтобы коэффициент нелинейности γ был положительным (система с жесткой характеристикой; при мягкой характеристике решение дается ниже). Для этого случая без ограничения общности можно принять $\gamma = 1$. Задавшись величиной k, из уравнений (1.5) последовательно вычислим β, B_0 и A_0. Некоторые результаты представлены на фиг. 1, из которой видно, что при $\lambda \leqslant 1$ амплитуда колебаний определяется однозначно. При $\lambda > 1$ и амплитуде силы, не превышающей некоторого значения, существуют три периодических решения. При этом точки пересечения кривых с осью $A_0 = 0$ определяют зависимость частоты свободных колебаний от их амплитуды. Частота свободных колебаний при жесткой характеристике выше, чем у линейной системы. При $k = 0$ имеем $\beta = 1$, cn $(\alpha t, 0) = \cos(\alpha t)$. Следовательно, при малых k решение (1.2) должно совпадать с известным решением для малой нелинейности и гармонического возбуждения. Действительно, при малых k из (1.5) находим

$$\beta = 1 + k^2/4,\ \ 2k^2\lambda^2 = B_0^2,\ \ (1-2k^2)\beta^2 = 1 - {}^3\!/\!_2 k^2 = 1 - {}^3\!/\!_4 B_0^2/\lambda^2$$

и из последнего уравнения (1.5):

$$A_0 = (1-\lambda^2)B_0 + {}^3\!/\!_4 B_0^3 \tag{1.6}$$

Это – хорошо известное соотношение между амплитудами возбуждения и периодических колебаний [1]. При его выводе методом малого параметра существенным является допущение о близости частоты возбуждения к собственной частоте линейной системы. Как видно из приведенного вывода, это допущение не является необходимым и соотношение (1.6) справедливо даже вдали от резонанса. Например, при

$\lambda = 2$ сравнение приближенного решения (1.6) с точным (1.5) для A_0 дано в следующей таблице:

k	B_0	(1.5)	(1.6)
0,1	0,2836	–0,8336	–0,8337
0,3	0,8686	–2,117	–2,114
0,5	1,518	–1,978	–1,930
0,7	2,326	2,069	2,460

Результаты хорошо совпадают даже при $k = 0{,}5$.

Для системы с мягкой характеристикой ($\gamma = -1$) вынуждающую силу и решение удобнее представить эллиптическим синусом. Вместо (1.5) получим

$$\beta = 2K(k)/\pi,\ \ B_0^2 = 2(k\beta\lambda)^2,\ \ A_0 = B_0[1-(k^2+1)(\beta\lambda)^2]$$

Некоторые численные результаты показаны на фиг. 2. При $k \to 0$ отсюда снова получим равенство (1.6), но со знаком минус перед нелинейным членом, как и должно быть.

Пользуясь известным [2] разложением эллиптического косинуса в тригонометрический ряд

$$\mathrm{cn}(\alpha t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \cos(2n-1)\omega t$$

отметим весьма низкое содержание в нем высших гармоник. Значения коэффициентов Q_n даны ниже

n	$k = 0{,}5$	$k = 0{,}7$	$k = 0{,}8$
1	0,9817	0,9563	0,9327
2	0,018	0,0418	0,0630
3	0,003	0,0018	0,0040

2. Квадратичная нелинейность. Для квадратичной нелинейности вынуждающую силу представим функцией $f(t) = A[2\,\mathrm{cn}^2(\alpha t/2) - 1]$. Так как

$$\mathrm{cn}^2\left(\frac{\alpha t}{2}\right) = \frac{\mathrm{cn}(\alpha t) + \mathrm{dn}(\alpha t)}{1 + \mathrm{dn}(\alpha t)}$$

то период этой вынуждающей силы тот же, что и выше. Когда $k = 0$, $\mathrm{dn}\,(\alpha t) = 1$, $\mathrm{cn}\,(\alpha t) = \cos\,(\omega t)$, и вынуждающая сила сводится к $A\cos\,(\omega t)$. Уравнение

$$d^2y/dt^2 + \omega_0^2 y + y^2 = A[2\,\mathrm{cn}^2(\alpha t/2) - 1] \tag{2.1}$$

допускает периодическое решение в форме

$$y = B\mathrm{cn}^2(\alpha t/2, k) + b$$

Подставляя это выражение в (2.1) и приравнивая нулю коэффициенты перед $\mathrm{cn}^m(\alpha t/2)$ ($m = 0, 2, 4$), приходим к равенствам

$$B_0 = \frac{3\delta}{2},\ \ B_0\left[1 + 2b_0 - \frac{1-2k^2}{k^2}\delta\right] = 2A_0,\ \ \frac{1-k^2}{2k^2}\delta B_0 + b_0(b_0+1) = -A_0 \tag{2.2}$$

$$\delta = (\beta k\lambda)^2,\ \ B_0 = B/\omega_0^2,\ \ b_0 = b/\omega_0^2,\ \ A_0 = A/\omega_0^4$$

Исключая из (2.2) A_0, B_0, получим квадратное уравнение для b_0:

$$b_0^2+(1+{}^3\!/_2\,\delta)b_0+{}^3\!/_4\,\delta(1+\delta)=0$$

имеющее вещественные корни при условии $\delta^2 \leqslant 4/3$. Вычисленные амплитуды колебаний показаны на фиг. 3.

Предельным переходом $k \to 0$ найдем две ветви зависимости амплитуды колебаний от амплитуды силы

$$A_0=\frac{1-\lambda^2}{2}B_0-\frac{4+\lambda^2}{48\lambda^2}B_0^3,\quad A_0=-\frac{1+\lambda^2}{2}B_0+\frac{4\lambda^2-1}{48\lambda^2}B_0^3 \tag{2.3}$$

Резонансные колебания этой системы при $\lambda = 1$ исследовались в [1] методом малого параметра. Этот метод позволил найти только первую ветвь в (2.3).

3. Об устойчивости решений. Запишем уравнение в вариациях для системы (1.1)–(1.2):

$$d^2z/dt^2+(\omega_0^2+3\gamma y^2)z=0 \tag{3.1}$$

Подставляя $\gamma=1$, $y^2=B^2\,\mathrm{cn}^2(\alpha t)=\omega_0^2B_0^2[1-\mathrm{sn}^2(\alpha t)]$, $B_0^2=2k^2\beta^2\chi^2$ и вводя безразмерное время $\tau=\alpha t$, придадим (3.1) вид

$$d^2z/d\tau^2+[(\beta\lambda)^{-2}+6k^2-6k^2\,\mathrm{sn}^2\,\tau]z=0$$

Сравнивая с уравнением Ляме [3]:

$$d^2z/d\tau^2+[h-n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2\,\tau]z=0$$

видим, что в нашем случае $n = 2$, $h = (\beta\lambda)^{-2} + 6k^2$. Аналогично можно показать, что при $\gamma = -1$, $n = 2$, $h = (\beta\lambda)^{-2}$, а для уравнения (2.1) $n = 3$, $h = 4(\beta\lambda)^{-2}(1+2b_0) + 12k^2$.

Таким образом, во всех трех случаях границы областей устойчивости колебаний совпадают с условиями существования решений уравнения Ляме, имеющих периоды T и $2T$. Последние существуют при некоторых характерных значениях параметра h, вычисленных, например, в [3]. Пользуясь этими результатами, можно убедиться, что при кубичной нелинейности неустойчивы нисходящие ветви кривых (штриховые на фиг. 1, 2). При квадратичной нелинейности неустойчива та из двух ветвей, на которой амплитуда вынужденных колебаний больше (штриховые кривые на фиг. 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 243 с.
2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
3. *Ince E.L.* The periodic Lame functions // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1940. V. 60. № 1. P. 47–63.

Орландо, США

Поступила в редакцию
22.II.1995