

УДК 539.214;539.374

© 1996 г. И.А. БРИГАДНОВ

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КОРРЕКТНОСТЬ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧНОСТИ**

Рассматриваются вопросы математической корректности и численного решения начально-краевых задач пластичности в форме эволюционного вариационного уравнения – задачи Коши по параметру внешнего нагружения в слабой постановке. Доказывается общая глобальная теорема существования и единственности, опирающаяся на алгебраические свойства определяющего соотношения в скоростях как функции матричного аргумента и соответствующие результаты для задачи Коши в гильбертовом пространстве. На примере классической, эндохронной и дилатансионной инкрементальных моделей пластичности демонстрируется содержательность полученных результатов. Показывается жесткость эндохронного определяющего соотношения.

При помощи пространственной аппроксимации по методу конечных элементов эволюционная вариационная проблема сводится к задаче Коши для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта система неразрешима относительно производной по параметру нагружения. Более того, в некоторых случаях она может оказаться жесткой. Поэтому для численного решения используется неявная аппроксимационная схема Эйлера в сочетании с методом адаптивной блочной релаксации (АБР), нечувствительным к величине обусловленности матрицы жесткости. Предлагается обобщенный вариант метода АБР, пригодный для непотенциальных определяющих соотношений, в частности, для эндохронной и неассоциированной дилатансионной моделей пластичности.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов, показывающие некоторые особенности решения начально-краевых задач пластичности по классической и эндохронной инкрементальным моделям. Для последней зарегистрированы отрицательные собственные числа в глобальной матрице жесткости при сложном циклическом деформировании.

Решение краевых задач пластичности имеет важное значение как для теории, так и для практики. В настоящее время существует множество феноменологических моделей, описывающих различные эффекты пластического деформирования [1–7]. Адекватность и область применения каждой модели должны определяться только путем сопоставления экспериментальных данных и решений соответствующих краевых задач. Поэтому в настоящее время на первый план выходят анализ математической корректности и разработка эффективных численных методов решения краевых задач пластичности для различных моделей [8, 9].

**1. Постановка и математическая корректность начально-краевой задачи пластичности в форме абстрактной задачи Коши.** Пусть твердое тело занимает область  $\Omega \subset R^3$  с границей  $\Gamma$ . В деформированном состоянии каждая точка  $x \in \Omega$  получает перемещение  $u(x) \in R^3$  (переходит в положение  $x + u(x)$ ). Малые деформации характеризуются тензором Коши – линейным дифференциальным оператором  $E(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2 \in S^3$ , где  $S^3$  – пространство симметричных матриц  $3 \times 3$ .

К телу прикладываются квазистатические воздействия: в  $\Omega$  – массовая сила с плотностью  $f$ , на части границы  $\Gamma^2$  – поверхностная сила с плотностью  $F$ , а также задается перемещение  $\phi$  части границы  $\Gamma^1$ , причем  $\Gamma^1 \cup \Gamma^2 = \Gamma$ ,  $\Gamma^1 \cap \Gamma^2 = \emptyset$ ,  $\text{area}(\Gamma^1) > 0$ . В исходном состоянии внешние воздействия равны нулю, тело находится в натуральном состоянии.

Вводится безразмерный параметр внешнего нагружения  $t \in [0, 1]$  – "абсолютное время". Все величины рассматриваются как абстрактные функции, действующие из

промежутка  $[0, 1]$  в соответствующие банаховы пространства [10], которые далее будут конкретизированы. В силу квазистационарности процесса деформирования внешние воздействия полагаются абсолютно непрерывными (липшиц-непрерывными) по параметру нагружения, причем  $\Gamma^1 = \text{const}(t)$ . Используется обозначение  $C^{0,1}([0, 1], B)$  для пространства абсолютно непрерывных абстрактных функций из  $[0, 1]$  в некоторое банахово пространство  $B$  с соответствующей суп-нормой [10]. Предполагается существование продолжения функций  $\varphi(t)$  с  $\Gamma^1$  в  $\Omega$ , т.е. такой абстрактной функции  $u^0: [0, 1] \rightarrow B(\Omega, R^3)$ , которая совпадает с  $\varphi(t)$  на  $\Gamma^1$  для любого  $t \in [0, 1]$  и  $u^0(0) = 0$ .

Рассматривается слабая постановка начально-краевой задачи пластичности в форме эволюционного вариационного уравнения. Искомое поле перемещений ищется в виде представления  $u^*(t) = u(t) + u^0(t)$ , где абстрактная функция  $u \in V^0$  удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию для любой  $\pi \in V^0$  и всех  $t \in (0, 1)$ :

$$\int_{\Omega} \dot{\Sigma}_{ij}(E(u(t) + u^0(t)), E(\dot{u}(t) + \dot{u}^0(t))) E_{ij}(\pi) dx = L(t, \pi), \quad u(0) = 0$$

$$L(t, \pi) = \int_{\Omega} f_j(t) \pi_j dx + \int_{\Gamma^2} \dot{F}_j(t) \pi_j d\gamma \quad (1.1)$$

Здесь  $V^0 = \{v \in B(\Omega, R^3): v(x) = 0, x \in \Gamma^1\}$  – множество кинематически допустимых вариаций перемещения,  $\Sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений Коши, точка сверху обозначает  $d/dt$ . Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам, а также обозначение  $|A| = |A_{ij}| = (A_{km} A_{km})^{1/2}$  для модуля матрицы  $3 \times 3$ .

*Теорема 1.1.* Пусть твердое тело занимает ограниченную область  $\Omega \subset R^3$  с липшицевой границей  $\Gamma$  и пусть определяющее соотношение однородного материала задано матриц-функцией  $\dot{\Sigma}(E, \dot{E}): S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$ , которая удовлетворяет следующим алгебраическим условиям:

**(Н1)** Матриц-функция  $\dot{\Sigma}(A, B)$  является липшиц-непрерывной по  $A$ , т.е. существует непрерывная скалярная функция  $M_0 > 0$  такая, что для любых симметричных матриц  $A^1, A^2, B \in S^3$  верна оценка

$$|\dot{\Sigma}(A^1, B) - \dot{\Sigma}(A^2, B)| \leq M_0(B) |A^1 - A^2|$$

**(Н2)** Матриц-функция  $\dot{\Sigma}(A, B)$  является непрерывной, сильно монотонной по  $B$  [10–13], т.е. существует постоянная  $m_0 > 0$  такая, что для любых симметричных матриц  $A, B^1, B^2 \in S^3$  верна оценка

$$(\dot{\Sigma}_{ij}(A, B^1) - \dot{\Sigma}_{ij}(A, B^2))(B_{ij}^1 - B_{ij}^2) \geq m_0 |B^1 - B^2|^2$$

**(Н3)** Матриц-функция  $\dot{\Sigma}(A, B)$  имеет рост по  $|A|$  и  $|B|$  не выше линейного, т.е. существует постоянная  $M_1 > 0$  такая, что для любых симметричных матриц  $A, B \in S^3$  верна оценка

$$|\dot{\Sigma}(A, B)| \leq M_1 (|A| + |B|)$$

Тогда для внешних воздействий

$$f \in C^{0,1}([0, 1], L^{6/5}(\Omega, R^3)), \quad F \in C^{0,1}([0, 1], L^{4/3}(\Gamma^2, R^3)), \quad \varphi \in C^{0,1}([0, 1], L^2(\Gamma^1, R^3))$$

существует единственное строгое решение задачи (1.1) – абсолютно непрерывная функция  $u \in C^{0,1}([0, 1], V^0)$ ,  $u(0) = 0$  с сильной производной  $\dot{u}$ , удовлетво-

ряющая уравнению (1.1) почти всюду на  $[0, 1]$ , где  $V^0 = \{v \in H^1: v(x) = 0, x \in \Gamma^1\}$ ,  $H^1 = W^{1,2}(\Omega, R^3)$  – гильбертово пространство.

При этом отображение  $\{f, F, \varphi\} \rightarrow u$  является непрерывным из  $C^{0,1}([0,1], L^{5/2}(\Omega, R^3)) \times C^{0,1}([0,1], L^{4/3}(\Gamma^2, R^3)) \times C^{0,1}([0,1], L^2(\Gamma^1, R^3))$  в  $C^{0,1}([0,1], V^0)$ , т.е. решение непрерывным образом зависит от внешних воздействий.

*Доказательство.* Условие  $\varphi \in C^{0,1}([0,1], L^2(\Gamma^1, R^3))$  гарантирует существование функции  $u^0 \in C^{0,1}([0,1], H^1)$ , совпадающей с  $\varphi(t)$  на  $\Gamma^1$  в смысле следов для всех  $t \in [0,1]$  [12, 13], причем можно считать это продолжение единственным в силу содержательности значений  $\varphi$  именно на  $\Gamma^1$  [13].

Из условий  $f \in C^{0,1}([0,1], L^{5/2}(\Omega, R^3))$ ,  $F \in C^{0,1}([0,1], L^{4/3}(\Gamma^2, R^3))$  следует, что функционал  $L(t, \pi)$  является линейным и непрерывным по  $\pi \in H^1$  для почти всех  $t \in [0,1]$  [12, 13]. Из теоремы о представлении линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве следует существование единственной абсолютно непрерывной функции  $\psi \in C^{0,1}([0,1], H^1)$  такой, что для любой  $\pi \in H^1$  и почти всех  $t \in [0,1]$  справедливо представление [10, 13]:

$$L(t, \pi) = \int_{\Omega} [\psi(t) \cdot \pi + \nabla \psi(t) : (\nabla \pi)^T] dx = \langle \psi(t), \pi \rangle$$

где  $\langle \dots \rangle$  – скалярное произведение в  $H^1$ .

В силу условия (H3) корректно определено отображение  $S: H^1 \times H^1 \rightarrow H^1$  как оператор, удовлетворяющий для любой  $\pi \in H^1$  соотношению [10]:

$$\langle S(u, v), \pi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{ij} (E(u + u^0); E(v)) E_{ij}(\pi) dx$$

В этом случае задача (1.1) представляет собой задачу Коши на подпространстве  $V^0 \subset H^1$  в слабой постановке [14, 15]: для любой  $\pi \in V^0$  и почти всех  $t \in [0,1]$ :

$$\langle S(u(t), \dot{u}(t) + \dot{u}^0(t)), \pi \rangle = \langle \dot{\psi}(t), \pi \rangle, \quad u(0) = 0 \quad (1.2)$$

Условия (H1) – (H3) обеспечивают липшиц-непрерывность отображения  $S(u, v)$  по  $u$  и непрерывность, сильную монотонность по  $v$  как энергетического расширения оператора суперпозиции Немыцкого  $\dot{S}: L^2(\Omega, S^3) \times L^2(\Omega, S^3) \rightarrow L^2(\Omega, S^3)$  [10, 11, 13]. Это значит, что существуют непрерывный функционал  $M > 0$  и постоянная  $m > 0$  такие, что для любых  $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in H^1$  справедливы неравенства

$$\|S(u_1, v) - S(u_2, v)\| \leq M(v) \|u_1 - u_2\|$$

$$\langle S(u, v_1) - S(u, v_2), v_1 - v_2 \rangle \geq m \|v_1 - v_2\|^2$$

где  $\|\dots\|$  – норма в  $H^1$ .

Согласно классическим результатам теории операторов [10, 11] существует липшиц-непрерывное обратное отображение  $S^{-1}(u, *): H^1 \rightarrow H^1$ , такое, что для любых  $u, v, w, w_1, w_2 \in H^1$  справедливы тождества и неравенство

$$S^{-1}(u, S(u, v)) \equiv v, \quad S(u, S^{-1}(u, w)) \equiv w$$

$$\|S^{-1}(u, w_1) - S^{-1}(u, w_2)\| \leq (1/m) \|w_1 - w_2\|.$$

Более того, обратное отображение  $S^{-1}(u, w)$  является липшиц-непрерывным по  $u$ . Действительно, возьмем любые  $u_1, u_2, v \in H^1$  и обозначим через  $w_1 = S(u_1, v)$ ,  $w_2 = S(u_2, v)$ .

В силу однозначности обратного оператора имеем  $v = S^{-1}(u_1, w_1) = S^{-1}(u_2, w_2)$ . Используя введенные обозначения и липшиц-непрерывность операторов  $S^{-1}(u, w)$  по  $w$  и  $S(u, v)$  по  $u$  легко убедиться в справедливости оценки

$$\begin{aligned} & \|S^{-1}(u_1, w_1) - S^{-1}(u_2, w_1)\| = \|S^{-1}(u_2, w_2) - S^{-1}(u_2, w_1)\| \leq \\ & \leq (1/m) \|w_1 - w_2\| = (1/m) \|S(u_1, v) - S(u_2, v)\| \leq (M(v)/m) \|u_1 - u_2\| \end{aligned}$$

В результате задача (1.2), неразрешенная относительно производной, сводится к стандартной задаче Коши на  $H^1$  [10, 11, 16] в слабой постановке [14, 15]: для любой  $\pi \in H^1$  и почти всех  $t \in [0, 1]$ :

$$\langle \dot{u}(t) + \dot{u}^0(t) - Q(u(t), t), \pi \rangle = 0, \quad u(0) = 0 \quad (1.3)$$

где функция  $Q(u, t) = S^{-1}(u, \dot{\psi}(t))$  является на каждом замкнутом шаре в  $H^1 \times [0, 1]$  ограниченной, липшиц-непрерывной по  $u$  для почти всех  $t$  и измеримой по  $t$  для любого  $u$  как суперпозиция липшиц-непрерывной и кусочно-непрерывной функций.

Напомним, что обобщенным слабым решением (соответственно, псевдорешением) задачи Коши (1.3) называется абсолютно непрерывная функция  $u \in C^{0,1}([0, 1], H^1)$ , удовлетворяющая для любой  $\pi \in H^1$  следующему интегральному уравнению [11, 14, 15]:

$$\left\langle \left( u(t) + u^0(t) - \int_0^t Q(u(\tau), \tau) d\tau \right), \pi \right\rangle = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (1.4)$$

где интегрирование на  $[0, 1]$  понимается по Бохнеру (соответственно, по Петтису) [15, 16]. Для эквивалентности задач (1.3) и (1.4) достаточно интегрируемости по Лебегу числовой функции  $\|Q(u(*), *)\|$  на  $[0, 1]$  [10, 15, 16]. Это условие очевидно выполняется на любом замкнутом шаре в  $C^{0,1}([0, 1], H^1) \times [0, 1]$  в силу свойств функции  $Q(u, t)$ .

Перечисленные свойства обеспечивают выполнение всех условий глобальной теоремы Пикара – Линделефа [16] о существовании единственного строгого решения задач (1.3) и (1.4) в гильбертовом пространстве  $H^1$ .

Множество  $V^0$  как подпространство гильбертова пространства является замкнутым в сильной и слабой топологиях [12, 13]. Поэтому задачи (1.3) и (1.4) имеют единственное строгое решение на  $V^0$  [10].

Непрерывная зависимость решения от внешних воздействий следует из липшиц-непрерывности обратного отображения  $S^{-1}(u, w)$  по  $w$ , единственности функции  $\psi \in C^{0,1}([0, 1], H^1)$ , а также непрерывной зависимости решения от  $u^0$  – продолжения функции  $\varphi$  [10]. Теорема доказана.

*Замечание 1.1.* Легко убедиться, что известный постулат Друккера (положительность работы необратимой деформации [1–3]) в форме  $\dot{\Sigma}_{ij} \dot{P}_{ij} \geq 0$  не является достаточным условием математической корректности начально-краевой задачи пластичности.

*Замечание 1.2.* Основное условие (H2) сильной монотонности матриц-функции  $\dot{\Sigma}$  по тензору скоростей деформации является не только достаточным, но и необходимым условием существования и единственности решения абстрактной задачи Коши (1.1). Это следует из неулучшаемости условий теоремы Пикара – Линделефа [16].

Существует более общее понятие сильной квазимонотонности матриц-функции по матричному аргументу [17], имеющее нелокальный (интегральный) характер. Общая теория квазимонотонных отображений в настоящее время только создается и, поэтому, полностью отсутствует ее приложение к анализу абстрактной задачи Коши в банаховом пространстве. Первые результаты, полученные в [17, 18], подводят к

гипотезе о том, что условие (H2) можно ослабить – достаточно потребовать лишь сильную квазимонотонность матриц-функции  $\dot{\Sigma}$  по тензору скоростей деформации. Правда, в этом случае допускается неединственность решения абстрактной задачи Коши (1.1) и эффект бифуркации.

Указанные проблемы являются чисто математическими и в настоящей работе не рассматриваются.

**2. Инкрементальные модели пластичности.** Введем следующие обозначения для девиаторов тензоров напряжений и деформаций Коши соответственно:

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\Sigma) \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(E) \delta_{ij}$$

где  $\text{tr}(A) = \delta_{ij} A_{ij}$ ,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Среди множества инкрементальных моделей пластичности особо выделяются два типа: классический и эндохронный. Первый тип моделей опирается на понятие предельной поверхности (регулярной или сингулярной), различие активного (пластического) и пассивного (упругого) деформирования [2–4]. Второй тип моделей не использует гипотезу предельной поверхности и описывает процесс деформирования единым определяющим соотношением [5].

Приведем пример моделей указанного типа, записанных через внутренние параметры процесса.

1). Классическая модель линейного изотропно-трансляционного упрочнения, учитывающая идеальный эффект Баушингера (для активного процесса) [3, 4]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left( \varepsilon_* \frac{dP_{ij}}{dP} + h_0 P_{ij} \right), \quad P_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.1)$$

где  $\mu$  – модуль сдвига,  $\varepsilon_*$  – предел упругости,  $h_0$  – коэффициент пластического упрочнения,  $P_{ij}$  – компоненты пластической составляющей тензора деформации,  $dP = |dP_{ij}|$  – приращение параметра Одквиста [1–4].

2). Эндохронная модель [5]:

$$\sigma_{ij} + \alpha \varepsilon_* \frac{d\sigma_{ij}}{dR} = 2\mu \left( \varepsilon_* \frac{dR_{ij}}{dR} + h_0 R_{ij} \right), \quad R_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1-\alpha}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.2)$$

где  $\alpha \in [0, 1]$  – эндохронный параметр,  $R_{ij}$  – компоненты параметрического тензора,  $dR = |dR_{ij}|$ . Значению  $\alpha = 1$  соответствует первоначальный вариант модели, предложенный в [19]. Для параметров  $0 < \alpha \ll 1$  модель рассматривалась в [5]. Отметим, что при  $\alpha = 0$  модели (2.1) и (2.2) формально совпадают.

Запись инкрементальных моделей пластичности через внутренние параметры процесса нашла широкое применение в механике [1, 4, 5]. Однако, как будет показано далее, она обладает некоторыми особенностями и мало пригодна для анализа и решения соответствующей начально-краевой задачи.

Для анализа математической корректности задачи (1.1) необходимо задать матриц-функцию  $\dot{\Sigma}: S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$ , т.е. записать определяющее соотношение пластичности для скоростей (или приращений) напряжений и деформаций Коши.

В рамках инкрементального подхода в силу классических постулатов пластичности любое определяющее соотношение можно записать в виде [1–4]:

$$\dot{\Sigma}_{ij}(E, \dot{E}) = C_{ijkm} (\dot{E}_{km} - \dot{P}_{km}(E, \dot{E})) \quad (2.3)$$

где  $C_{ijkm} = (k_0 - 2\mu/3) \delta_{ij} \delta_{km} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jm}$  – компоненты акустического тензора в модели Гука (изотропной упругости),  $P_{km}$  – компоненты пластической (неупругой) деформации. Из физических соображений следует, что  $\dot{P}(E, 0) = 0$  для любой  $E \in S^3$ .

Модели (2.1) и (2.2) легко записать в виде (2.3).

1). Классическая модель

$$\dot{P}_{km} = (1 + h_0)^{-1} H(\rho - \varepsilon_*) H(\cos \gamma) \varepsilon_*^{-2} \rho_{km} \rho_{pq} \dot{E}_{pq} \quad (2.4)$$

$$\rho_{km} = \varepsilon_{km} - (1 + h_0) P_{km}, \quad \cos \gamma = (\rho \dot{\varepsilon})^{-1} \rho_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \rho = |\rho_{ij}|, \quad \dot{\varepsilon} = |\dot{\varepsilon}_{ij}|$$

$$H(q) = 0 \text{ при } q < 0 \text{ и } H(q) = 1 \text{ при } q = 0$$

Определяющее соотношение (2.4) ассоциировано с поверхностью деформирования  $\rho - \varepsilon_* = 0$  [2, 3].

2). Эндохронная модель

$$\dot{P}_{km} = \alpha Q \dot{\varepsilon} \rho_{km} = \alpha Q \dot{\varepsilon}^{-1} \rho_{km} \dot{\varepsilon}_{pq} \dot{E}_{pq} \quad (2.5)$$

$$\rho_{km} = (1 - \alpha h_0) \varepsilon_{km} - (1 + (1 - \alpha) h_0) P_{km}$$

$$Q = (\varepsilon_*^2 - v^2)^{-1} [v \cos \gamma + (\varepsilon_*^2 - v^2 \sin^2 \gamma)^{1/2}], \quad v = (1 - \alpha) \rho$$

Очевидно, что соотношения (2.4), (2.5) являются дифференциально нелинейными в силу зависимости от угла  $\gamma$  излома траектории деформирования (в работах [2, 20] соотношение (2.4) считается дифференциально линейным). В обеих моделях  $\text{tr}(\dot{P}) = 0$ .

Отметим, что при  $\alpha = 0$ ,  $\rho = \varepsilon_*$  эндохронная модель (2.5) не совпадает с классической моделью (2.4), поскольку в ней появляется неопределенность вида  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

требующая для своего раскрытия дополнительных предположений о режиме деформирования. Этот парадокс, очевидно, связан с формой записи определяющих соотношений (2.1) и (2.2) через пластический и параметрический вычисляемые тензоры (т.е. через существенно нелинейные параметры процесса).

В то же время имеется асимптотическая связь по  $\alpha \rightarrow +0$  между моделями (2.4) и (2.5) при монотонном простом (лучевом) деформировании. Действительно, в этом случае все тензоры соосны [1, 2] и для их модулей справедливы следующие соотношения.

1). Для классической модели (2.4):

$$y = (x - 1)H(x - 1) \quad (2.6)$$

$$y = (1 + h_0)P / \varepsilon_*, \quad x = \varepsilon / \varepsilon_*$$

2). Для эндохронной модели (2.5):

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y) = \alpha(1 + h_0) \frac{ax - by}{1 - (1 - \alpha)(ax - by)}, \quad y(0) = 0 \quad (2.7)$$

$$a = 1 - \alpha h_0, \quad b = (1 + (1 - \alpha) h_0) / (1 + h_0)$$

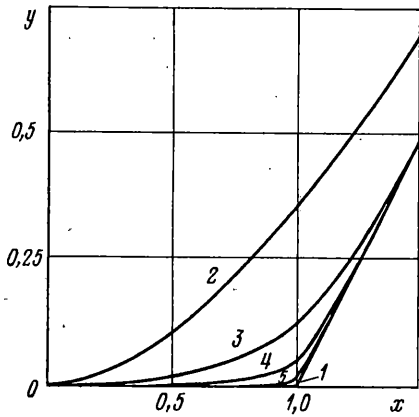
На фиг. 1 приведены зависимости  $y(x)$  для  $h_0 = 0,1$ : линия 1 соответствует классической модели (2.6), линии 2-5 – эндохронной модели (2.7) для  $\alpha = 1; 0,1; 0,01; 0,001$  соответственно.

*Замечание 2.1* Дифференциальное уравнение (2.7) является жестким для  $0 < \alpha \ll 1$ , поскольку в этом случае в окрестности  $x = 1$  производная  $y'(x)$  резко возрастает. Ширина этой зоны ("пограничного слоя") имеет порядок  $\alpha$  [21].

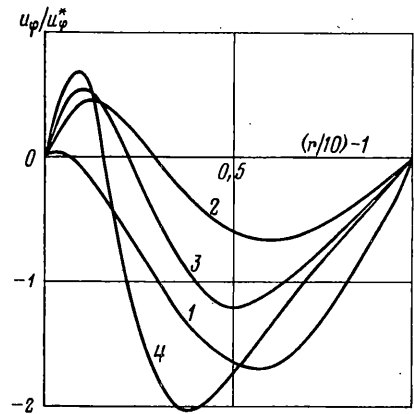
При численном интегрировании задачи Коши (2.7) по явной аппроксимационной схеме Эйлера

$$y_{k+1} = y_k + \tau g(x_k, y_k) \quad (k = 0, 1, \dots, M - 1)$$

необходимо брать шаг интегрирования  $\tau = (1/M)$  меньше ширины пограничного слоя ( $\tau \ll \alpha$ ), иначе происходит "взрыв погрешности" и "абсолютная потеря решения" [21] ( $y_k \equiv 0$ ).



Фиг. 1



Фиг. 2

При использовании неявной аппроксимационной схемы Эйлера  $y_{k+1} = y_k + \tau g(x_{k+1}, y_{k+1})$  ( $k = 0, 1, \dots, M - 1$ ) можно брать существенно больший шаг интегрирования ( $\tau \gg \alpha$ ), при этом вычислительный процесс остается абсолютно устойчивым [21] (линии 4, 5 на фиг. 1 с  $\tau = 0,1$ ).

Отмеченные вычислительные эффекты не могут быть обнаружены при анализе точного решения задачи (2.7), неразрешенного относительно  $y$ :

$$(1 - \alpha)y + \alpha(1 + h_0)[\ln(1 + by/a - x) + x] = 0$$

Приведем пример учета эффекта дилатансии и внутреннего трения в классической модели линейного изотропно-трансляционного упрочнения с идеальным эффектом Баушингера

$$\begin{aligned} \dot{P}_{km} = & (1 + h_0 + 3\lambda\Lambda)^{-1} H(\rho - \varepsilon_* + \lambda \operatorname{tr}(E - P)) H(\cos \gamma + \lambda \dot{\varepsilon}^{-1} \operatorname{tr}(\dot{E})) \times \\ & \times \rho^{-2} (\rho_{km} + \Lambda \rho \delta_{km}) (\rho_{pq} + \lambda \rho \delta_{pq}) \dot{E}_{pq} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\rho_{km} = \varepsilon_{km} - (1 + h_0)(P_{km} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(P) \delta_{km})$$

где  $\lambda, \Lambda \geq 0$  – коэффициенты внутреннего трения и дилатансии соответственно (с точностью до множителей), остальные величины определены в (2.1) и (2.4). Здесь  $\operatorname{tr}(\dot{P}) \neq 0$ , что соответствует экспериментально наблюдаемому эффекту вспухания геоматериалов при пластическом деформировании [6, 7]. При  $\lambda = \Lambda = 0$  модель (2.8) совпадает с классической моделью (2.4). При  $\lambda = \Lambda \neq 0$  определяющее соотношение (2.8) ассоциировано с поверхностью деформирования  $\rho - \varepsilon_* + \lambda \operatorname{tr}(E - P) = 0$ , которая при  $h_0 = 0$  соответствует поверхности нагружения Мизеса – Шлейхера [6, 7]:  $\sigma + c \lambda \operatorname{tr}(\Sigma) - 2\mu \varepsilon_* = 0$ , где  $\sigma = |\sigma_{ij}|$ ,  $c = 2\mu/(3k_0)$ .

**3. Математическая корректность начально-краевой задачи пластичности для инкрементальных моделей.** Анализ математической корректности начально-краевой задачи пластичности в слабой форме абстрактной задачи Коши (1.1) для инкрементальных моделей сводится к проверке алгебраических условий (H1) – (H3). Для представления (2.3) они легко преобразуются в следующие условия на матриц-функцию  $\dot{P}: S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$ , которые удобно использовать на практике.

(H1') Матриц-функция  $\dot{P}(A, B)$  является липшиц-непрерывной по  $A$ , т.е. существует непрерывная скалярная функция  $M_0 > 0$  такая, что для любых симметричных матриц  $A^1, A^2, B \in S^3$  верна оценка

$$|C_{ijkn}(\dot{P}_{km}(A^1, B) - \dot{P}_{km}(A^2, B))| \leq M_0(B) |A^1 - A^2|$$

(H2') Матриц-функция  $\dot{P}(A, B)$  является непрерывной, сильно антимонотонной по  $B$  с постоянной, строго меньшей  $2\mu$ , т.е. для любых симметричных матриц  $A, B^1, B^2 \in S^3$  верна оценка

$$C_{ijkm}(\dot{P}_{km}(A, B^1) - \dot{P}_{km}(A, B^2))(B_{ij}^1 - B_{ij}^2) < 2\mu|B^1 - B^2|^2$$

(H3') Матриц-функция  $\dot{P}(A, B)$  имеет рост по  $|A|$  и  $|B|$  не выше линейного, т.е. существует постоянная  $M_2 > 0$  такая, что для любых симметричных матриц  $A, B \in S^3$  верна оценка

$$|C_{ijkm}\dot{P}_{km}(A, B)| \leq M_2(|A| + |B|)$$

Отметим, что условия (H1') и (H3') выполняются для всех инкрементальных моделей пластичности, поэтому основным является условие (H2').

Перейдем к анализу математической корректности задачи (1.1) для приведенных моделей.

*Пример 1.* Для классической модели (2.4) условие (H2') выполняется при положительном упрочнении  $h_0 > 0$  для любых траекторий деформирования.

Действительно, возьмем произвольные симметричные матрицы  $A, B^1, B^2 \in S^3$  (достаточно взять  $B^1, B^2$  с  $\text{tr}(B^1) = \text{tr}(B^2) = 0$  в силу девiatorности соотношений) и подставим их в условие (H2') для модели (2.4):

$$\begin{aligned} & C_{ijkm}(\dot{P}_{km}(A, B^1) - \dot{P}_{km}(A, B^2))(B_{ij}^1 - B_{ij}^2) = \\ & = 2\mu(1 + h_0)^{-1} H(\rho - \varepsilon_*) \left[ |B^1| \cos \gamma_1 H(\cos \gamma_1) - |B^2| \cos \gamma_2 H(\cos \gamma_2) \right] \times \\ & \times |B^1 - B^2| \cos \gamma_{12} \leq 2\mu(1 + h_0)^{-1} |B^1 - B^2|^2 \end{aligned}$$

$$\cos \gamma_k = (\rho |B^k|)^{-1} \rho_{ij} B_{ij}^k \quad (k = 1, 2), \quad \cos \gamma_{12} = (\rho |B^1 - B^2|)^{-1} \rho_{ij} (B_{ij}^1 - B_{ij}^2)$$

При выводе использовалось очевидное равенство  $|B^1 - B^2| \cos \gamma_{12} = |B^1| \cos \gamma_1 - |B^2| \cos \gamma_2$ , а также определение функции  $H(q)$  в (2.4).

*Пример 2.* Исследуем эндохронное определяющее соотношение. Для этого возьмем произвольные симметричные матрицы  $A, B^1, B^2 \in S^3$  (достаточно взять  $B^1, B^2$  с  $\text{tr}(B^1) = \text{tr}(B^2) = 0$  в силу девiatorности соотношений) и подставим их в условие (H2') для модели (2.5):

$$\begin{aligned} & C_{ijkm}(\dot{P}_{km}(A, B^1) - \dot{P}_{km}(A, B^2))(B_{ij}^1 - B_{ij}^2) = \\ & = 2\mu\alpha\rho(Q_1|B^1| - Q_2|B^2|) |B^1 - B^2| \cos \gamma_{12} \leq 2\mu\Psi(Q_1, Q_2, \rho) |B^1 - B^2|^2 \end{aligned}$$

где  $Q_k = Q(\gamma_k)$  ( $k = 1, 2$ ), углы  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{12}$  определены в предыдущем примере, а множитель при  $2\mu$  имеет вид

$$\Psi(Q_1, Q_2, \rho) = \alpha\rho \max\{Q_1, Q_2; \gamma_1, \gamma_2 \in [0, 2\pi)\} \quad (3.1)$$

При выводе использовалось элементарное неравенство  $||B^1| - |B^2|| \leq |B^1 - B^2|$ .

В случае простого (лучевого) деформирования с  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  имеем

$$\Psi = \frac{\alpha\rho}{\varepsilon_* - (1 - \alpha)\rho} \quad (3.2)$$

Анализируя решение задачи Коши (2.7) легко убедиться, что величина

$$\rho = \varepsilon_*(ax - by) < \varepsilon_*(1 - \alpha h_0)$$



и поэтому для любых  $\alpha > 0, h_0 > 0$  множитель (3.2) всегда меньше единицы

$$\Psi < \frac{1 - \alpha h_0}{1 + h_0 + \alpha h_0} < 1$$

Последнее означает, что эндохронное определяющее соотношение удовлетворяет условию  $(H2')$  при монотонном лучевом деформировании.

В общем случае, для множителя (3.1) не удается построить аналитическую оценку сверху. Более того, в [22, 23] отмечается, что при сложном циклическом деформировании эндохронное определяющее соотношение может не удовлетворять принципу детерминизма. Это, по-видимому, означает, что условие  $(H2')$  может нарушаться (множитель  $\Psi$  может превышать единицу). Однако, согласно замечанию 1.3 последнее еще не означает, что абстрактная задача Коши для эндохронного определяющего соотношения (2.5) является математически некорректной.

*Пример 3.* Исследуем дилатансионное определяющее соотношение. Возьмем произвольные симметричные матрицы  $A, B^1, B^2 \in S^3$  и подставим их в условие  $(H2')$  для модели (2.8):

$$\begin{aligned} C_{ijkm}(\dot{P}_{km}(A, B^1) - \dot{P}_{km}(A, B^2))(B_{ij}^1 - B_{ij}^2) &\leq \\ &\leq (1 + h_0 + 3\lambda\Lambda)^{-1} \left[ |B^1 - B^2| + \lambda \operatorname{tr}(B^1 - B^2) \right] \times \\ &\times \left[ 2\mu |B^1 - B^2| + 3k_0\Lambda \operatorname{tr}(B^1 - B^2) \right] \leq 2\mu\Psi(\lambda, \Lambda, h_0) |B^1 - B^2|^2 \\ \Psi &= \frac{(1 + \sqrt{3}\lambda)(1 + \sqrt{3}c\Lambda)}{1 + h_0 + 3\lambda\Lambda}, \quad c = \frac{3k_0}{2\mu} \end{aligned}$$

Константа материала  $c = (1 + \nu)/(1 - 2\nu) \geq 1$ , поскольку для реальных материалов коэффициент Пуассона  $\nu \in [0; 0,5]$  [1-4]. Поэтому условие  $(H2')$  для параметров  $\lambda, \Lambda \geq 0$  выполняется ( $\Psi < 1$ ) только при положительном пластическом упрочнении, удовлетворяющем следующему неравенству

$$h_0 > \sqrt{3}(\lambda + c\Lambda) + 3(c - 1)\lambda\Lambda \geq 0 \quad (3.3)$$

В этом случае гарантируется математическая корректность задачи Коши (1.1) даже для неассоциированного случая  $\lambda \neq \Lambda$ . При нарушении условия  $(H2')$  в рамках модели (2.8) возможны внутренняя неустойчивость и бифуркация процесса деформирования, частично исследованные в работе [7].

*Замечание.* Для классической модели (2.4) в [9] построен скалярный потенциал  $\Phi: S^3 \times S^3 \rightarrow R$  такой, что  $\dot{\Sigma}_{ij}(E, \dot{E}) = \partial\Phi(E, \dot{E}) / \partial\dot{E}_{ij}$  для любой  $\dot{E} \in S^3$ :

$$\Phi(E, \dot{E}) = \frac{1}{2} k_0 \operatorname{tr}^2(\dot{E}) + \mu [1 - (1 + h_0)^{-1} H(\rho - \epsilon_*) H(\cos \gamma) \cos^2 \gamma] \left( |\dot{E}|^2 - \frac{1}{3} \operatorname{tr}^2(\dot{E}) \right)$$

где  $\rho = \rho(E)$ ,  $\gamma = \gamma(E, \dot{E})$ , причем в силу сильной монотонности определяющего соотношения (2.4) при  $h_0 > 0$  потенциал является сильно выпуклым по  $\dot{E}$  [10, 11, 13].

В этом случае начально-краевая задача пластичности ставится в форме эволюционной минимизационной вариационной проблемы [9]: для почти всех  $t \in [0, 1]$ :

$$\dot{u} = \arg[\inf\{I(v): v \in V^0\}], \quad u(0) = 0 \quad (3.4)$$

$$I(v) = \int_{\Omega} \Phi(E(u + u^0), E(v + \dot{u}^0)) dx - L(t, v)$$

где как и раньше  $u^0$  – продолжение функции  $\varphi$ .

Математическая корректность задачи (3.4) вытекает из классических результатов

вариационного исчисления для интегрального функционала с сильно выпуклым интегрантом [11, 12, 24, 25].

**4. Численные методы решения начально-краевой задачи пластичности.** Для построения дискретной модели задачи (1.1) используется пространственная аппроксимация по методу конечных элементов:  $\Omega_h = \cup T_h, \Gamma_h = \partial\Omega_h$  и  $\text{vol}(\Omega \setminus \Omega_h) \rightarrow 0, \text{area}(\Gamma \setminus \Gamma_h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow +0$  регулярным образом [25]. Здесь  $T_h$  – тетраэдры,  $h$  – характерный линейный размер триангуляции. Множество  $V^0$  аппроксимируется множеством  $V_h^0$  непрерывных кусочно-линейных вектор-функций, равных нулю на  $\Gamma_h^1$ . В этом случае существует изоморфизм между  $V_h^0$  и  $R^N$ , где  $N$  – число свободных параметров аппроксимации (значений искомой функции в свободных узлах).

Задача (1.1) аппроксимируется задачей Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$S_p(U, \dot{U}) = B_p(t), \quad t \in [0, 1], \quad U(0) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$

где  $U$  – глобальный вектор свободных узловых значений перемещения,  $B$  – глобальный вектор скоростей узловых воздействий.

Для определяющих соотношений вида (2.3) левая часть дифференциального уравнения может быть представлена в виде

$$S_p(U, \dot{U}) = A_{pq}(U, \dot{U}) \dot{U}_q \quad (p, q = 1, 2, \dots, N) \quad (4.2)$$

где  $A$  – глобальная матрица переменных касательных модулей жесткости [9].

В некоторых случаях система (4.1) может оказаться жесткой, что для представления (4.2) соответствует плохой обусловленности матрицы  $A$  (большому разбросу собственных чисел) [21]. Например, при малом деформационном упрочнении  $0 < h_0 \ll 1$  для классической модели (2.4) в матрице  $A$  могут появиться строки, имеющие множители порядка 1 и  $h_0$  (при углах  $\gamma \sim 0$ ) [8, 9]. В результате число обусловленности матрицы  $A$  оказывается очень большим (для  $N \gg 1$ ) [9]:

$$\text{cond}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\max} / \lambda_{\min} \approx CN^2 h_0^{-1}$$

где  $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$  – наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы  $A$  соответственно,  $C = \text{const}(N, h_0)$ .

В соответствии с общим подходом для численного интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений необходимо использовать неявную аппроксимационную схему Эйлера [21]:

$$U^{k+1} = U^k + \tau X^k, \quad A_{pq}(U^k + \tau X^k, X^k) X_q^k = B_p^k \quad (4.3)$$

где индекс  $k = 0, 1, \dots, M-1$  соответствует параметру  $t_k = kt + 0, \tau = 1/M \ll 1$ .

*Замечание.* В рамках инкрементального подхода определяющее соотношение всегда является дифференциально нелинейным в силу зависимости от угла  $\gamma$  излома траектории деформирования. Поэтому система (4.1) неразрешима относительно  $dU/dt$ . В этом случае применение явной аппроксимационной схемы Эйлера не имеет никаких преимуществ перед неявной схемой [21]. Согласно же Замечанию 2.1 применение явной схемы принципиально невозможно при использовании жесткой эндохронной модели (2.5) с параметром  $0 < \alpha \ll 1$ .

Для численного решения нелинейных систем алгебраических уравнений (4.3) используется метод адаптивной блочной релаксации (АБР), нечувствительный к величине обусловленности матрицы жесткости. Идея метода состоит в итерационном уточнении решения путем разбиения переменных на блоки на каждом итерационном шаге и релаксации при помощи блочного варианта метода Зейделя [26].

**Описание метода АБР. 1.** В качестве нулевого приближения берется упругое решение

$$Y_q^0 = A_{pq}^{-1}(U^k, 0)B_p^k$$

2. По свойству метода конечных элементов матрица  $A$  имеет ленточную структуру с ведущей главной диагональю [25]. Поэтому по текущему приближению  $Y^m$  переменные разделяются на быстрые и медленные по критерию близости соответствующих диагональных элементов матрицы  $A^m = A(U^k + \tau Y^m, Y^m)$ :

$$I_s^m = \{p = 1, 2, \dots, N: \Delta^{(s-1)/L} \leq A_{pp}^m / d^m < \Delta^{s/L}\} \quad (s = 1, 2, \dots, L-1)$$

$$I_L^m = \{1, 2, \dots, N\} \setminus \bigcup_{s=1}^{L-1} I_s^m, \quad \Delta = \frac{D^m}{d^m}$$

где  $D^m, d^m$  – наибольший и наименьший диагональные элементы матрицы  $A^m$ ,  $L = \text{int}(\omega \lg \Delta) + 1$  – число блоков ( $1 \leq L \leq N$ ),  $\omega \in [0, 1]$  – параметр декомпозиции,  $\text{int}(\ast)$  – целая часть числа.

Очевидно, что

$$I_s^m \cap I_t^m = \emptyset \quad (s \neq t), \quad \bigcup_{s=1}^L I_s^m = \{1, 2, \dots, N\}$$

т.е. исходное пространство  $R^N$  разбивается на прямую сумму  $L$  попарно ортогональных подпространств, натянутых на переменные с номерами из непересекающихся множеств  $I_s^m$  ( $s = 1, 2, \dots, L$ ). Отметим, что такое разбиение является индивидуальным для каждой итерации.

3. Выполняется несколько шагов по блочному методу Зейделя [26]. На практике достаточно одного шага (здесь нет суммирования по  $s$ ):

$$Y^{m+1} = \{w^1 \oplus w^2 \oplus \dots \oplus w^L\}^T$$

$$w_i^s = [\Lambda^{ss}]_{ij}^{-1} \left( \Xi_j^s - \sum_{t=1}^{s-1} \Lambda_{jk}^{st} w_k^t - \sum_{t=s+1}^L \Lambda_{jk}^{st} v_k^t \right) \quad (s = 1, 2, \dots, L)$$

$$\Lambda^{st} = \{A_{pq}^m: p \in I_s^m, q \in I_t^m\}, \quad \Xi^s = \{B_p^k: p \in I_s^m\}, \quad v^t = \{Y_q^m: q \in I_t^m\}$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенства, обеспечивающего практическую нечувствительность метода АБР к величине числа обусловленности матрицы  $A^m$ :

$$\text{cond}(\Lambda^{ss}) \sim \text{cond}^{1/L}(A^m) \ll \text{cond}(A^m)$$

для любого  $s = 1, 2, \dots, L$  даже если  $L = 2$ .

По новому приближению  $Y^{m+1}$  переменные снова разделяются на быстрые и медленные и т.д.

4. В качестве критерия остановки итерационного процесса используется условие  $|A_{pq}^m Y_q^m - B_p^k| < \xi$ , где  $\xi$  – заданная точность.

**Замечание 4.2.** Первоначально метод АБР использовался для минимизации враждебных функций, являющихся дискретными МКЭ-моделями соответствующих функционалов вариационных задач деформационной теории пластичности [8], теории течения для классической модели [9] и нелинейной упругости [27]. Его сходимость доказана для потенциальных сильно монотонных определяющих соотношений [8]. А именно:  $\lim_{m \rightarrow \infty} Y^m = X^k$  для всех  $k = 0, 1, \dots, M - 1$ . Предлагаемый вариант является обобщением метода АБР на случай непотенциальных определяющих соотношений.

**5. Вычислительные эксперименты.** Численный анализ алгебраических свойств систем (4.1) и (4.3), тестирование метода АБР и сравнение решений для моделей (2.4), (2.5) проводились на серии задач осесимметричного кинематического кручения и обжима длинной круглой трубы, закрепленной по внутренней поверхности, при отсутствии объемных сил. Использовалась модель плоского деформированного состояния. Процессы сложного деформирования задавались различными режимами изменения перемещений на внешнем радиусе [8, 9]:

$$u_{\varphi}^0(t) = C_{\varphi} Z_{\varphi}(t), \quad u_r^0(t) = C_r Z_r(t), \quad t \in [0, 1]$$

где  $C_{\varphi} = \epsilon_* b(1 - a^2 / b^2)$ ,  $C_r = \sqrt{3}/2 C_{\varphi}$  – значения внешних перемещений, начиная с которых появляется пластическая деформация по классической модели.

Использовались следующие значения:  $a = 10$ ,  $b = 20$  мм,  $k_0 = 10^5$ ,  $\mu = 7,5 \cdot 10^4$  МПа,  $\epsilon_* = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $h_0 = 0,1$  (в относительных единицах), радиус разбивался на 50 одинаковых отрезков. В качестве стандартного метода решения системы (4.3) использовался алгоритм простых итераций [8, 9] (переменных параметров упругости [1, 2]), совпадающий с методом АБР при параметре декомпозиции  $\omega = 0$ .

На примере лучевого режима  $Z_{\varphi}(t) = 10t$ ,  $Z_r(t) \equiv 0$ , для которого имеется аналитическое решение по классической модели [8], установлено, что между эндохронным и классическим решениями имеется асимптотическая связь по эндохронному параметру  $\alpha \rightarrow +0$ .

На примере циклического режима  $Z_{\varphi}(t) = 10 \sin(4m\pi t)$ ,  $Z_r(t) = 10 \sin(2m\pi t)$ , где  $m$  – число циклов, сравнивались остаточные перемещения в конце каждого полного цикла. На фиг. 2 приведены эти решения: 1 – по классической модели (циклически постоянное); 2 – 4 – по эндохронной модели с  $\alpha = 0,01$  для  $m = 1, 2, 3$  циклов соответственно. При расчете по эндохронной модели на четвертом цикле обнаружен эффект заикливания обоих методов (стандартного и АБР с  $\omega = 0,5$ ). В этот момент у матрицы жесткости зарегистрированы отрицательные собственные числа. Обнаруженный эффект связан либо с нарушением глобальной эллиптичности краевой задачи [25], либо с накоплением вычислительных погрешностей. Отметим, что структура эндохронного определяющего соотношения (2.5) требует дополнительного итерационного уточнения угла излома  $\gamma$  на каждом шаге основного итерационного процесса. В результате резко увеличивается время счета (более чем в два раза). Последнее наводит на мысль о необходимости разработки других, более эффективных методов численного решения начально-краевых задач пластичности по эндохронным моделям. Все вычисления проводились с двойной точностью на ЭВМ АТ-486DX2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95–01–00992) и Центра фундаментального естествознания при С.-Петербургском государственном университете (грант 5–3–2.1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А.А. Пластичность. М., Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности. М.: изд-во МГУ, 1978. 208 с.
3. Ключников В.Д. Устойчивость упруго-пластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
4. Новожилов В.В., Кадашевич Ю.И. Микронапряжения в конструкционных материалах. Л.: Машиностроение, 1990. 223 с.
5. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 161–167.
6. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 681–689.
7. Гарагаш И.А., Николаевский В.Н. Неассоциированные законы течения и локализация пластической деформации // Успехи механики (Advances in Mech.). 1989. Т. 12. Вып. 1. С. 131–183.
8. Бригаднов И.А., Репин С.И. О численном решении задач пластичности для малоупрочняющихся материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 72–77.

9. Бригаднов И.А. О численном решении краевых задач упругопластического течения // Изв. АН. МТТ, 1992. № 3. С. 157–162.
10. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
11. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов (в теории нелинейных уравнений). М.: Наука, 1972. 416 с.
12. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. 472 с.
13. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
14. Szer A. Existence theorem for weak solutions of ordinary differential equations in reflexive Banach spaces // Studia Sci. Math. Hungarica. 1971. V. 6. No. 1–2. P. 197–203.
15. Knight W.J. Solutions of differential equations in B-spaces // Duke Math. J. 1974. V. 41. No. 2. P. 437–442.
16. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962. 832 с.
17. Zhang Ke-Wei. On the Dirichlet problem for a class of quasilinear elliptic systems of partial differential equations in divergence form // Lectures Notes in Math. 1988. No. 1306. P. 262–277.
18. Chabrowski J., Zhang K.-W. Quasi-monotonicity and perturbed systems with critical growth // Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41. No. 2. P. 483–504.
19. Valanis K.C. A theory of viscoplasticity without a yield surface // Arch. Mech. 1971. V. 23. No. 4. P. 517–551.
20. Сарбаев Б.С. Об одном варианте теории пластичности с трансляционным упрочнением // Изв. АН. МТТ. 1994. № 1. С. 65–72.
21. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979. 208 с.
22. Sandler I.S. On the uniqueness and stability of endochronic theory of materials behavior // J. Appl. Mech. 1978. V. 45. No. 2. P. 263–266.
23. Ключников В.Д. Дефекты эндохронной теории пластичности // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 176–178.
24. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 575 с.
25. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
26. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 448 с.
27. Бригаднов И.А. Численное решение краевой задачи гиперупругости в приращениях // Изв. АН. МТТ. 1994. № 6. С. 42–50.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
22.III.1995