

УДК 539.374

© 1996 г. Л.Ф. ФОМИН

МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВДОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧАХ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Из теории уравнений в частных производных первого порядка от одной неизвестной функции в двумерном случае известно [1], что их решение может быть продолжено вдоль характеристик на любую односвязную область, прилегающую к границе, не включающую точек пересечения характеристик и полностью покрываемую проекциями характеристик. Этот факт используется в предлагаемой работе для решения задач сжатия между сближающимися жесткими поверхностями тонкого пластического слоя с постоянной в каждый фиксированный момент времени или зависящей от одной координаты текущей толщиной при одновременном действии одноосных растяжений на противоположных сторонах прямоугольного контура.

1. Введение. Задача Л. Прандтля о сжатии пластической массы между шероховатыми плитами исследовалась А.А. Ильюшиным в работах [2, 3]. При этом за счет введения некоторых упрощающих предположений и гипотез была разработана общая математическая постановка задачи течения тонкого слоя пластического вещества между сближающимися жесткими поверхностями при условии отсутствия нагрузок на контуре.

Считая плоскость x, y за основную поверхность, принятые в теории течения гипотезы заключаются в следующем. Во-первых, принимается кинематическая гипотеза, согласно которой скорости течения частиц, расположенных в элементарном нормальном столбике, высота которого равна текущей толщине слоя h считаются мало отличающимися между собой и заменяются средней по толщине слоя скоростью с компонентами u, v вдоль x, y . Считается, кроме того, что давления p_1, p_2 на слой со стороны сближающихся поверхностей равны между собой $p_1 = p_2 = p(x, y)$.

Во-вторых, принимается "гипотеза полной пластичности", заключающаяся в том, что средние по толщине слоя нормальные напряжения σ_{11}, σ_{22} в поперечных сечениях вдоль линий x, y считаются равными $\sigma_{11} = \sigma_{22} = -q$; внутренними касательными напряжениями в слое на площадках $x = \text{const}, y = \text{const}$ вдоль этих же линий пренебрегаем $\sigma_{12} = 0$, а третье нормальное напряжение в направлении нормали к плоскости x, y , являющееся главным напряжением σ_3 , считается постоянным по толщине слоя, равным по модулю контактному давлению $p(x, y)$ и определяется из условия пластичности $-\sigma_3 = p(x, y) = q + \sigma_s$, где σ_s – предел текучести материала на растяжение. Напряженное состояние, таким образом, определяется схемой "растяжение – сжатие" без сдвига.

Касательные напряжения контактного трения τ_1, τ_2 , действующие на слой пластического вещества со стороны контактных поверхностей предполагаются одинаковыми в соответствующих точках очага деформации $\tau_1 = \tau_2 = \tau(p)$. При этом учитываются две зоны контактного трения: зона кулонова трения, где силы трения меньше предела

текучести материала на сдвиг τ_s и определяются законом Амонтона–Кулона $\tau = \mu p$ (μ – коэффициент трения скольжения) и зона прандтлева трения, где силы трения равны пределу текучести на сдвиг τ_s и определяются законом Прандтля $\tau = \tau_s = \sigma_s / \sqrt{3}$.

С учетом всех вышеперечисленных гипотез, пренебрегая действием массовых и инерционных сил, уравнения равновесия элемента деформируемого слоя в проекциях на оси x, y представляются в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2\tau(p)}{h(x, y, t)} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{2\tau(p)}{h(x, y, t)} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

Условие совместности (интегрируемости) для системы (1.1) получается из равенства $\partial^2 p / \partial x \partial y = \partial^2 p / \partial y \partial x$ и записывается в виде

$$uv \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v^2 \frac{\partial u}{\partial y} - u^2 \frac{\partial v}{\partial x} = \pm \frac{u^2 + v^2}{h(x, y, t)} \left(u \frac{\partial h}{\partial y} - v \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

Возводя в квадрат левые и правые части (1.1) и складывая полученные результаты, находим уравнение для определения контактных давлений $p(x, y)$ в каждый фиксированный момент времени t :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 = \left[\frac{2\tau(p)}{h} \right]^2 \quad (1.3)$$

Для определения компонент u, v скорости течения частиц слоя используем условие несжимаемости

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial(vh)}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

и уравнение в форме

$$v \partial p / \partial x = u \partial p / \partial y \quad (1.5)$$

Введем вспомогательную функцию Z , называемую "обобщенным давлением"

$$Z = \int_{\sigma_s}^p \frac{dp}{2\tau(p)} \quad (1.6)$$

Поскольку $\tau(p)$, согласно предположениям, непрерывна, то и Z является непрерывной функцией, имеющей непрерывную производную.

Теперь уравнение (1.3) принимает вид

$$(\partial Z / \partial x)^2 + (\partial Z / \partial y)^2 = \frac{1}{h^2} \quad (1.7)$$

После нахождения обобщенного давления Z из (1.7), истинные контактные давления $p(x, y)$ согласно (1.6), определяются в зонах трения по закону Кулона формулой

$$p_+ = \sigma_s \exp(2\mu Z), \quad p \leq \tau_s / \mu \quad (1.8)$$

а в зонах трения по закону Прандтля формулой

$$p_- = \frac{\tau_s}{\mu} [1 + \ln(\sqrt{3}\mu) + 2\mu Z], \quad p > \frac{\tau_s}{\mu} \quad (1.9)$$

Существование и единственность непрерывного решения задачи Коши для уравнения (1.7) обоснованы в теории течения при непрерывных нулевых граничных условиях для обобщенного давления Z . Исходя из этого, во избежание разрывности граничных условий, теория течения применялась до настоящего времени при исследовании задач обработки металлов давлением в предположении отсутствия дополнительных усилий на отдельных участках граничного контура. В частности, были исследованы процессы свободного прессования и осаживания тонких пластин и тонкого клина, а также прокатка тонкого листа без натяжений.

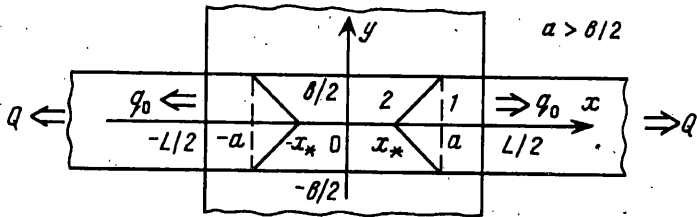
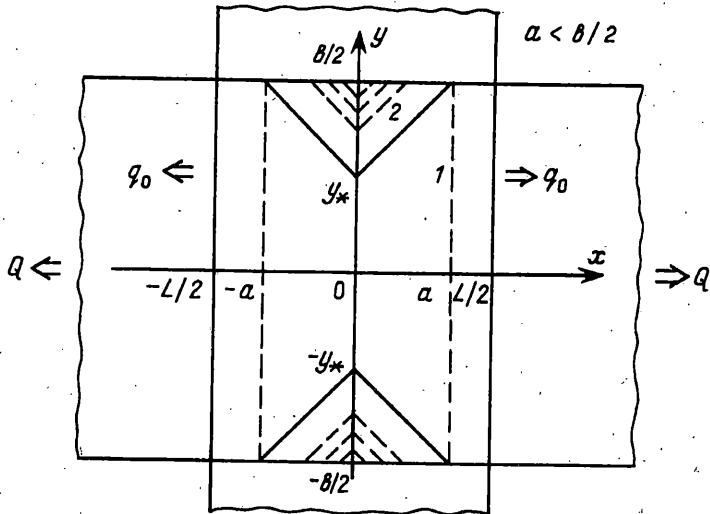
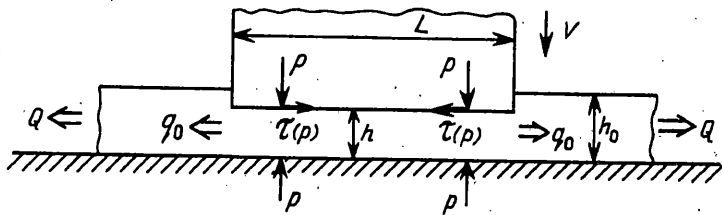
Учитывая роль продольных натяжений в таком важном промышленном процессе как непрерывная прокатка тонких полос на современных станах, настоящая работа посвящена разработке метода, который позволил бы в рамках теории течения тонкого пластического слоя по поверхностям исследовать процессы обработки металлов давлением с разрывными граничными условиями, когда на отдельных участках контура действуют дополнительные продольные растягивающие усилия. Предлагаемый метод основывается на известном из теории дифференциальных уравнений [1] факте, согласно которому решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка от одной неизвестной функции двух независимых переменных может быть продолжено вдоль характеристик на любую односвязную область, прилегающую к граничному контуру, все точки которой полностью покрываются характеристиками и которая не содержит точек пересечения характеристик. Этот замечательный факт используется в данной работе для исследования некоторых задач обработки металлов давлением с учетом дополнительных продольных растягивающих усилий, действующих на противоположных сторонах прямоугольного контура в случаях, когда текущая толщина слоя либо постоянна, либо зависит от одной координаты.

2. Течение в слое постоянной толщины. Рассмотрим тонкую прямоугольную пластину несжимаемого, изотропного, идеально жесткопластического материала постоянной начальной толщины h_0 , длины l и ширины b , покоящуюся на горизонтальном жестком основании. Пластина прессуется плоским жестким штампом ширины L , опускающимся вниз с постоянной скоростью V . Момент касания штампом пластины принимается за начальный. Текущая толщина слоя определяется выражением $h = h_0 - Vt$ и в каждый фиксированный момент времени t считается постоянной. Координаты x, y вводятся в плоскости основания по осям симметрии процесса (фиг. 1). Очаг пластической деформации занимает область $D: -L/2 \leq x \leq L/2; -b/2 \leq y \leq b/2$.

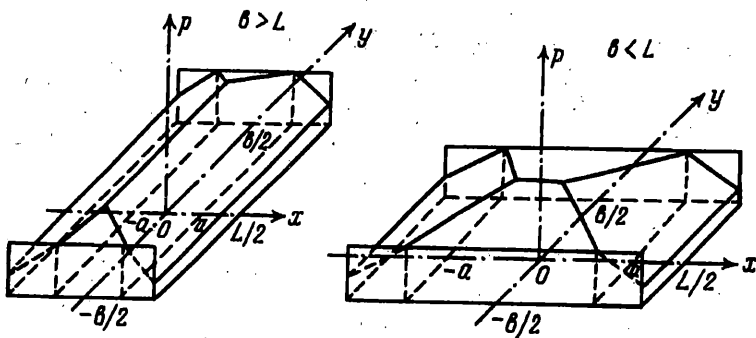
К концам пластины $x = \pm l/2$ прикладываются равные и противоположно направленные продольные силы Q , создающие на границах $x = \pm l/2$ очага деформации распределенные удельные натяжения q_0 , предполагаемые малыми (во всяком случае, не превышающими по модулю половины предела текучести материала на растяжение: $-\sigma_S/2 \leq q_0 \leq 0$). На сторонах пластины $y = \pm b/2$ нагрузка отсутствует $q_0 = 0$.

Для получения качественной картины решения задачи обратимся, прежде всего, к аналогии между формой эпюры давления и формой насыпи, получаемой при насыпании сухого песка в прямоугольные коробочки размера $b \times L$ с бортиками, высота которых пропорциональна величинам $p = \sigma_S$ и $p = q_0 + \sigma_S$ [3]. Результаты опытов для коробочек размеров $b > L$ и $b < L$ представлены на фиг. 2. Проведенные эксперименты показывают, что внутри прямоугольного очага деформации D существует прямоугольная область D_0 , на границах которой (при $x = \pm a, y = \pm b/2$) будем иметь непрерывные граничные условия $Z = 0, p = \sigma_S$. Поскольку процесс имеет две оси симметрии $x = 0, y = 0$, достаточно рассматривать решение для первого квадранта при $x \geq 0, y \geq 0$.

Используя результаты работы [4], в которой методом характеристик подробно исследован процесс свободной осадки прямоугольных поковок, для обобщенного давле-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния Z в области гладкости 1, прилегающей к линии $x = a$ и в области гладкости 2, прилегающей к боковой стороне $y = b/2$ получаем следующие значения

$$Z^{(1)} = \frac{a-x}{h_0 - Vt}, \quad Z^{(2)} = \frac{b/2 - y}{h_0 - Vt}$$

Истинные контактные давления $p_+^{(1)}, p_+^{(2)}$ в зонах трения по закону Кулона и давления $p_-^{(1)}, p_-^{(2)}$ в зонах трения по закону Прандтля, согласно (1.8), (1.9) запишутся в виде

$$p_+^{(1)} = \sigma_s \exp \left[\frac{2\mu}{h_0 - Vt} (a-x) \right]$$

$$p_+^{(2)} = \sigma_s \exp \left[\frac{2\mu}{h_0 - Vt} \left(\frac{b}{2} - y \right) \right] \quad (2.1)$$

$$p_-^{(1)} = \frac{\tau_s}{\mu} \left[1 + \ln \sqrt{3\mu} + \frac{2\mu}{h_0 - Vt} (a-x) \right]$$

$$p_-^{(2)} = \frac{\tau_s}{\mu} \left[1 + \ln \sqrt{3\mu} + \frac{2\mu}{h_0 - Vt} \left(\frac{b}{2} - y \right) \right]$$

Граница областей 1 и 2 определяется из уравнения $p^{(1)} = p^{(2)}$ и представляет собой прямую

$$y = x + b/2 - a \quad (2.2)$$

Граница между зонами трения по закону Кулона, прилегающих к линиям $x = a$, $y = b/2$ и зонами трения по закону Прандтля, занимающих внутреннюю часть очага деформации, определяется из условия $p = \tau_s/\mu$ и в области 1 представляет собой прямую

$$x = a + (h/2\mu) \ln(\sqrt{3\mu})$$

а в области 2 – прямую

$$y = b/2 + (h/2\mu) \ln(\sqrt{3\mu})$$

Решения $p_+^{(2)}, p_-^{(2)}$ из (2.1) для области 2 являются окончательными, однако для области 1 полученные решения необходимо продолжить вблизи линии $x = a$ вдоль характеристик на всю область D до границы $x = L/2$, не являющейся характеристикой [1, 4]. Учитывая, что окрестность вблизи линии $x = a$ является зоной кулонова трения и продолжая полученное решение $p_+^{(1)}$ до линии $x = L/2$, на которой $p = q_0 + \sigma_s$, получим

$$q_0 + \sigma_s = \sigma_s \exp \left[\frac{2\mu}{h_0 - Vt} \left(a - \frac{L}{2} \right) \right]$$

Отсюда находим значение величины

$$a = \frac{L}{2} + \frac{h_0 - Vt}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right) \quad (2.3)$$

Под областью 1 в дальнейшем будем подразумевать расширенную область, включающую прежнюю область 1 и окрестность линии $x = a$ до границы $x = L/2$, на которую продолжено полученное решение. Окончательно, с учетом (2.3), в расширенной области 1, в том числе на отрезке $a \leq x \leq L/2$ боковой стороны

пластины $y = b/2$ искомые контактные давления $p_+^{(1)}, p_-^{(1)}$ имеют следующие значения:

$$p_+^{(1)} = (q_0 + \sigma_s) \exp \left[\frac{2\mu}{h_0 - Vt} \left(\frac{L}{2} - x \right) \right] \quad (2.4)$$

$$p_-^{(1)} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3\mu}} \left\{ 1 + \ln \left[\sqrt{3\mu} \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right) \right] + \frac{2\mu}{h_0 - Vt} \left(\frac{L}{2} - x \right) \right\}$$

Согласно (2.2), (2.3), в зависимости от соотношения между величинами a и $b/2$ возможны различные случаи расположения областей гладкости в очаге деформации. Прямая (2.2), проходя от точки $(a, b/2)$ под углом 45° к осям координат, при $a < b/2$ пересекает ось Oy в точке

$$y = y_* = \frac{b - L}{2} + \frac{h_0 - Vt}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right)$$

при $a = b/2$ проходит через начало координат, а при $a > b/2$ пересекает ось Ox в точке

$$x = x_* = \frac{L - b}{2} + \frac{h_0 - Vt}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right)$$

С учетом (2.1), (2.4), из (1.5) получаем, что в области 1 всюду $v^{(1)} = 0$, а в области 2 всюду $u^{(2)} = 0$. Следовательно, линиями ветвления решения уравнения (1.4), на которых должны выполняться нулевые граничные условия для компонент u, v скорости течения частиц деформируемого материала, являются, таким образом, прямая (2.2) и отрезок $|y| \leq y_*$ оси Oy в случае $a < b/2$ или прямая (2.2) и отрезок $|x| \leq x_*$ оси Ox в случае $a > b/2$.

Решение уравнения (1.4) в областях 1 и 2 теперь представится в виде следующих формул:

$$u^{(1)} = Vx / (h_0 - Vt), \quad 0 \leq x \leq L/2, \quad 0 \leq y \leq y_* \quad (a < b/2)$$

$$u^{(1)} = \frac{V}{h_0 - Vt} \left[x - y + \frac{b - L}{2} + \frac{h_0 - Vt}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right) \right]$$

$$y - y_* \leq x \leq L/2, \quad y_* \leq y \leq b/2 \quad (a < b/2)$$

$$0 \leq y \leq b/2 \quad (a > b/2)$$

(2.5)

$$v^{(2)} = \frac{Vy}{h_0 - Vt}, \quad 0 \leq x \leq x_*, \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{2} \quad \left(a > \frac{b}{2} \right)$$

$$v^{(2)} = \frac{V}{h_0 - Vt} \left[y - x + \frac{L - b}{2} - \frac{h_0 - Vt}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right) \right]$$

$$x + y_* \leq y \leq b/2, \quad 0 \leq x \leq a \quad (a < b/2)$$

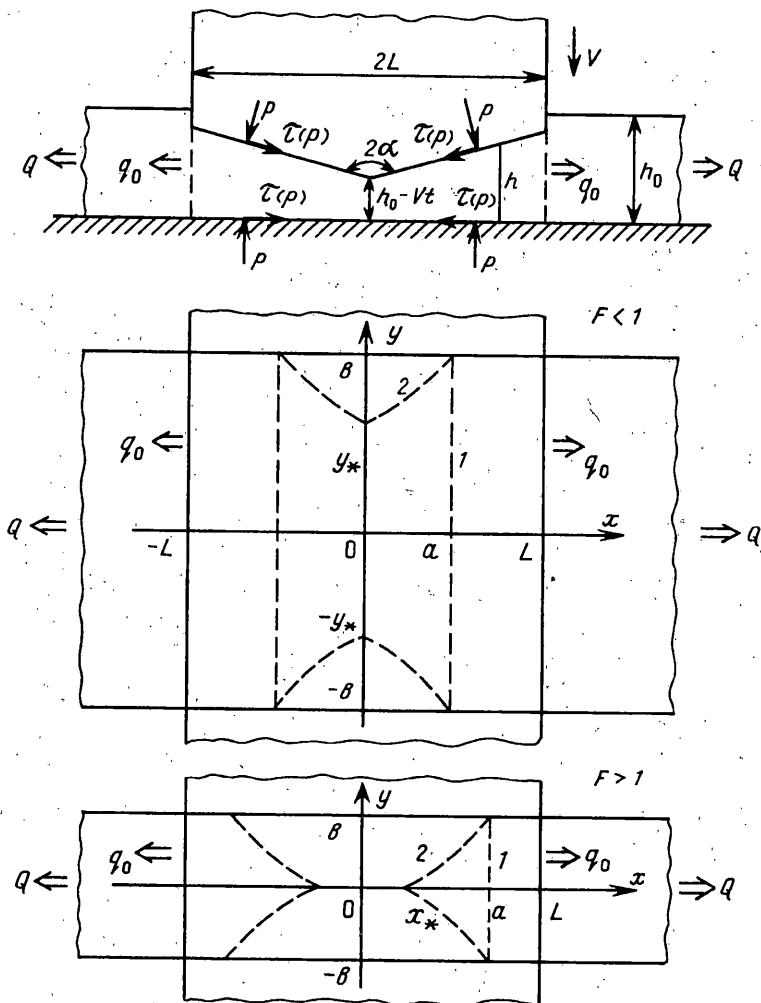
$$x_* \leq x \leq a \quad (a > b/2)$$

Согласно (2.5), для каждого фиксированного момента времени скорость u_+ частиц слоя на линии $x = L/2$ имеет значение

$$u_+ = VL / [2(h_0 - Vt)], \quad 0 \leq y \leq y_*, \quad (a < b/2)$$

$$u_+ = \frac{V}{h_0 - Vt} \left[\frac{b}{2} + \frac{h_0 - Vt}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right) - y \right]$$

$$y_* \leq y \leq b/2 \quad (a < b/2); \quad 0 \leq y \leq b/2 \quad (a > b/2)$$



Фиг. 3

При этом отрезок $a \leq x \leq L/2$ боковой стороны пластины $y = b/2$ будет линией тока, а на участке $0 \leq x \leq a$ частицы вещества перетекают через линию $y = b/2$ со скоростями v_+ , определяемыми выражениями

$$v_+ = Vb / [2(h_0 - Vt)], \quad 0 \leq x \leq x_* \quad (a > b/2)$$

$$v_+ = \frac{V}{h_0 - Vt} \left[\frac{L}{2} + \frac{h_0 - Vt}{2\mu} \ln \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right) - x \right]$$

$$x_* \leq x \leq a \quad (a > b/2); \quad 0 \leq x \leq a \quad (a < b/2)$$

Соотношения (2.5) в каждой отдельной области гладкости 1 или 2 удовлетворяют условиям совместности (1.2) и, следовательно, уравнения рассматриваемой задачи можно считать полностью проинтегрированными.

3. Сжатие клином тонкой прямоугольной заготовки. Как и прежде, рассматриваем тонкую прямоугольную пластину пластического вещества начальной толщины h_0 , ширины $2b$ и длины $2l$, находящуюся на горизонтальном жестком основании и растя-

гиваемую в двух противоположных направлениях по оси x двумя равными силами Q (фиг. 3). Считаем, что пластина сжимается опускающимся вниз со скоростью V жестким штампом ширины $2L$, но имеющим клиновидный профиль с углом раствора 2α . Процесс исследуем с момента $t \geq t_0 = L \operatorname{ctg} \alpha / V$, начиная с которого очаг пластической деформации занимает область D : $-L \leq x \leq L$, $-b \leq y \leq b$. На линиях $x = \pm L$ продольные силы Q создают удельные натяжения q_0 . На боковой стороне $y = \pm b$ пластины нагрузка отсутствует $q_0 = 0$.

В силу симметрии, рассматриваем одну четвертую часть очага деформации для $x \geq 0$, $y \geq 0$, на которой текущая толщина слоя является функцией координаты x и имеет вид

$$h = h_0 - Vt + x \operatorname{ctg} \alpha = (x + \lambda) \operatorname{ctg} \alpha, \quad \lambda = (h_0 - Vt) \operatorname{tg} \alpha$$

Применяя для решения указанной задачи разработанный в п. 2 метод, проводим внутри области D вспомогательную прямую $x = a$, выделяя из области D подобласть D_0 , на границах которой (при $x = a$, $y = b$) будем иметь $Z = 0$, $p = \sigma_s$. Используя для решения уравнения (1.7) результаты работы [4], получаем значения обобщенного давления Z в области гладкости 1, прилегающей к линии $x = a$ и в области гладкости 2, примыкающей к боковой стороне $y = b$. После этого, истинные контактные давления p_+ в зонах кулонова трения и давления p_- в зонах трения по закону Прандтля находим по формулам (1.8), (1.9). Продолжая затем полученные решения $p_+^{(1)}$ вблизи линии $x = a$ вдоль найденных характеристик на область D до границы $x = L$, на которой $p = q_0 + \sigma_s$, получаем окончательно следующие значения величины a и контактных давлений $p_+^{(1)}$, $p_-^{(2)}$, $p_+^{(2)}$, $p_-^{(1)}$ во всей области течения D :

$$a = (L + \lambda) \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right)^{1/\delta} - \lambda, \quad \delta = 2\mu \operatorname{tg} \alpha$$

$$p_+^{(1)} = \sigma_s \exp \left(\delta \ln \frac{a + \lambda}{x + \lambda} \right) = (q_0 + \sigma_s) \left(\frac{L + \lambda}{x + \lambda} \right)^\delta$$

$$p_-^{(1)} = \frac{\tau_s}{\mu} \left(1 + \ln \sqrt{3}\mu + \delta \ln \frac{a + \lambda}{x + \lambda} \right) = \frac{\tau_s}{\mu} \left\{ 1 + \ln \left[\sqrt{3}\mu \left(1 + \frac{q_0}{\sigma_s} \right) \right] + \delta \ln \frac{L + \lambda}{x + \lambda} \right\} \quad (3.1)$$

$$p_+^{(2)} = \sigma_s \left[\frac{b - y}{x + \lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{b - y}{x + \lambda} \right)^2} \right]^\delta$$

$$p_-^{(2)} = \frac{\tau_s}{\mu} \left\{ 1 + \ln \sqrt{3}\mu + \delta \ln \left[\frac{b - y}{x + \lambda} + \sqrt{1 + \left(\frac{b - y}{x + \lambda} \right)^2} \right] \right\}$$

Если в области течения на контактных поверхностях имеется только трение по закону Кулона с неравными в общем случае коэффициентами трения μ_1 и μ_2 , то давления в областях 1 и 2 выражаются в виде формул для $p_+^{(1)}$, $p_+^{(2)}$ из (3.1), в которых $\delta = (\mu_1 + \mu_2) \operatorname{tg} \alpha$.

Граница между зонами трения по закону Кулона и закону Прандтля определяется из условия $p = \tau_s / \mu$ и в области 1 проходит по прямой, параллельной оси y :

$$x = (L + \lambda) \left[\sqrt{3}\mu (1 + q_0 / \sigma_s) \right]^{1/\delta} - \lambda$$

а в области 2 по наклонной прямой

$$y = b + \frac{1}{2}(x + \lambda)[(\sqrt{3}\mu)^{1/8} - (\sqrt{3}\mu)^{-1/8}]$$

Граница областей 1 и 2 определяется уравнением $p^{(1)} = p^{(2)}$ и представляет собой параболу

$$2(b - y) = a + \lambda - \frac{(x + \lambda)^2}{a + \lambda} \quad (3.2)$$

Чтобы характеризовать возможные случаи расположения областей гладкости, введем вспомогательный параметр F следующим выражением:

$$F = \frac{\lambda}{2b} \left(\frac{a + \lambda}{\lambda} - \frac{\lambda}{a + \lambda} \right) \quad (3.3)$$

Анализ (3.2), (3.3) показывает, что парабола (3.2) от точки (a, b) на линии $y = b$ проходит при $F < 1$ до точки $y = y_* = b(1 - F)$ на оси $x = 0$, при $F = 1$ парабола (3.2) проходит через начало координат, а при $F > 1$ пересекает ось x в точке

$$x = x_* = (a + \lambda)\sqrt{1 - 2b/(a + \lambda)} - \lambda$$

Компоненты u, v скорости течения частиц деформируемого материала удовлетворяют уравнениям (1.4), (1.5) и нулевым граничным условиям на линиях ветвления решения, т.е. на параболе (3.2) и отрезке $[0, y_*]$ оси $x = 0$ (при $F \leq 1$) или параболе (3.2) и отрезке $[0, x_*]$ оси $y = 0$ (при $F > 1$).

Уравнение (1.5) для области 1 с учетом (3.1) показывает, что $v^{(1)} = 0$. Для $u^{(1)}$ из (1.4) получаем следующие результаты:

$$u^{(1)} = V \operatorname{tg} \alpha [1 - \lambda / (x + \lambda)], \quad 0 \leq y \leq y_* \quad (F < 1)$$

$$u^{(1)} = V \operatorname{tg} \alpha \left[1 - \frac{a + \lambda}{x + \lambda} \sqrt{1 - \frac{2(b - y)}{a + \lambda}} \right] \quad (3.4)$$

$$y_* \leq y \leq b \quad (F < 1); \quad 0 \leq y \leq b \quad (F > 1)$$

В области 2 из (1.5) получаем следующее соотношение между $u^{(2)}$ и $v^{(2)}$:

$$u^{(2)} = \frac{b - y}{x + \lambda} v^{(2)} \quad (3.5)$$

Подставив (3.5) в (1.4), для определения $v^{(2)}$ получаем неоднородное линейное уравнение в частных производных первого порядка

$$(b - y) \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + (x + \lambda) \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = V \operatorname{tg} \alpha \quad (3.6)$$

которому соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{b - y} = \frac{dy}{x + \lambda} = \frac{dv^{(2)}}{V \operatorname{tg} \alpha} \quad (3.7)$$

Два первых интеграла системы (3.7) будут

$$\Psi_1 \equiv (x + \lambda)^2 + (b - y)^2 = C_1^2$$

$$\Psi_2 \equiv \frac{v^{(2)}}{V \operatorname{tg} \alpha} + \arcsin \frac{b-y}{\sqrt{(x+\lambda)^2 + (b-y)^2}} = C_2$$

Теперь решение уравнения (3.6) записывается в виде функции $\Phi(\Psi_1, \Psi_2) = 0$. Определив произвольную функцию Φ из нулевых граничных условий на линиях ветвления решения, для $v^{(2)}$ окончательно получаем следующие выражения

$$v^{(2)} = V \operatorname{tg} \alpha \left[\arcsin \frac{(a+\lambda)^2 - (x+\lambda)^2}{(a+\lambda)^2 + (x+\lambda)^2} - \arcsin \frac{b-y}{\sqrt{(x+\lambda)^2 + (b-y)^2}} \right]$$

$$0 \leq x \leq a \quad (F < 1), \quad x_* \leq x \leq a \quad (F > 1)$$

$$b + \frac{1}{2} [(x+\lambda)^2 / (a+\lambda) - (a+\lambda)] \leq y \leq b \quad (3.8)$$

$$v^{(2)} = V \operatorname{tg} \alpha \left[\arcsin \frac{b}{\sqrt{(x+\lambda)^2 + b^2}} - \arcsin \frac{b-y}{\sqrt{(x+\lambda)^2 + (b-y)^2}} \right]$$

$$0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq x \leq x_* \quad (F > 1)$$

Подставив в (3.4) значение $x = L$, а в (3.8) значение $y = b$, можно, аналогично п. 2, получить теперь величины скоростей u_+ (перетекания частиц через линию $x = L$) и v_+ (перетекания частиц через отрезок $0 \leq x \leq a$ боковой стороны $y = b$). При этом отрезок $a \leq x \leq L$ стороны $y = b$ будет линией тока области 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 279 с.
2. Ильющин А.А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям // ПММ. 1954. Т. 18. Вып. 3. С. 265–288.
3. Ильющин А.А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения // ПММ. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 693–713.
4. Арутюнов Ю.С., Гонор А.Л. Осаживание тонких поковок произвольной формы в плане // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 166–171.

Москва

Поступила в редакцию
9.II.1995